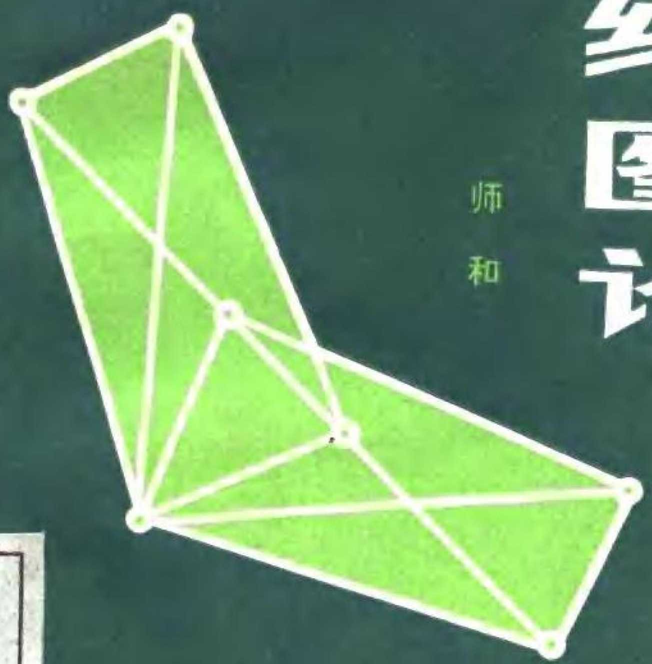
DIAN WANG LUO
TU LUN

电网络图论

师
和



西安电子科技大学出版社

前　　言

图论是近廿年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个数学分支。一般认为图论始于1736年L．Euler研究七桥问题的论文。1847年G．Kirchhoff用树来研究电网络的分析。1936年,D．König写出了第一本图论专著。1961年，S．Seshu与M．B．Reed写出了图论在电网络中应用的著作。图论在运筹学、计算机科学、电网络等领域中得到了广泛的应用,从而极大地丰富了它的内容,并已成为分析大规模系统的有力工具之一。本书仅选择在电网络中用得较多的图论的基本概念加以介绍,并着重于它在电网络分析中的应用。

本书共分十章。第一章至第四章介绍图论的基础知识，第五章介绍电加权图的拓扑性质，第六、七章讨论电路方程的系统编写方法，第八、九章介绍无源、有源网络的拓扑分析，第十章讨论信号流图与流图，各章之后附有少量习题。

本书是在1983年为开设选修课编写的“网络图论导论”讲义的基础上修改而成。可作为信息工程、电子工程各专业研究生与高年级本科生选修课(约40学时)的教材或参考书，亦可供有关工程技术人员参考。

陈士贤同志曾实施过1983年作者编印的“网络图论导论”讲义，他对编写本书提出了保贵意见，在此表示感谢。

限于水平，书中错误和不妥之处在所难免，望读者提出批评和指正。

作　者

于西安电子科技大学

1987年8月

目　　录

第一章　图的基本概念

图论是数学的一个分支，我们仅讨论在电路理论中涉及到的一些图论基本概念，属于纯数学的一些概念和理论我们不可能均作严格深入的叙述和论证，有些仅用图的直观性来加以说明，对此有兴趣的读者可参考有关图论著作。

§1.1　图的定义

我们知道，电路中的电流电压不仅与元件性质有关，而且与元件的连接关系有关。可以用图来反映电路元件的连接关系。若元件的连接点用顶点表示，元件用边表示，我们就将电路抽象成了一个图，如图 1.1.1 所示。

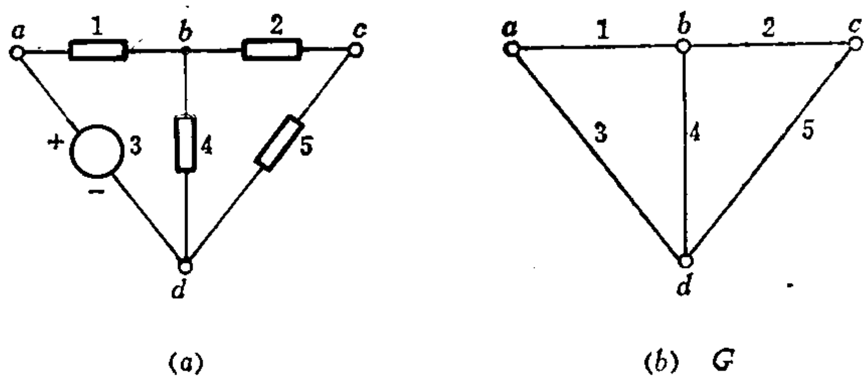


图　1.1.1

图是由顶点与边组成的，用边来反映顶点间的某种联系，例如图 1.1.1(*b*) 中边 4 表示原电路 *b*、*d* 结点间有元件连接。又如，城市间的交通也可构成一个图，把城市作为顶

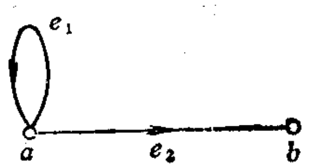
点，两城市间若有铁路联系，可作为两顶点间有边，如此可构成铁路交通图。由此可见，给定一个图应指出两个集合，即顶点集与边集，而边是用顶点对来表示的。下面给出图的定义。

集合的序对 $G=[V,E]$ 称为图，其中 V 为顶点集，E 为边集，边为顶点的序对。

例如图 1.1.1(b) 中的图 G 可写成 $V=\{a, b, c, d\}$，$E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$1=(a, b)$，$2=(b, c)$，$3=(a,d)$，$4=(b, d)$，$5=(c, d)$。

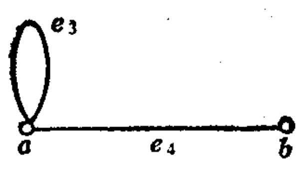
若有边 $e_k=(v_i, v_j)$，$v_i, v_j \in V$，顶点 v_i、v_j 称为边的端点。边 e_k 又称为与顶点 v_i，v_j 关联。如果 $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$，表明顶点对有序，它代表的边有方向，有向边也称弧。否则，边无向。相应地，图可分为有向图与无向图。

为了形象地反映图的概念，引入几何表示法。对有序的顶点对采用图 1.1.2(a) 的表示法，对无序的顶点对采用图 1.1.2(b) 的表示法。图 (a) 中 $e_1=(a,a)$ 称自回路或环；对于弧 $e_2=(a,b)$，a 为弧的始点，b 为弧的终点。



$e_1=(a,a)$
$e_2=(a,b) \neq (b,a)$

(a) 有向图



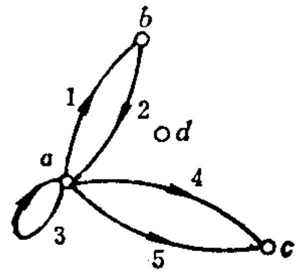
$e_3=(a,a)$
$e_4=(a,b)=(b,a)$

(b) 无向图

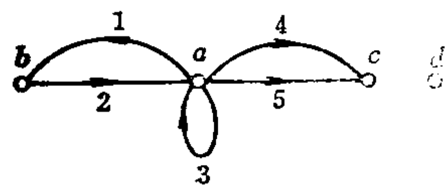
图 1.1.2

由于采用弧或有向边表示有序的顶点对，用无向边表示

无序的顶点对，而顶点对仅反映两顶点间存在某种联系，故边可绘成线段、曲线等不同的形状，而顶点的位置也可任意安排。所以这里所研究的图与普通几何中的图形是不同的，称为拓扑图，简称图。例如图 1.1.3(a)及(b) 代表同一个图的不同形象。该图 $G=(V,\ E)$，其中 $V=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$1=(a,b)$，$2=(b,\ a)$，$3=(a,a)$，$4=(a,c)$，$5=(a,c)$。弧 4 与弧 5 称为并联弧。



(a) G



(b) G

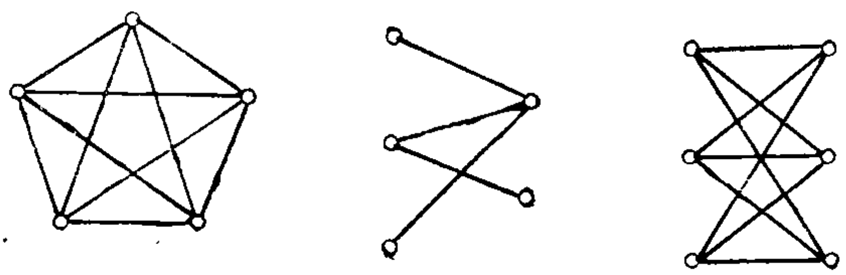
图 1.1.3

我们先讨论无向图，在适当的时候再讨论有向图。今后，如不作特别说明，所指的图均为无向图。

我们把无环以及无并联边的图称简单图。如果图含 n 个顶点，且每两个顶点间均有边连接，这样的简单图称完全图，记为 K_n。例如图 1.1.4(a)为 K_5。

若把图的顶点分成两个集合，而且每个顶点仅属于其中的一个集合，使每个边的两个端点各属于一个集合，它表明每个顶点集合之内的顶点之间无边连接，这样的图称为两部分图，如图 1.1.4(b)所示。在两部分图中，若一个顶点集合含 m 个顶点，另一集合含 n 个顶点，而且两顶点集合中任意一对顶点之间均有边连接，这样的图称为两部分完全图，

记为 $K_{m,n}$。例如图 1.1.4(c)为 $K_{3,3}$。类似地，可定义 K 部分图和 K 部分完全图。



(a) K_3　　(b) 两部分图　　(c) $K_{3,3}$

图 1.1.4

我们说无向图中的一个边与顶点 v 关联，指的是该边的一个端点为顶点 v。顶点 v 的度 $d(v)$ 指的是与 v 关联的边数，即

$$d(v) = 2n_s + n_n \tag{1.1.1}$$

式中，n_s——与 v 关联的环数；

n_n——与 v 关联的边(非环)数。

例如图 1.1.5 中各顶点的度分别为：$d(a) = 1, d(b) = 3$，$d(c) = 2$，$d(d) = 6$，$d(e) = 0$，$d(f) = 2$。图中度为零的顶点称为孤立顶点，如图中的顶点 e；而度为 1 的顶点称为悬挂点，如图中的顶点 a。

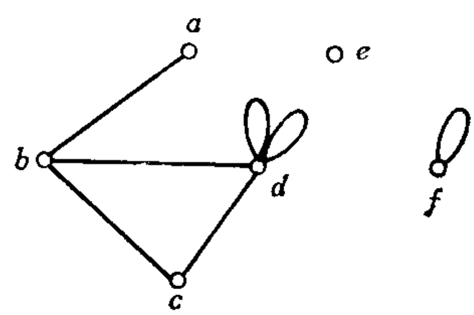


图 1.1.5

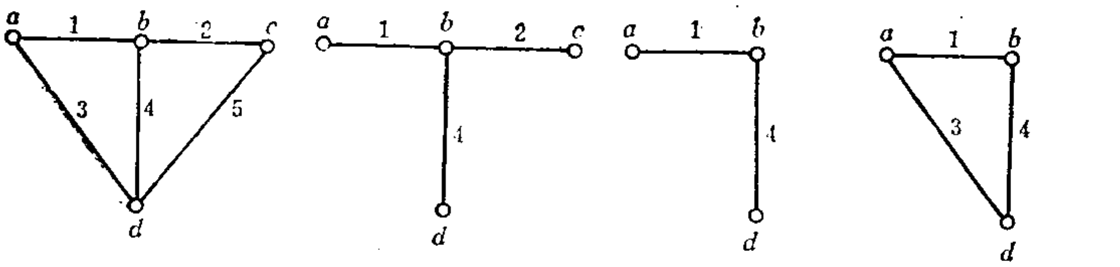
对于一个图，因每个边总关联两个顶点(环的顶点计及两次)，故有

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m \tag{1.1.2}$$

式中，m——图中的边数。例如图 1.1.5 中

$$\sum_{v \in V} d(v) = 1+3+2+6+0+2 = 14$$

在图 $G=[V,E)$中，仅由图 G 的顶点及边组成的图$G'=[V',E']$称为 G 的子图，V' 为 V 的子集，E' 为 E 的子集，即 $V' \subseteq V$，$E' \subseteq E$。G' 与 G 不同时，G' 为 G 的真子图。若G'包含 G 的全部顶点，即 $G'=[V,E']$，$E' \subseteq E$，则称 G' 为G的生成子图。若子图 G' 无孤立顶点，它完全可用其边集描述，则 G' 称为边诱导子图，简记为$\langle E' \rangle$。若子图 G' 完全可用顶点集 V' 描述，即边$(v_i, v_j) \in E'$ 当且仅当 $v_i, v_j \in V'$，则 G' 称为顶点诱导子图，简记为$\langle V' \rangle$。例如图 1.1.6 中(a)为图G，(b)为一生成子图，(c)为边诱导子图$\langle E' \rangle$，$E'=\{1,4\}$，(d)为顶点诱导子图$\langle V' \rangle$，$V'=\{a,b,d\}$。



(a) G　(b) 生成子图　(c) 边诱导子图$\langle E' \rangle$　(d) 顶点诱导子图$\langle V' \rangle$

图 1.1.6

下面介绍一些子图的定义：

(1) 链

链是图中顶点及边的交错序列 $v_0 e_1 v_1 \cdots v_{k-1} e_k v_k$，开始于顶点 v_0，终止于顶点 v_k，并且链内的边 e_i 的端点为 v_{i-1} 及 v_i，$1 \leqslant i \leqslant k$。该链可称为 v_0-v_k 链，v_0 为链的始点，v_k为链的终点。链也可简单地表示成边列 $e_1 e_2 \cdots e_k$。

如果 $v_0 \neq v_k$，则该链称为开链。如 $v_0 = v_k$，则该链称为闭链。若链中的边不重复出现，则该链称为单纯链。如果除链的始点与终点外，链中的每个顶点的出现不超过一次，则链是初等的，否则是非初等的。显然初等链也是单纯的。例如图 1.1.7 中，边列 154326 为单纯开链，边列 543267 为单纯闭链，边列 1346 为初等开链，边列 234 为初等闭链。

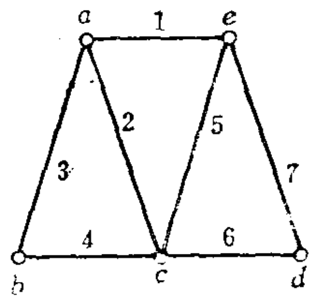


图 1.1.7

（2） 路

一条初等开链称为路。如果一条路含 n 个顶点，它有 $(n-1)$ 个边，则路长为 $(n-1)$，即路长为路中所含的边数。例如图 1.1.7 中边列 1346 为一条路，路长为 4。

利用路可定义图的连通性，若图 G 中存在两顶点之间无路，则图是分离的，否则是连通的。一个分离的图由数个连通分支（片）组成。例如图 1.1.5 是分离的，它由 3 片组成，而图 1.1.7 是连通的。

（3） 回路

一条初等的闭链称为回路。在回路中诸顶点的度均为2。例如图 1.1.7 中边列 234 是回路，而边列234675则不是回路。

如果一个子图其顶点的度为偶数，该子图称为广义回路（Circ）。例如图 1.1.7 中边列 234675 就是一个 Circ 子图。

§1.2 图的运算

为了进一步研究图中的子图，我们来定义图的运算，它

是按集合论中的一些基本运算规则来定义的。在这里，我们把两个图的运算仅限于边集运算。

(1) 并

两集合 S_1 与 S_2 的并记为 $S_1 \cup S_2$，有

$$S_1 \cup S_2 = \{x \mid x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2\}$$

因此两子图 G_1 与 G_2 的并记为 $G_1 \cup G_2$，它是由 G_1、G_2 中的边以及既在 G_1 又在 G_2 中的边构成的图。参看图1.2.1。

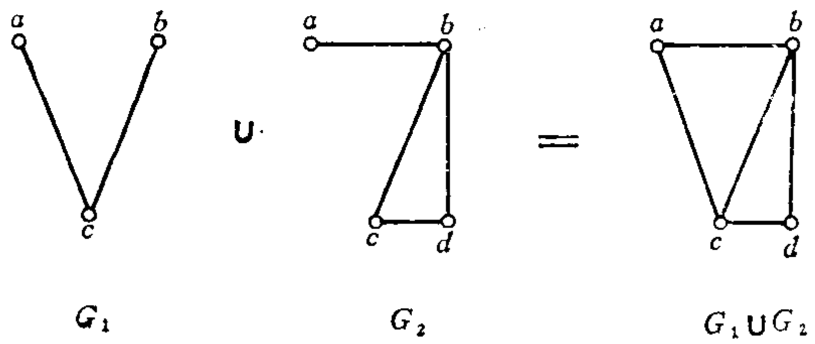


图 1.2.1

(2) 交

两集合 S_1 与 S_2 的交记为 $S_1 \cap S_2$，有

$$S_1 \cap S_2 = \{x \mid x \in S_1 \text{ 与 } x \in S_2\}$$

因此两子图 G_1 与 G_2 的交记为 $G_1 \cap G_2$，它是由二者的

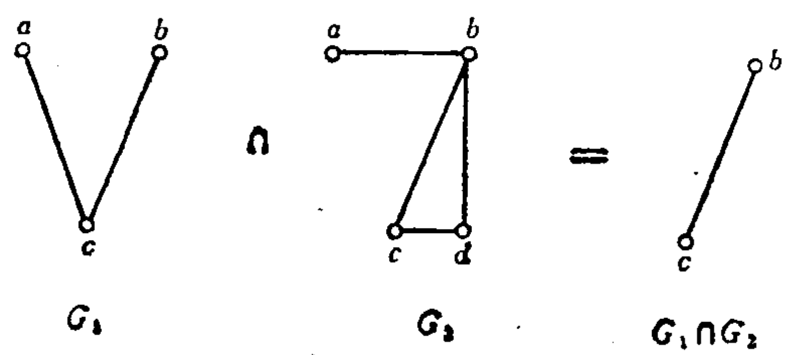


图 1.2.2

公共边构成的图。参看图 1.2.2。

如果两子图的交是空集，所得的图为空图，记为$\varnothing$，这两个子图称为非交的。

(3) 差

两集合 S_1 与 S_2 的差记为 S_1-S_2，有

$$S_1-S_2=\{x|x\in S_1,\ x\notin S_2\}$$

类似地，可定义 S_2-S_1。

因此子图 G_1-G_2(或 G_2-G_1)是由在 G_1(或 G_2)中的边而不在 G_2(或 G_1)中的边构成的子图。显然，$G_1-G_2\neq G_2-G_1$，参看图 1.2.3 。

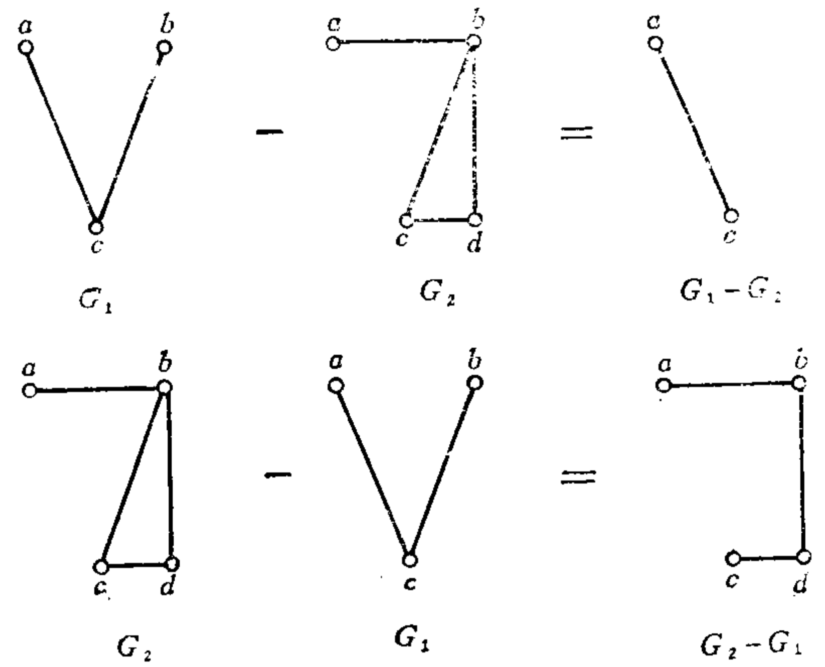


图 1.2.3

(4) 余

设集合 S 为集合 A 的子集，集 S 相对于 A 的余集 $\overline{S}$ 为

$$\overline{S}=A-S$$

因此图 G 的子图 G' 的余图 $\overline{G}'$ 是由在 G 中而又不在 G' 中的边构成的子图。参看图 1.2.4。

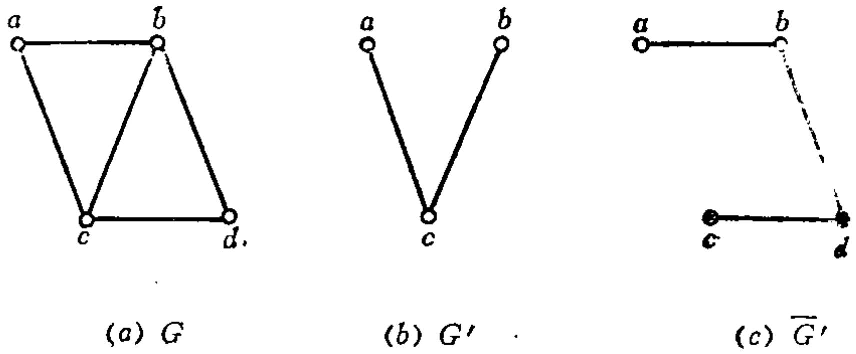


图　1.2.4

（5）环和

两集合 S_1 与 S_2 的环和 $S_1 \oplus S_2$ 定义为

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 &= (S_1 \cup S_2) - (S_1 \cap S_2) \\ &= (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1) \end{aligned}$$

因此两子图 G_1 与 G_2 的环和 $G_1 \oplus G_2$，是由属于 G_1 及 G_2 但不同时属于二者的边构成的子图，参看图 1.2.5 。

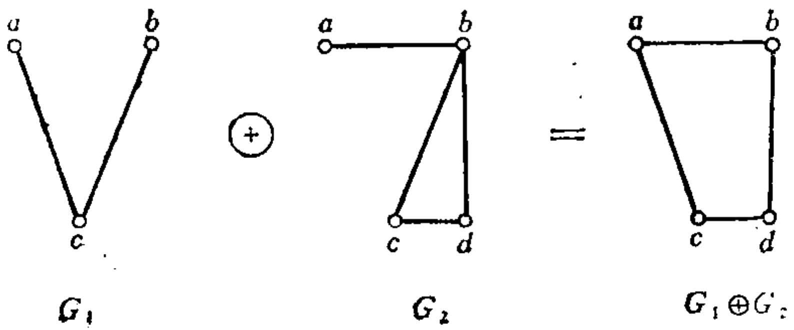


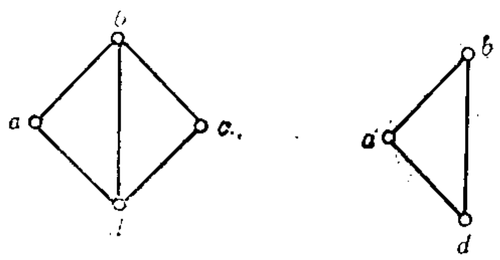
图　1.2.5

（6）去掉顶点

在图 G 中去掉顶点 v，意味着在图中去掉该顶点以及与该顶点关联的边，记为 $G-\{v\}$。参看图 1.2.6 。

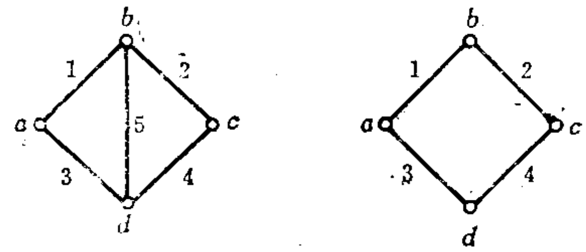
(7) 去掉边

在图 G 中去掉边 e，意味着在图中去掉该边，但保留边的端点，记为 $G-\{e\}$。参看图 1.2.7。



(a) G　　(b) $G-\{c\}$

图 1.2.6

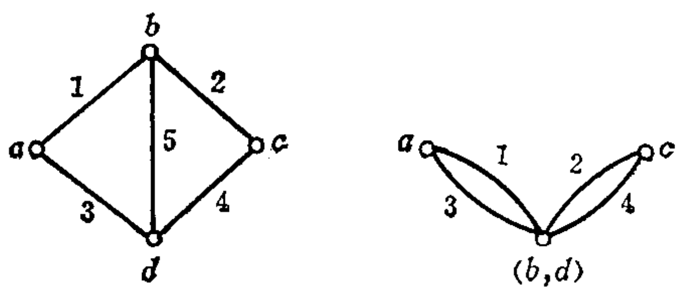


(a) G　　(b) $G-\{5\}$

图 1.2.7

(8) 收缩边

在图 G 中收缩边 e，意味着在图中去掉该边，并重合边 e 的两端点，记为 $G\ominus\{e\}$。参看图 1.2.8 。



(a) G　　(b) $G\ominus\{5\}$

图 1.2.8

§1.3 树、回路与割集

本节介绍电网络理论中常用的几个重要子图，并假定图 G 是连通的、无环的。

(1) 树

无回路的连通图称为树。孤立顶点称平凡树或枯树。我们用下述定理来刻划树的性质。

定理 1.3.1 对含 n 个顶点、m 个边的图 G，下列陈述是等价的：

(a) G 是树；

(b) G 中任两个顶点间仅有一条路；

(c) G 是连通的且 $m=n-1$；

(d) G 无回路且 $m=n-1$；

(e) G 无回路且 G 中任两个不相邻顶点用一个边连通时，仅出现一个回路。

证：

$a\Rightarrow b$，显然成立。

$b\Rightarrow c$，G 是连通的，仅需证明 $m=n-1$。采用归纳法，当 $n=1$，2 时的图 $m=n-1$ 成立，设少于 n 个顶点的图命题成立。现考查含 n 个顶点的图 G。设 e 为 G 中的任一边，则 $G-\{e\}$不连通且为两片，即 G_1 及 G_2，其顶点数与边数相应地为 n_1，m_1，n_2，m_2。

故

$$n=n_1+n_2$$

$$m=m_1+m_2+1$$

而 G_1、G_2 中任两顶点之间仅有一条路，由归纳法假定，有

$$m_1=n_1-1 \qquad m_2=n_2-1$$

故 $$m=n_1-1+n_2-1+1=n-1。$$

$c\Rightarrow d$，仅需证 G 无回路，若 G 含回路，可去掉若干个

边(设为 p 个边)后使 G 成为无回路的连通图，即树。这时

$$m-p=n-1$$

故 $p=0$，即 G 是无回路的。

$d\Rightarrow e$ 首先需证 G 是连通的。设 G 含 p 片，即 $G_1, G_2, \cdots, G_p$，片 G_i 对应的顶点数为 n_i，边数为 m_i，$i=1, 2, \cdots, p$。有

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_p$$

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_p$$

因 G 无回路，故每个连通片也无回路，即每片均为树，故有

$$m_i=n_i-1 \qquad 1\leqslant i\leqslant p$$

这时

$$m=\sum_{i=1}^{p} m_i=\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)=n-p$$

按假定 $m=n-1$，故 $p=1$。这表明：G 是连通的且无回路；G 是树，其任两顶点间仅有一条路，在不相邻的两顶点间加一边恰产生一个回路。

$e\Rightarrow a$，仅需证明 G 是连通的。若 G 不连通必分片，在不同片的顶点间加一边不会产生回路，这与已知条件矛盾，故 G 连通且无回路，$\cdot G$ 是树。 #

定理 1.3.2 在非平凡树中至少有两个悬挂点。

证 设 G 是非平凡树，则图中诸顶点的度 $d(v)\geqslant 1$，由公式(1.1.2)

$$\sum_{v\in V} d(v)=2m=2(n-1)=2n-2$$

由此推出图 G 至少有两个 1 度顶点，即悬挂点。 #

下面介绍连通图中的生成树、生成余树等概念。在具有