金牌奥校

AOLINPIKE

无　边主编

数学奥林匹克
模拟试卷精选

高中

中国少年儿童出版社

金牌奥校

无　边主编

数学奥林匹克
模拟试卷精选

高中

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克模拟试卷精选．高中／《金牌奥校》编写组编．－北京：中国少年儿童出版社，2000.12

（金牌奥校）

ISBN 7－5007－5526－0

Ⅰ．数…　Ⅱ．金…　Ⅲ．数学课－高中－习题　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 79073 号

数学奥林匹克模拟试卷精选·高中

作者：无边

中国少年儿童出版社 出版发行

责任编辑：余俊雄　惠玮

美术编辑：徐　欣

社址：北京东四十二条 21 号

邮政编码：100708

印刷：山东电子工业印刷厂

经销：新华书店

787×1092　1/16　10.75 印张　227 千字

2001 年 1 月北京第 1 版　2001 年 1 月山东第 1 次印刷

印数：1—20000 册

ISBN7－5007－5526－0/G·4318

（全三册）总定价:32.40 元　本册定价:10.80 元

编写说明

推进素质教育，培养创新能力，是当前我国教育改革的一个重大方向，并受到教育界的普遍重视和社会的广泛关注。多年的学科竞赛实践表明，合理地开展学科竞赛活动，是促进学校教育改革，提高学生学科素质的积极因素。

为了配合素质教育改革的形势需要，进一步推动学科竞赛活动的开展，我们依据统编教材，并按照我国学科竞赛大纲的规定，编写了这套《金牌奥校》丛书。希望能对中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力有所帮助，从而促进从知识型向能力型的转变。同时也希望能为广大同行在对学生实施素质教育的过程中提供一些参考。

《金牌奥校》丛书是数学、物理、化学等专业学会专家学者及奥校教练员、部分省市教研员，在认真分析了中学生应具备的各学科基础知识和基本技能的前提下，结合奥校智能训练实际情况编写而成的，本丛书有以下二个特色：

一、面向全体中学生

本丛书覆盖了中学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想。取材源于统编教材，但又不局限于课本，坚持“强化基础，适当提高，突出重点”的原则，对课本内容作了必要概括、合理变通和适应拓广。因此该套丛书可作为中高考复习资料。

二、照顾有兴趣特长的中学生

本套丛书设立了专题研究，对竞赛中的常见方法在理论和实践的基础上作了综合性研究，可培养深广的学科思维能力、学科思想方法和学科应用意识。因此本套丛书又可作为竞赛学习、培训的资料和教材。

本套丛书按年级和学科编写，并包括以下几个部分：奥林匹克教程、奥林匹克集训题精编、奥林匹克题典、奥林匹克模拟试卷。内容由易到难，由简入繁，讲练结合，编排科学合理。

本丛书是在统一规划下，根据详细的计划界定而由全体编委分工编写的。它是教学和科研的成果，是集体智慧的结晶。在编写和统稿的过程中，我们虽然注意博采众长，并力求有自己的风格，但由于水平有限，缺点和错误难免，诚恳地希望读者能提供宝贵意见和建议。

编　者

目　录

模拟试卷 1

一、选择题

1.若 $\cos\alpha\cdot\csc\alpha\sqrt{\sec^2\alpha-1}=-1$,则 α 的取值范围是(　　).

(A)第Ⅰ、Ⅲ象限　　(B)第Ⅲ、Ⅳ象限

(C)第Ⅱ、Ⅳ象限　　(D)第Ⅰ、Ⅳ象限

2.设 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数,且是偶函数.已知当 $x\in[2,3]$ 时,$f(x)=x$,则当 $x\in[-2,0]$ 时,$f(x)$ 的解析式是(　　).

(A) $f(x)=x+4$　　(B) $f(x)=2-x$

(C) $f(x)=3-|x+1|$　　(D) $f(x)=2+|x+1|$

3.设双曲线的左右焦点是 F_1,F_2,左右顶点是 M,N,若 $\triangle PF_1F_2$ 的顶点 P 在双曲线上,则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与边 F_1F_2 的切点位置是(　　).

(A)在线段 MN 内部

(B)在线段 F_1M 内部或线段 NF_2 内部

(C)点 N 或点 M

(D)不能确定的

4.点集 $\{(x,y)\mid \lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\}$ 中元素的个数为(　　).

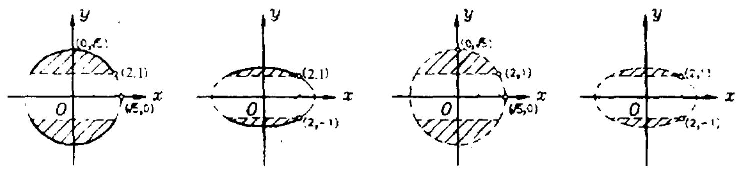
(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)多于 2

5.设非零复数 x,y 满足 $x^2+xy+y^2=0$,则代数式 $(\frac{x}{x+y})^{1990}+(\frac{y}{x+y})^{1990}$ 的值是(　　).

(A) 2^{-1989}　　(B) -1

(C)1　　(D)以上答案都不对

6.已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 通过点(2,1),则所有这些椭圆上满足 $|y|>1$ 的点的集合用阴影表示是下面图中的(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

二、填空题

1.设 n 为自然数，a、b 为正实数，且满足 $a+b=2$，则 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$ 的最小值是________.

2.设 $A(2,0)$ 为平面上的一定点，$P(\sin(2t-60°),\cos(2t-60°))$ 为动点，则当 t 由 $15°$ 变到 $45°$ 时，线段 AP 所扫过的图形的面积是________.

3.设 n 是自然数，对任意实数 x,y,z 恒有 $(x^2+y^2+z^2)\leqslant n(x^4+y^4+z^4)$ 成立，则 n 的最小值是________.

4.在坐标平面上，横坐标和纵坐标均为整数的点称为整点，对任意自然数 n，连结原点 O 与点 $A_n(n,n+3)$，用 $f(n)$ 表示线段 OA_n 上除端点外的整点个数，则
$f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)=$________.

5.设 $n=1990$，则 $\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1988}-3^{995}C_n^{1990})=$________.

6.8 个女孩和 25 个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩，那么，共有________种不同的排列方法(只要把圈旋转一下就重合的排法认为是相同的).

三、解答题

1.四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P，设三角形 ABP、BCP、CDP 和 DAP 的外接圆圆心分别是 O_1,O_2,O_3,O_4.求证：OP,O_1O_3,O_2O_4 三直线共点.

2.设 $E=\{1,2,3\cdots,200\}$，$G=\{a_1,a_2,a_3\cdots a_{100}\}\subset E$，且 G 具有下列两条性质：

（Ⅰ）对任何 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant 100$，恒有 $a_i+a_j\neq 201$；

（Ⅱ）$\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=10080$.

试证：G 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 G 中所有数字的平方和为一个定数.

3.某市有 n 所中学，第 i 所中学派出 C_i 名学生（$1\leqslant C_i\leqslant 39,1\leqslant i\leqslant n$）来到体育馆观看球赛，全部学生总数为 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i=1990$. 看台上每一横排有 199 个座位. 要求同一学校的学生必须坐在同一横排. 问体育馆最少要安排多少个横排才能够保证全部学生都能坐下？

模拟试卷 2

一、选择题

1. 由一个正方体的三个顶点所能构成的正三角形的个数为(　　).

(A)4　　(B)8　　(C)12　　(D)24

2. 设 a,b,c 均为非零复数,且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$,则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值为(　　).

(A)1　　(B)$\pm\omega$　　(C)$1,\omega,\omega^2$　　(D)$1,-\omega,-\omega^2$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 设 a 为正整数,$a<100$. 并且 a^3+23 能被 24 整除,那么,这样的 a 的个数为(　　).

(A)4　　(B)5　　(C)9　　(D)10

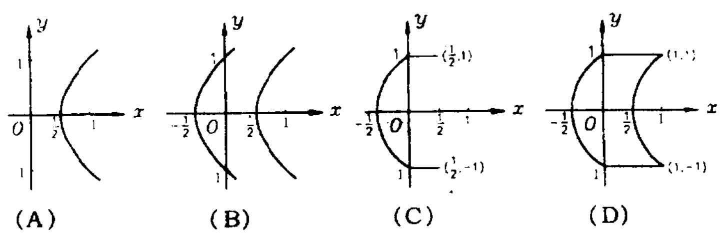
4. 设函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f(3+x)=f(3-x)$,且方程 $f(x)=0$ 恰有 6 个不同的实根,则这 6 个实根的和为(　　).

(A)18　　(B)12　　(C)9　　(D)0

5. 设 $S=\{(x,y)\mid x^2-y^2=\text{奇数},x,y\in R\}$,$T=\{(x,y)\mid \sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2),x,y\in R\}$. 则(　　).

(A)$S\subset T$　　(B)$T\subset S$　　(C)$S=T$　　(D)$S\cap T=\varnothing$

6. 方程 $|x-y^2|=1-|x|$ 的图象为(　　).



二、填空题

1. $\cos^2 10°+\cos^2 50°-\sin 40°\sin 80°=$ ________.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知三个角 A,B,C 成等差数列,假设它们所对的边分别为 a,b,c,并且 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h,则 $\sin\frac{C-A}{2}=$ ________.

3.将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$由小到大按第 n 组有$(2n-1)$个奇数进行分组：

$\underset{(第一组)}{\{1\}},\underset{(第二组)}{\{3,5,7\}},\underset{(第三组)}{\{9,11,13,15,17\}},\cdots\cdots$则 1991 位于第________组中.

4.1991^{2000}除以 10^6,余数是________.

5.设复数 z_1,z_2 满足$|z_1|=|z_1+z_2|=3,|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$,则 $\log_2|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=$________.

6.设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$,现对 M 的任一非空子集 X,令 a_X 表示 X 中最大数与最小数之和,那么,所有这样的 a_x 的算术平均值为________.

三、解答题

1.设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在 S 中,且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列.求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列).

2.设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 1,求证在它的边上(包括顶点)或内部可以找出四个点,使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

3.设 a_n 为下述自然数N 的个数:N 的各位数字之和为n 且每位数字只能取 1,3,或 4,求证:a_{2n}是完全平方数,这里 $n=1,2,\cdots\cdots$.

模拟试卷 3

一、选择题

1.对于每个自然数 n,抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n,B_n 两点,以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离,则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{1992}B_{1992}|$ 的值是(　　).

(A)$\frac{1991}{1992}$　　(B)$\frac{1992}{1993}$

(C)$\frac{1991}{1993}$　　(D)$\frac{1993}{1992}$

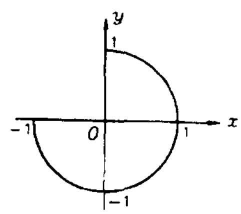
2.已知如图 1 的曲线是以原点为圆心,1 为半径的圆的一部分,则这一曲线的方程是(　　).

(A)$(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$

(B)$(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(C)$(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(D)$(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$



3.设四面体四个面的面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4,它们的最大值为 S,记 $\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i}{S}$,则 λ 一定满足(　　).

(A)$2<\lambda\leqslant4$　　(B)$3<\lambda<4$

(C)$2.5<\lambda\leqslant4.5$　　(D)$3.5<\lambda<5.5$

4.在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别记为 $a,b,c(b\neq1)$,且$\frac{C}{A},\frac{\sin B}{\sin A}$都是方程 $\log_{\sqrt{b}}x=\log_b(4x-4)$的根,则$\triangle ABC$(　　).

(A)是等腰三角形,但不是直角三角形

(B)是直角三角形,但不是等腰三角形

(C)是等腰直角三角形

(D)不是等腰三角形,也不是直角三角形

5. 设复数 z_1, z_2 在复平面上的对应点分别为 A, B,且 $|z_1|=4, 4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$. O 为坐标原点,则 $\triangle OAB$ 的面积为(　　).

(A) $8\sqrt{3}$　　(B) $4\sqrt{3}$

(C) $6\sqrt{3}$　　(D) $12\sqrt{3}$

6. 设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数,且满足下列关系:

$f(10+x)=f(10-x)$.

$f(20-x)=-f(20+x)$.

则 $f(x)$ 是(　　).

(A)偶函数,又是周期函数

(B)偶函数,但不是周期函数

(C)奇函数,又是周期函数

(D)奇函数,但不是周期函数

二、填空题

1. 设 x, y, z 是实数, $3x, 4y, 5z$ 成等比数列,且 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 成等差数列,则 $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$ 的值是________.

2. 在区间 $[0, \pi]$ 中,三角方程 $\cos 7x=\cos 5x$ 的解的个数是________.

3. 从正方体的棱和各个面上的对角线中选出 k 条,使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线,则 k 的最大值是________.

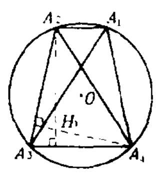
4. 设 z_1, z_2 都是复数,且 $|z_1|=3, |z_2|=5, |z_1+z_2|=7$,则 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ 的值是________.

5. 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 满足 $a_1=a_2=1, a_3=2$,且对任何自然数 n,都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$,又 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_1+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的值是________.

6. 函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值是________.

三、解答题

1. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为 $\odot O$ 的内接四边形, H_1, H_2, H_3, H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证: H_1, H_2, H_3, H_4 四点在同一个圆上,并定出该圆的圆心位置.



2. 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集,把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1)求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2)求证:当 $n\geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.

(3)当 $n\geqslant 3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

3. 在平面直角坐标系中,横坐标和纵坐标都是整数的点称为格点,任意 6 个格点 $P_i(x_i,y_i)$,$(i=1,2,3,4,5,6)$满足:

(1)$|x_i|\leqslant 2,|y_i|\leqslant 2,(i=1,2,3,4,5,6)$;

(2)任何三点不在同一条直线上.

试证:在以 $P_i(i=1,2,3,4,5,6)$为顶点的所有三角形中,必有一个三角形,它的面积不大于 2.

模拟试卷 4

一、选择题

1.若 $M=\{(x,y)\mid |tg\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid |x^2+y^2|\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是(　　).

(A)4　　(B)5　　(C)8　　(D)9

2.已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$，($a,b$ 为实数)且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$的值是(　　)

(A)-5　　(B)-3

(C)3　　(D)随 a,b 取不同值而取不同值

3.集合 A,B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B)与(B,A)视为不同的对，则这样的(A,B)对的个数有(　　).

(A)8　　(B)9　　(C)26　　(D)27

4.若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 $C:(x-\arcsin\alpha)(x-\arccos\alpha)+(y-\arcsin\alpha)(y+\arccos\alpha)=0$，所截得的弦长为 d，当 α 变化时 d 的最小值是(　　).

(A)$\frac{\pi}{4}$　　(B)$\frac{\pi}{3}$　　(C)$\frac{\pi}{2}$　　(D)π

5.在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边边长分别是 a,b,c，若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$的值是(　　)

(A)1　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)-1

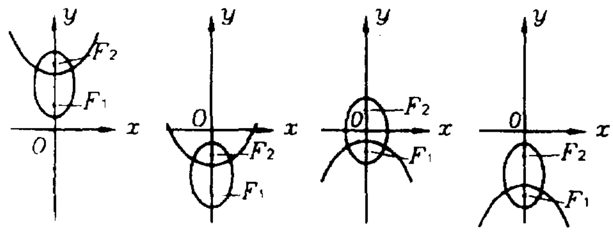
6.设 m,n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程

$$|z+ni|+|z-mi|=n \quad ①$$

与

$$|z+ni|-|z-mi|=-m \quad ②$$

在同一复平面内的图形(F_1,F_2 为焦点)是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

二、填空题

1.二次方程

$(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$（$i$ 为虚数单位，$\lambda\in R$）有两个虚根的充分必要条件是 λ 的取值范围为________.

2.实数 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则$\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}$的值为________.

3.若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\frac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，则 z 的值是________.

4.整数$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末尾两位数字是________（先写十位数字，后写个位数字；其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数）.

5.设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$，要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993>k\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立，则 k 的最大值是________.

6.三位数(100,101,…,999)共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片打印一个三位数，有的卡片所印的，倒过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861（1 倒过来看仍视为 1）；有的卡片则不然，如 531 倒过来看是 ıƐϛ，因此，有些卡片可以一卡二用，于是至多可以打印________张卡片.

三、解答题

1.设一凸四边形 $ABCD$，它的内角中仅有$\angle D$是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成 n 个钝角三角形，但除去 A,B,C,D 外，在该凸四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点. 试证 n 应满足的充分必要条件是 $n\geqslant4$.

2.设 A 是一个有 n 个元素的集合,A 的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含,试证:

(Ⅰ)$\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$;　　(Ⅱ)$\sum\limits_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$.

其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数,$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数.

3.水平直线 m 通过圆 O 的中心,直线 $l\perp m$,l 与 m 相交于 M,点 M 在圆心的右侧,直线 l 上不同的三点 A,B,C 在圆外,且位于直线 m 上方,A 点离 M 点最远,C 点离 M 点最近,AP,BQ,CR 为圆 O 的三条切线,P,Q,R 为切点,试证:

(1)l 与圆 O 相切时,$AB\cdot CR+BC\cdot AP=AC\cdot BQ$;

(2)l 与圆 O 相交时,$AB\cdot CR+BC\cdot AP<AC\cdot BQ$;

(3)l 与圆 O 相离时,$AB\cdot CR+BC\cdot AP>AC\cdot BQ$.

模拟试卷 5

一、选择题

1.设 a、b、c 是实数,那么对任何实数 x,不等式

$$a\sin x + b\cos x + c > 0$$

都成立的充分必要条件是(　　)

(A)a、b 同时为 0,且 $c>0$　　(B)$\sqrt{a^2+b^2}=c$

(C)$\sqrt{a^2+b^2}<c$　　(D)$\sqrt{a^2+b^2}>c$

2.给出下列两个命题:

(1)设 a、b、c 都是复数,如果 $a^2+b^2>c^2$,则 $a^2+b^2-c^2>0$.

(2)设 a、b、c 都是复数,如果 $a^2+b^2-c^2>0$,则 $a^2+b^2>c^2$.那么下述说法正确的是(　　).

(A)命题(1)正确,命题(2)也正确　　(B)命题(1)正确,命题(2)错误

(C)命题(1)错误,命题(2)也错误　　(D)命题(1)错误,命题(2)正确

3.已知数列$\{a_n\}$满足 $3a_{n+1}+a_n=4(n\geqslant 1)$,且 $a_1=9$,其前 n 项之和为S,则满足不等式$|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$的最小整数 n 是(　　).

(A)5　　(B)6　　(C)7　　(D)8

4.已知 $0<b<1, 0<a<\frac{\pi}{4}$,则下列三数:$x=(\sin\alpha)^{\log_b \sin\alpha}$,$y=(\cos\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$,$z=(\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$大小关系是(　　).

(A)$x<z<y$　　(B)$y<z<x$　　(C)$z<x<y$　　(D)$x<y<z$

5.在正 n 棱锥中,相邻两侧面所成的二面角的取值范围是(　　).

(A)$(\frac{n-2}{n}\pi,\pi)$　　(B)$(\frac{n-1}{n}\pi,\pi)$

(C)$(0,\frac{\pi}{2})$　　(D)$(\frac{n-2}{n}\pi,\frac{n-1}{n}\pi)$

6.在平面直角坐标系中,方程

$\frac{|x+y|}{2a}+\frac{|x-y|}{2b}=1$($a$、$b$ 为不相等的两个正数)所代表的曲线是(　　).

(A)三角形　　(B)正方形

(C)非正方形的长方形　　(D)非正方形的菱形