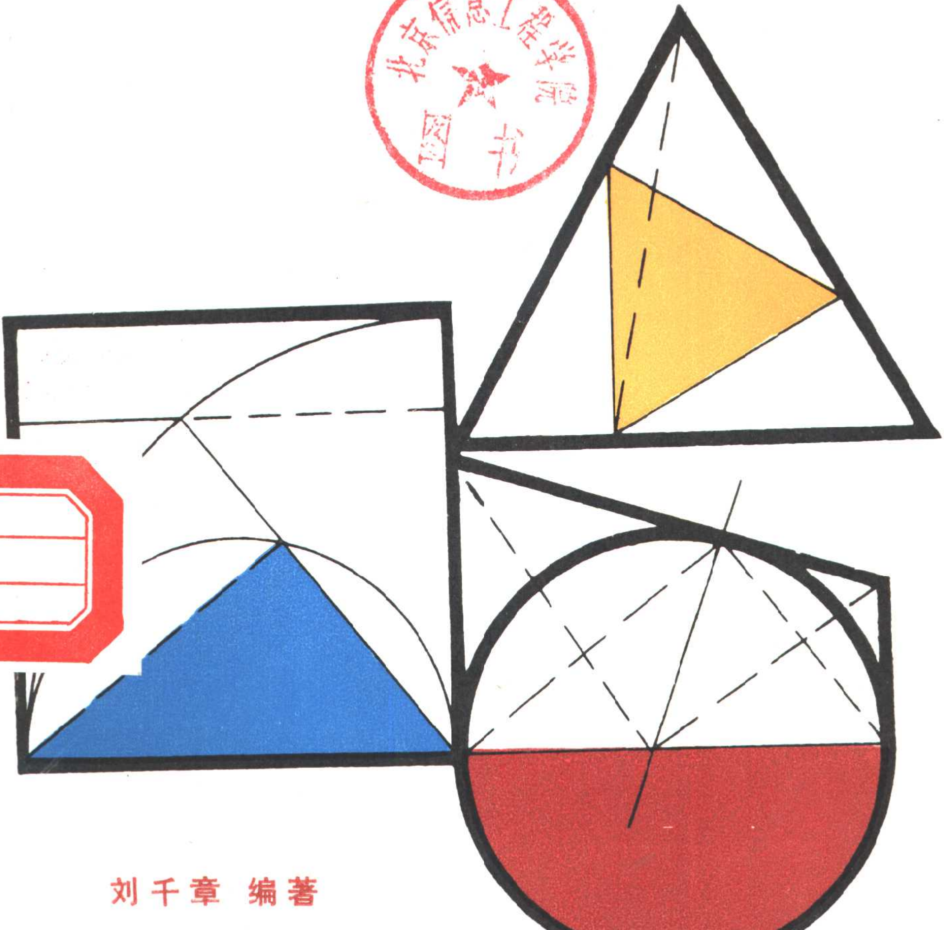
巧添辅助线



刘千章 编著

科学出版社

巧添辅助线

刘千章 编著

科学出版社

内 容 简 介

解几何题的难点之一是如何添加辅助线。若辅助线引得巧妙，则已知条件与结论的关系一目了然，难题亦迎刃而解；若引得不适当，不是事倍功半走弯路，就是劳而无功做不出。本书总结了求解几何题时添加辅助线的一般规律，并通过丰富的实例讲述了如何添加辅助线的思路，使读者可以举一反三，提高解题能力。每章后面附有一定数量的练习题（书末有答案可供参考）。

本书通俗易懂、切合初学者的要求；习题类型较全，有助于提高解几何题的能力。

该书可供自学青年及在职干部培训用。

巧 添 辅 助 线

刘 千 章 编 著

责任编辑 徐一帆

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年6月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1986年6月第一次印刷　印张：6 1/2

印数：0001—15,500　字数：145,000

统一书号：13031·3196

本社书号：4871·13—1

定价：1.25 元

前　言

人们在演证平面几何习题时，为了沟通已知条件与结论之间的联系，常常要借助于辅助线．那么，怎样添加辅助线呢？

关于添线方法，没有1＋1＝2这样的必然步骤，但人们通过大量的证题实践，还是积累了一些行之有效的经验，归纳起来大体上可分为以下三类：

第一类：从题目的已知条件出发；

第二类：从图形的性质出发；

第三类：从欲用定理出发．

之所以分为三类，是为了使初学者学习时易于掌握．实际上，这三类并无严格的界限，只是从不同的角度来看罢了．本书将逐类举例予以说明．

添设辅助圆，本书把它单列为一类，目的是引起人们的重视．

对于添加辅助线的方法的总结，一般教科书上不能集中予以归纳．但是，正在自学平面几何的学员，对此确很需要．为了给他们创造有利的条件，我们编写了《巧添辅助线》一书，献给为四化而刻苦学习的自学青年、业余学校学员和为指导他们学习而辛勤劳动的园丁．

由于添加辅助线在几何证题中有着很重要的作用，因此，对于添线规律的探讨已引起人们的普遍注意．我们编写这本小册子正是为了抛砖引玉，我们热切希望有更多的作者，写出水平更高的专著，以满足读者之需．

完稿以后，为确保书的质量，陈景亮同志逐题逐图、逐字逐句地进行了演算、核对；陈伟侯同志审稿后提出了重要的修改意见，在此顺致谢意！但终因水平所限，本书在构思、选题及解答中，难免有差错存在，诚恳希望读者批评、指正。

编　者

85年元月

目　　录

一、根据已知条件添辅助线

在证明平面几何习题时，一般都从题目的已知条件出发，经过推理论证，最终得出题目的结论．这里，已知条件是证明几何习题的基础．因此，根据已知条件来添设辅助线，正是人们经常运用的一种解题方法．在这一章里，我们将详尽讨论这种添线方法．

§1.1 延长已知的中线

当题目的已知条件中有三角形的中线时，常常将已知的中线延长一倍，其目的是利用全等三角形或平行四边形的性质，从而变换原图中某些角或某些线段的位置，使相关的、分散的条件得以集中，以便沟通已知条件与题目结论之间的联系．

〔**例1**〕求证：三角形一边的中线小于其它两边的和的一半．

已知：在$\triangle ABC$中，$DB=DC$．

求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

证明：如图1-1，延长AD到E，使$DE=AD$，连结BE．

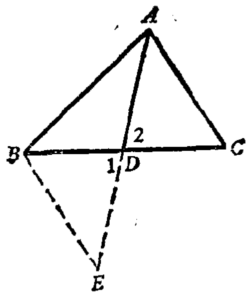


图 1-1

$\because$ $DB=DC$，

$\angle 1=\angle 2$，

$AD=DE$，

则 $\triangle ADC\cong\triangle BDE\Rightarrow BE=AC$．

在$\triangle ABE$中，

$\because$ $AB+BE>AE$（三角形两边之和大于第三边），

$\therefore$ $AB+AC>2AD$.

即 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$．

本题延长中线以后，通过全等三角形对应边相等的性质，将原图中的线段AC变换至BE的位置，从而将相关线段AB、AC、AD集中于$\triangle ABE$中，最后利用“三角形两边之和大于第三边”这条定理，使本题得以解决。

〔**例2**〕 求证：三角形三条中线的和小于这个三角形的周长而大于这个三角形周长的四分之三.

已知：在$\triangle ABC$中，AD、BE、CF是三条中线.

求证：$AB+BC+AC>AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$．

证明：如图1-2，延长AD到G，使$DG=AD$，

连结BG.

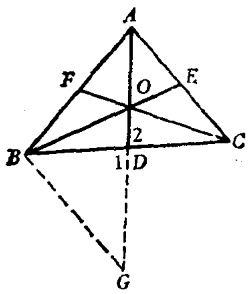


图 1-2

由例1知

$AB+AC>2AD$,

$AC+BC>2CF$,

$AB+BC>2BE$.

三式相加，得

$AB+AC+BC>AD+CF+BE$.

在$\triangle OBC$中，$OB+OC>BC$.

$\because$ O是$\triangle ABC$的重心，

则 $\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}CF>BC$.

同理 $\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}AD>AB$，$\frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}CF>AC$.

三式相加，得

$$AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC).$$

综上，得

$$AB+AC+BC>AD+CF+BE>\frac{3}{4}(AB+BC+AC).$$

〔**例3**〕 如图1-3，PA为圆的切线，PCB为任一割线，M为AC中点，PM交AB于D。求证：

$$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{BD}{AD}.$$

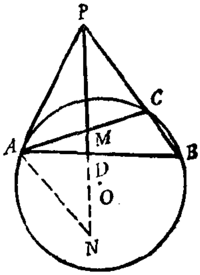


图 1-3

思路：利用切割线定理，得

$$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{PB\cdot PC}{PC^2}=\frac{PB}{PC}.$$

将此式与求证的结论$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{BD}{AD}$比较，只要再证出$\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{AD}$就可以了，而这一步正是解决本题的关键．怎样突破这个关键呢？这个题目给出了两个已知条件，其中PA为圆的切线已经用上了，而另一个条件，M为AC中点还没有用上，为了使关键的一步得以解决，就要设法用上这第二个条件．由于M是AC的中点，则PM是$\triangle PAC$的中线，试将PM延长一倍至N，根据全等三角形对应边相等的性质，PC转化成AN，且$PC\parallel AN$，于是有$PB:AN=BD:AD$.

证明：如图1-3，延长PD至N，使$MN=PM$，连结AN.

则 $\triangle PMC\cong\triangle AMN\Rightarrow PC=AN.$ ①

又 $PC \parallel AN \Rightarrow \frac{PB}{AN}=\frac{BD}{AD}$. ②

∵ PA切$\odot O$于A

则 $\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{PB \cdot PC}{PC^2}=\frac{PB}{PC}$. ③

由①、②、③式，得

$$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{BD}{AD}.$$

〔**例4**〕 如图1-4，在△ABC中，$AB>AC$，P为中线AD上任意一点．求证：$AB-AC>PB-PC$.

思路：要证明$AB-AC>PB-PC$，只要得出一条线段m，使$m=AB-AC$，且$m>PB-PC$；或者能得到一条线段n，使$n=PB-PC$且$n<AB-AC$．因$AB>AC$，只要在AB上截取$AE=AC$，则BE就是m了．于是要证明$AB-AC>PB-PC$，只要证得$BE>PB-PC$．若连结PE，则$PB-PE<BE$．因而只要证得$PB-PC\le PB-PE$．这样就必须证得$PC\ge PE$．要证明$PC=PE$，又须证得△APC≌△APE．由于△ABC为任意三角形，P为中线AD上的任一点，$\angle CAP \neq \angle EAP$，△$APC$与△$APE$就不可能全等，也就是$PC=PE$是不可能的．现在只能研究$PC>PE$的关系．根据两个三角形边角之间的关系，要证得$PC>PE$，就须证得$\angle PAC>\angle PAE$，但要证明$\angle PAC>\angle PAE$，只要延长$AD$到$F$，使$DF=AD$，连结$FC$，则$CF=AB$，因为$AB>AC$，所以$CF>AC$．于是可得$\angle FAC>\angle AFC$，但

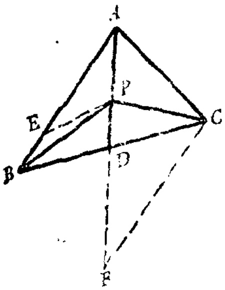


图 1-4

$\angle AFC=\angle BAD$，$\angle PAC>\angle PAE$的关系可得，因而本题的结论$AB-AC>PB-PC$可得.

证明：延长AD至F，使$DF=AD$，连结FC.

$\because$ $\angle ADB=\angle FDC$，

则 $\triangle ABD\cong\triangle FDC$，$AB=FC$，$\angle BAD=\angle DFC$.

$\because AB>AC$，

$\therefore FC>AC$，$\angle FAC>\angle AFC$，即$\angle DAC>\angle DAB$.

在AB上取$AE=AC$，连结EP.

在$\triangle AEP$及$\triangle ACP$中，

$\because$ $AE=AC$，AP公用，$\angle PAE<\angle PAC$.

则 $EP<CP$.

故 $BP-PC<BP-EP$.

但在$\triangle BEP$中，$BE>BP-EP$，

则 $BE>BP-PC$，

又 $AB-AC=BE$，

$\therefore AB-AC>PB-PC$.

§1.2 作已知弦的弦心距

在解有关圆的问题中，当题目的已知条件里有已知弦时，常作出已知弦的弦心距，目的是利用垂径定理，以便扩大思路使题目得证.

〔**例5**〕 如图1-5，直角三角形两直角边AC长8厘米，CB长15厘米，以C为圆心，CA为半径画弧交斜边于D. 求AD的长.

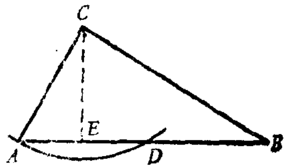


图 1-5

思路：因为$\triangle ABC$为直

角三角形，且两条直角边AC、CB的长已知，所以根据勾股定理，易求出斜边AB的长．AD是斜边AB的一部分，而它们之间又没有量的关系，因此，不添加辅助线，要想直接求出AD的长是不可能的．为了添出合理的辅助线，还是先从分析已知条件入手，“以C为圆心，CA为半径画弧交斜边于D”是本题的已知条件，对于这个条件我们不妨引伸一步，若将此弧所在的圆画出，AD便成了此圆的一条弦．作出弦心距AE，则根据垂径定理，垂足E将欲求线段AD平分，这样只要求出AE的长就可以了，AE的长可利用射影定理求得．

解： 从C作$CE\perp AD$于E．

则　$AE=ED$（垂径定理）．

$\because$　$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$CB=15$，

则　$AB=\sqrt{8^2+15^2}=17$．（勾股定理）

$\because$　$\angle ACB=90°$，$CE\perp AD$，

则　$AC^2=AB\cdot AE$（射影定理）

$$\Rightarrow AE=\frac{AC^2}{AB}=\frac{64}{17}.$$

$$\therefore\quad AD=2\cdot AE=\frac{64}{17}\times 2=7\frac{9}{17}.$$

答：AD长$7\frac{9}{17}$厘米．

〔**例6**〕一条弦与一条直径成45°角．试证：弦被直径所分两线段的平方和等于该圆半径平方的两倍．

已知：如图1-6，AB是$\odot O$的直径，半径长为R，弦CD交AB于P，$\angle APC$为45°．

求证：$PC^2+PD^2=2R^2$．

证明： 从O作$OE\perp CD$于E，则$\angle EPO=\angle EOP=45°$

$\Rightarrow OE=PE$.

由垂径定理，知

$$CE=DE,$$

于是$PC^2+PD^2=(CE-PE)^2+(DE+PE)^2$

$=CE^2-2CE\cdot PE+PE^2$

$+DE^2+2DE\cdot PE+PE^2$

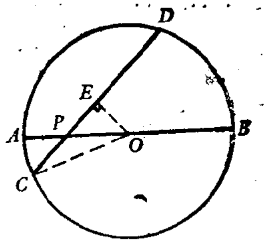


图 1-6

又 $OE=PE$，$CE=DE$，

$\therefore$ $PC^2+PD^2=2CE^2+2OE^2=2(CE^2+OE^2)$.

连结OC，则$OC=R$.

在Rt$\triangle OCE$中，根据勾股定理，知

$$CE^2+OE^2=OC^2=R^2.$$

$\therefore$ $PC^2+PD^2=2R^2$.

在证明这个题目时，我们从求证的左端PC^2+PD^2入手，进行了几次恒等变形．为了顺利地推出右端，先后应用了垂径定理及勾股定理，而弦心距OE的作出，正是为了应用这两条定理提供必要的条件．即弦心距OE作出以后，应用垂径定理得到$CE=DE$，使PC^2+PD^2进行了第一次变形；弦心距OE作出以后，得到直角三角形OEC，从而为应用勾股定理推出本题结论提供了条件．而这些条件只靠原题的已知是不行的，由于作弦心距为辅助线，才扩大了本题证明的思路．因此，在解决圆中有关证明题和计算题时，添出弦心距是一种常见的辅助线．

§1.3 作已知直径上的圆周角

在解有关圆的问题中，当题目的已知条件中有直径时，常作出直径上的圆周角，目的是利用“直径上的圆周角等于

90°”这一性质，将原题中直径这一条件转化成直角，以便利用直角三角形的性质辅以证明。

〔例7〕D为⊙O外一点，DA切⊙O于A，AB是⊙O的直径，DB连线交⊙O于C，F为AD上任意一点，BF连线交⊙O于E。求证：$BE\cdot BF=BC\cdot BD$。

思路：如图1-7。因为DA是⊙O的切线，AB是⊙O的直径，所以根据切线的性质，易知$BA\perp AD$，即$\triangle ABF$与$\triangle ABD$均为直角三角形。又E、C分别为两直角三角形斜边上的点，欲证四条线段BE、BF、BC、BD分别位于两直角三角形的斜边上，若AE、AC连线能各与BF、BD垂直（即AE、AC分别为斜边上的高）时，$BE\cdot BF$及$BC\cdot BD$便可利用射影定理进行转化。由于AB是⊙O的直径，所以$AE\perp BF$及$AC\perp BD$可通过“直径上的圆周角等于90°”这一性质而得到。

证明：连结AC、AE。

∵ AB为⊙O的直径，

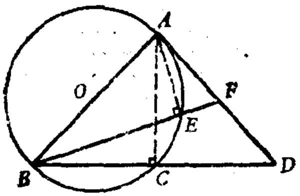


图 1-7

则 $\angle ACB=90°$。

即 $AC\perp BD$。

又 AD切⊙O于A，

则 $\angle BAD=90°$。

即 $\triangle BAD$为直角三角形。

根据射影定理，得

$BC\cdot BD=AB^2$。

同理，在Rt$\triangle ABF$中，有

$BE\cdot BF=AB^2$。

∴ $BE\cdot BF=BC\cdot BD$.

〔例8〕 如图1－8，AB为$\odot O$直径，弦AD、BC相交于E。求证：$AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2$.

思路：这个题目的证明，一般从较复杂的求证左端入手，设法将$AE \cdot AD$与$BE \cdot BC$进行转化．由于AB是$\odot O$的直径，连结BD、AC以后，$\angle C$与$\angle D$均为直角．则$\triangle ACB$与$\triangle ADB$均为直角三角形．但$AE \cdot AD$与$BE \cdot BC$这欲证四线段没有位于直角三角形的斜边上，而是分别位于直角边上，因此使它们转化应用射影定理是不行的，要转化还应再添辅助线．若从E点引AB的垂线EF，易知B、D、E、F与A、C、E、F分别共圆，这样可根据圆幂定理将$AE \cdot AD$与$BE \cdot BC$进行转化．

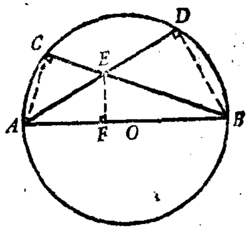


图 1-8

证明：从E作$EF \perp AB$于F，连结AC、BD．

∵ AB是$\odot O$的直径，

则 $\angle C = 90°$，$\angle D = 90°$，

故 A、C、E、F共圆，

B、D、E、F共圆．

由圆幂定理，得

$$AE \cdot AD = AF \cdot AB \quad ①$$

$$BE \cdot BC = BF \cdot AB \quad ②$$

①＋②，得

$$\begin{aligned} AE \cdot AD + BE \cdot BC &= AF \cdot AB + BF \cdot AB \\ &= (AF + BF) \cdot AB \\ &= AB \cdot AB \\ &= AB^2, \end{aligned}$$

即 $AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2$.

从以上两例的分析与证明可知：当题目的已知条件中给出直径时，就暗示有直角这个间接条件的存在，只要作出直

径上的圆周角，使可使暗示条件出现，从而扩大证明思路.

§ 1.4 连结已知切点和圆心

在解有关圆的问题时，当题目的已知条件中有圆的切线时，常把圆心和切点（即过切点的半径）连结起来为辅助线，目的是利用切线的性质，得到垂直关系；或是利用弦切角定理得两个角相等的关系，从而为证明提供出新的条件.

〔例9〕 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径作$\odot O$交BC于D，过D点作$\odot O$的切线，交AC于M.
求证：$DM\perp AC$.

思路：这个题目要证明$DM\perp AC$，即要证明两线垂直.对于这类问题，一般应设法找到这个欲证的结论与已知条件中的垂直（或直角）的关系，然后以已知条件为依据，推出本题的结论.但是，这个题目的已知条件中既无垂直也无直角.为了使其垂直或得到直角，就要设法通过添加辅助线，使已知条件得到转化而间接推出.由于已知条件中有“DM与$\odot O$相切”这一条件，根据“过切点的半径垂直于切线”这一性质，连结圆心O与切点D以后，即得$OD\perp DM$，这样就为推出本题的结论$DM\perp AC$制造了一个关键的条件.若再能证出$OD\parallel AC$.则本题即可得证.

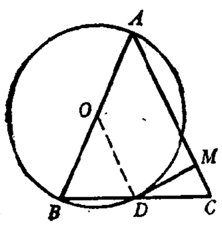


图 1-9

证明：如图1-9，连结OD.

$\because$ DM切$\odot O$于D.

则 $DM\perp OD$.

$\because$ $AB=AC$,