数学分析

下册

高等学校试用教材

数 学 分 析

下 册

东北师范大学　延　边　大　学
四平师范学院　内蒙民族师范学院　数学系合编

高等教育出版社

本书是以吉林师范大学、四平师范学院、延边大学、内蒙民族师范学院数学系合编的《数学分析讲义》(校际交流,未公开出版)为基础,根据高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会1980年审订的高等师范院校数学分析教学大纲修订成的。大纲中的选学内容,除编者认为应作基本内容的编入外,其余选学内容没有编写在内。

本书分两册。下册共十章,主要内容为无穷级数,广义积分与含参变量积分,多元函数微积分的基本理论及应用。可作高等师范院校和师范专科学校数学系学生的试用教材或教学参考书。

本书由高等学校理科数学、力学教材编审委员会委托刘世伟、金圣一同志初审,并由董延闿编委复审。

高等学校试用教材

数学分析

下册

东北师范大学 延边大学 四平师范学院 内蒙民族师范学院 数学系合编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.75 字数 378,000

1983年4月第1版 1983年9月第1次印刷

印数 00,001—13,500

书号 13010·0864 定价 1.85 元

目　　录

第十一章 无穷级数

在中学数学中，我们已经学习了无限循环小数，其中已隐含着无穷级数的概念．例如，无限循环小数

$$0.\dot{2}=0.2222\cdots$$

是如下无穷多个数的“和”：

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\cdots+\frac{2}{10^n}+\cdots.$$

又如，在物理学中，为了研究一个复杂的波 $f(t)$，就必须设法把 $f(t)$分解为无穷多个简单谐波的“和”：

$$f(t)=A_0+A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+\cdots+A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)+\cdots$$

上式的右边是无穷多个函数相“加”．

所谓无穷级数就是无穷多个数（或函数）的和的形式．有限个数（或函数）的和的含义读者是十分清楚的，而无穷多个数（或函数）的“和”的含义是什么？还是一个有待研究的问题．我们将利用有限可以向无限转化的辩证关系，通过对有限和求极限的方法，定义无穷多个数（或函数）的“和”．无穷级数是人们认识客观事物的数量关系的一个重要工具，用它能表示许多重要的非初等函数．另外，许多常用的数表：平方根表、立方根表、对数表、三角函数表以及一些函数数值表等等，它们都可通过把相应的函数表示成无穷级数，然后再作近似计算来编制．正如恩格斯在自然辩证法中所指出：“把某个确定的数，例如把一个二项式，化为无穷级数，即化为某种不确定的东西，从常识来说，这是荒谬的举动．但是，如果没有无穷级数和二项定理，那我们能走多远呢？”① 总之，无

① 恩格斯，自然辩证法，人民出版社，1971 年 8 月第 1 版，241 页

穷级数是研究函数的一个重要工具，而且在大量实用科学中有很多应用.

无穷级数可分为数项级数与函数项级数两大类，本章将研究它们的最基本的理论.

§11.1 基本概念

一、基本概念

设给定了一个无穷数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_n,\ \cdots. \tag{11.1}$$

将这些数用加号联接起来，记作

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{11.2}$$

称为**无穷数项级数**(或简称**级数**),(11.1)中各数称为级数的**项**,而 a_n 称为**通项**.

无穷数项级数(11.2)的前 n 项之和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n,$$

称为级数的**前 n 项部分和**. 级数的部分和组成一个数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots. \tag{11.3}$$

若当 $n\to\infty$时,S_n 趋向于一个有限的极限 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称无穷数项级数(11.2)**收敛**，并且有**和数** S,记作

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \quad 或 \quad S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

而将

$$r_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \tag{11.4}$$

称为无穷数项级数(11.2)的余和.

若 S_n 没有有限极限或极限不存在，称无穷数项级数 (11.2) 发散.

例 1 考察公比为 r 的几何级数(又称等比级数)

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+\cdots, a\neq 0$$

的收敛性与发散性.

解 它的前 n 项部分和为

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

由于 $rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$，两式相减有

$$(1-r)S_n=a(1-r^n).$$

当 $r\neq 1$ 时，有
$$S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

若 $|r|<1$，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r},$$

即几何级数收敛， 其和 $S=\frac{a}{1-r}$.

当 $|r|>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n|=\infty$，故几何级数发散.

当 $r=1$ 时，$S_n=a+a+\cdots+a=na$， 也有 $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n|=\infty$，故几何级数发散.

当 $r=-1$ 时，几何级数为

$$a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n=\begin{cases}a, & \text{当 } n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\cdots)\text{时},\\ 0, & \text{当 } n=2k \quad (k=1,2,3,\cdots)\text{时},\end{cases}$$

故几何级数发散.

综上所述，若几何级数之公比 r 的绝对值 $|r|<1$ 时，则几何级数收敛，若 $|r|\geqslant 1$ 时，则几何级数发散.

借助几何级数，任何一个无限循环小数都可化为分数. 例如，

将无限循环小数 $0.\dot{2}$ 表示为几何级数

$$0.\dot{2}=\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\cdots+\frac{2}{10^n}+\cdots,$$

它的和等于$\frac{2}{9}$，即 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$.

再例如，无限循环小数 $0.3\dot{4}\dot{6}$ 可改写成

$$0.3\dot{4}\dot{6}=\frac{3}{10}+\left(\frac{46}{1000}+\frac{46}{100000}+\cdots+\frac{46}{10^{2n+1}}+\cdots\right),$$

等式右端括号内是一个首项为 $a=\frac{46}{1000}$，公比 $r=\frac{1}{10^2}$ 的几何级数，从而

$$0.3\dot{4}\dot{6}=\frac{3}{10}+\frac{\frac{46}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{46}{1000}\cdot\frac{100}{99}=\frac{343}{990}.$$

例 2 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的敛散性.

解 由于$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，故

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

从而

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

即级数收敛，其和为 1.

二、级数的收敛性与数列的极限

从级数的收敛定义可知，级数（11.2）的收敛性及其和的问

题，实质上就是它的部分和数列(11.3)的极限存在性及其极限的问题．反过来，若先给出数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,S_n,\cdots$$

令 $a_1=S_1, a_2=S_2-S_1,\cdots,a_n=S_n-S_{n-1},\cdots$，则级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

的前 n 项部分和

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=S_n$$

恰好是数列 $\{S_n\}$ 的第 n 项．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且和为 S，则 S 也就是数列 $\{S_n\}$ 的极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$．这就是说，数列的极限问题与级数的收敛性问题是可以互相转化的．因此，只要我们证明了关于数列的某个命题，即可得到级数的相应命题．反之亦然．

但这里要强调指出，虽然数列极限与级数收敛性有这种关系，不要认为研究级数是多此一举！事实上，给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和 S_n 一般是不易求出的，而且用级数这种形式研究一些问题往往有更方便之处，因而级数理论远不是数列极限理论的简单重复，而有自己崭新的内容．

习　　题

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$．

§11.2　基 本 性 质

利用数列的极限理论不难得到级数的下面几个基本性质：

性质 1 若级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.2}$$

收敛，并且有和 S，则每项乘以常数 c 所得级数

$$ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n+\cdots \tag{11.5}$$

也收敛，并且它的和就等于 cS.

证明 级数(11.2)的前 n 项部分和为

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

级数(11.5)的前 n 项部分和为

$$\overline{S}_n=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n=cS_n.$$

因为级数(11.2)收敛，并且有和 S，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

所以级数(11.5)收敛，并且有和 cS. 证毕.

性质 2 若级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots, \tag{11.2}$$

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots \tag{11.6}$$

都收敛，并且它们的和分别为 S,T，则级数

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots \tag{11.7}$$

也收敛，且和为 $S\pm T$.

证明 设级数(11.2)及(11.6) 的前 n 项部分和分别为 S_n 及 T_n，则级数(11.7)前 n 项的部分和为 $S_n\pm T_n$，且有

$$\lim_{n\to\infty}(S_n\pm T_n)=S\pm T,$$

即级数(11.7)收敛，且它的和为 $S\pm T$. 证毕.

性质 3 级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.2}$$

收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证明 设收敛级数(11.2)的前 n 项部分和及前 $n-1$ 项部分和分别为 S_n, S_{n-1}，那末

$$a_n=S_n-S_{n-1},$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

证毕.

这个性质表明：如果级数收敛，那么它的通项必趋于0. 换句话说，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定是发散的. 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以它是发散的. 注意，这个定理仅能用来判别某些级数的发散性，这是由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件，也就是说，有的级数虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，但它却是发散的. 例如**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

它的部分和数列 $\{S_n\}=\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\}$ 是发散的①，从而调和级数发散. 可是，却有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

性质 4 改变级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.2}$$

有限项的值，不影响级数(11.2)的收敛性或发散性.

---

① 见§2.6例2.

证明 设级数(11.2)收敛. 现改变其前k项的值后，得到级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_k+a_{k+1}+\cdots+a_n+\cdots \tag{11.8}$$

显然，级数(11.8)恰是收敛级数

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_k-a_k)+0+\cdots+0+\cdots$$

与收敛级数(11.2)逐项相加而成的，由性质2知，级数(11.8)也收敛.

若级数(11.2)发散，则级数(11.8)也必发散. 事实上，若级数(11.8)收敛，将它逐项减去上述所构造的收敛级数，则得级数(11.2)，由性质2知，级数(11.2)也将是收敛的. 这与假定矛盾. 证毕.

下面给出判定级数(11.2)的收敛性的一般条件. 因为级数(11.2)的收敛性与数列(11.3)存在极限是相当的，所以，只需把数列$\{S_n\}$的收敛准则改写成适用于级数的收敛准则.

性质5 **（柯西收敛准则）** 级数(11.2)收敛的充分必要条件是：对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在自然数N，使得当$n>N$时，对于任意的$m=1,2,\cdots$，恒有

$$|S_{n+m}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon.$$

这个准则表明，级数(11.2)收敛的充分必要条件是：这个级数充分远的任意片段$\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}a_k$可以任意小.

显然，性质3和性质4是柯西收敛准则的简单推论，这留给读者自行证明.

上面所研究的级数基本性质，对讨论级数的收敛性及其求和都是非常重要的. 但是，必须指出：从定义出发直接计算$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，然后再断定级数的收敛性，这种方法往往是行不通的，这是由于S_n的结构可能非常复杂，求其极限远非容易的事. 另外，用级数

解决实际问题时，往往并不需要求出级数和的精确值，而只要判断级数是收敛的，然后根据实际需要的精确度，取足够多的项，用部分和 S_n 近似代替 S 就行了．因此，不直接从定义出发研究级数的敛散性是非常重要的．尽管上面给出了判定级数收敛的一般准则，可是实际问题中应用这个准则往往也很困难，所以有必要建立一些用起来比较方便的判别法则．

下面几节将从级数各项的结构特征建立一些常用的敛散性判别法．首先从一类简单而重要的级数开始，建立敛散性判别法．

习　题

1．研究下列级数的收敛或发散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(n-1)\pi$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0.001)^{\frac{1}{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

§11.3　同号级数

定义　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 各项都是正的，即 $a_n>0(n=1, 2, \cdots)$，则称为**正项级数**.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 各项都是负的，即 $a_n<0(n=1,2,3,\cdots)$，则称为**负项级数**.

由级数的基本性质 1，负项级数可以化为正项级数来研究．因此，我们只研究正项级数．

对正项级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots(a_n>0),\tag{11.9}$$

我们来考虑它的部分和数列$\{S_n\}$，因为$a_{n+1}>0$，所以

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}>S_n,$$

于是，部分和数列$\{S_n\}$是一个单调递增数列. 因而有

定理 11.1 （正项级数收敛原理）正项级数(11.9)收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

证明 必要性 设级数(11.9)收敛，则部分和数列$\{S_n\}$有极限S，因而$\{S_n\}$必有上界.

充分性 设部分和数列$\{S_n\}$有上界M，因此，$\{S_n\}$是递增有上界M的数列. 于是，S_n的极限存在，即级数(11.9)收敛. 证毕.

所有正项级数收敛(或发散)的判别法，都是直接地或间接地根据这条定理得到的.

例 1 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$的敛散性.

解 若$a<1$，则$\frac{1}{1+a^n}\to 1(n\to\infty)$. 不满足级数收敛的必要条件，故级数发散. 显然，当$a=1$时，由于同样理由也发散.

当$a>1$时，因为$\frac{1}{1+a^n}<\left(\frac{1}{a}\right)^n(n=1,2,\cdots)$，所以，对于任何$n\geqslant 1$，都有

$$S_n<\left(\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{\frac{1}{a}-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{a}}<\frac{1}{a-1},$$

即S_n有界. 于是，给定的级数收敛.

例 2 研究“p级数”$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性.

1°. 当$p=1$时为调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，故发散.

2°. 当 $p<1$ 时，因为$\frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}$，所以

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

由于调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散于无穷大，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p<1)$部分和数列 S_n 无上界；根据定理 11.1 知，所给级数是发散的.

3° 当 $p>1$ 时，因为

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&<1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}\right)\\&\quad+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{2^{kp}}+\cdots+\frac{1}{2^{kp}}\right)}^{2^k}+\cdots\\&=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^2+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^3\\&\quad+\cdots+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]^k+\cdots\\&=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}=\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1},\end{aligned}$$

即对于任意的n，皆有$S_n<\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$，所以，部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增有上界. 根据定理 11.1，当 $p>1$ 时，p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$是收敛的.

上面两个例子所采用的办法很有启发性，经常被用来判断某些级数的敛散性. 这个办法可以一般地叙述如下：

定理 11.2 （比较原则） 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，