

高等学校教学参考书

# 有源滤波器

北方交通大学电信系编

人民铁道出版社

高等学校教学参考书

# 有源滤波器

北方交通大学电信系编

人民铁道出版社

1979年·北京

## 内 容 简 介

本书对有源滤波器从基本理论与实用两方面进行论述。全书共分八章，前三章是传递函数，其中第一章对传递函数理论作一般概括复习，第二、三章是幅度近似和相移近似；四至八章属于电路部分，其中第四章是运算放大器，第五章是灵敏度，第六章是用单一放大器实现基本节，第七章是模拟计算机式滤波器和模拟电路的一般介绍，第八章是有源均衡器。

参加本书编写工作的有王文煊、张世演、王淑欣、藉义忠等同志。全书由杜锡钰教授审阅。

高等学校教学参考书

### 有源滤波器

北方交通大学电信系编

人民铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$  印张：24.25 字数：584千

1979年10月第1版 1979年10月第1次印刷

印数：0001—9,000册

统一书号：15043·4058 定价：2.50元

# 目 录

绪论	1
<b>第一章 传递函数</b>	<b>4</b>
1.1 复频率和复平面	4
1.1.1 复频率	4
1.1.2 用复频率代表网络特性	6
1.1.3 利用复频率概念计算网络特性	8
1.2 利用网络函数的 $0-\infty$ 点分布, 由向量法求网络特性的举例	9
1.3 由零极点分布用折线(波特)法求网络特性	14
1.3.1 $P_k$ 为负实单根的情况	15
1.3.2 一对共轭复根的情况	17
1.4 网络函数的一般形式与特点	20
1.4.1 从电路归纳网络函数的形式与特点	20
1.4.2 关于1.4.1节特性(5)的一般证明	23
1.5 常用的二阶传递函数	24
1.5.1 二阶传递函数的典型表示式	24
1.5.2 二阶低通传递函数	27
1.5.3 二阶高通传递函数	28
1.5.4 二阶带阻传递函数	29
1.5.5 具有传递零点(衰减峰)的二阶低通传递函数	29
1.5.6 二阶全通传递函数	30
<b>第二章 传递函数的幅度近似问题</b>	<b>32</b>
2.1 引言	32
2.2 最平幅度近似	34
2.2.1 最平幅度传递函数模值平方表示式	34
2.2.2 由传递函数模值平方求传递函数 $T(s)$	36
2.2.3 最平幅度传递函数的振幅频率特性	40
2.2.4 最平幅度传递函数的相移特性(迟延特性)	42
2.2.5 单位阶跃及单位冲激响应	44
2.3 依 $\Omega = b$ 点的最平幅度近似	46
2.3.1 依 $\Omega = b$ 点的最平幅度近似的传递函数	46
2.3.2 $n$ 为偶数时传递函数的极点	50
2.3.3 $n$ 为奇数时传递函数的极点	52
2.4 通带特性等波纹近似	54
2.4.1 契比雪夫多项式	54

2.4.2 通带等波纹衰减滤波器的传递函数	57
2.4.3 契比雪夫低通滤波器的衰减特性	64
2.5 阻带等波纹幅度近似 (反契比雪夫近似)	67
2.5.1 传递函数	67
2.5.2 反契比雪夫滤波器的特征函数	68
2.5.3 阻带等波纹近似的衰减	68
2.6 通带、阻带等波纹近似	70
2.6.1 特征函数的公式和曲线	70
2.6.2 满足通阻带等波动的微分方程	73
2.6.3 解 $C_e(n)$ 求 $n \frac{K'}{K} = \frac{K'_L}{K_L}$	74
2.6.4 $A_{max}$ 、 $A_{min}$ 、 $k$ 和 $n$ 的关系式	76
2.6.5 求 $\Omega_0$ 及 $\Omega_s$ 的表示式	78
2.6.6 求电压反传递函数 $V_{20}/V_2$	82
2.7 勒让德 (Legendre) 滤波器	87
<b>第三章 线性相移滤波器</b>	<b>91</b>
3.1 相移和群延迟	91
3.1.1 群延迟	91
3.1.2 群延迟-衰减间的关系	91
3.2 通带最平延迟的传递函数	92
3.3 高斯幅度近似	99
3.4 常值群延迟的契比雪夫近似	103
3.4.1 平行于 $j\omega$ 轴一列极点的延迟特性	103
3.4.2 契比雪夫线性相移近似	105
3.5 高斯-契比雪夫过渡滤波器	111
3.6 布德华兹-汤姆逊过渡型滤波器	115
3.7 最平延迟, 等波纹衰减滤波器	119
3.7.1 $\xi$ 为虚数时, 显示等波纹特性的函数 $G(\xi)$	120
3.7.2 确定奇阶传递函数	122
3.7.3 确定偶阶传递函数	123
3.8 算术对称带通滤波器	128
3.9 算术对称带通滤波器特征函数的公式	133
3.9.1 对称性的分析	134
3.9.2 一阶对称	134
3.9.3 二阶对称	138
3.9.4 通带等波纹近似	139
3.9.5 举例	140
<b>第四章 运算放大器</b>	<b>145</b>
4.1 运算放大器的理想特性和它的应用	145
4.1.1 运算放大器的理想特性	145
4.1.2 数学运算基本节	146

4.1.3 运算放大器在有源滤波器中的应用 .....	151
4.2 运算放大器电路分析 .....	153
4.2.1 组件运算放大器构成的程式和特点 .....	153
4.2.2 线性组件电路中常用的单元电路介绍 .....	155
4.2.3 线性组件电路举例 .....	169
4.3 线性组件技术指标的意义和它们的测试方法 .....	172
4.4 电路特性的调节与补偿 .....	176
4.4.1 零点调整问题 .....	176
4.4.2 相位补偿问题 .....	178
<b>第五章 灵敏度</b> .....	186
5.1 $\omega$ 和 $Q$ 的灵敏度 .....	186
5.2 多个参数产生的偏差 .....	188
5.3 增益和相位灵敏度 .....	192
5.4 影响增益灵敏度的因素 .....	194
5.4.1 关于近似函数所造成的偏差 .....	194
5.4.2 电路的选择 .....	197
5.4.3 元件种类的挑选 .....	197
<b>第六章 用单一放大器实现基本节</b> .....	203
6.1 概述 .....	203
6.2 一阶基本节 .....	206
6.3 二阶无源基本节 .....	207
6.3.1 二阶无源 $RLC$ 低通电路 .....	207
6.3.2 无源 $RC$ 电路 .....	208
6.3.3 $RC$ 双 $T$ 电路 .....	208
6.4 单端正反馈电路 .....	211
6.4.1 单端正反馈电路的拓扑图 .....	211
6.4.2 单端正反馈低通滤波器 .....	212
6.4.3 单端正反馈高通滤波器 .....	223
6.4.4 单端正反馈带通电路 .....	225
6.5 单端负反馈滤波器 .....	228
6.5.1 负反馈的拓扑电路 .....	228
6.5.2 放大倍数为 $-K$ 的电压负反馈二阶低通电路 .....	229
6.6 用具有相同极点的两个网络实现放大倍数为 $-K$ 的负反馈二阶传递函数 .....	231
6.6.1 一般电路 .....	231
6.6.2 由两个网络实现的单端负反馈 ( $-K$ ) 低通电路 .....	233
6.6.3 由两个网络实现的单端负反馈高通电路 .....	234
6.6.4 由两个网络实现的单端负反馈带通电路 .....	236
6.7 无限增益多端负反馈滤波器 .....	238
6.7.1 无限增益多端负反馈滤波器的一般电路 .....	238
6.7.2 无限增益多端负反馈低通电路 .....	239

6.7.3 无限增益多端负反馈高通电路	241
6.7.4 无限增益多端负反馈带通电路	243
6.8 用负反馈电路实现有限频率的零点	244
6.8.1 由多端负反馈带通实现其它各种滤波器的方法	244
6.8.2 在负反馈拓扑中用正反馈的戴利扬尼斯电路	247
6.8.3 富润德双二次型	249
6.9 由具有负载网络的潜在对称双 $T$ 的正反馈电路	251
6.10 零极点可分别控制的滤波器	253
6.10.1 电路的普遍形式	253
6.10.2 零极点能分别控制的低通滤波器	255
6.10.3 传递函数零极点能分别控制的高通电路	258
6.11 实现有限频率零点的勃克特电路	260
6.11.1 $y_3 = 0$ 的二阶电路	260
6.11.2 勃克特三阶电路	263
6.12 由正反馈一般双 $T$ 负载电路导出的各种滤波电路	267
6.12.1 电路的一般结构形式及其传递函数	267
6.12.2 $y_3 = 0$ 的特殊情况 $\omega_0 \geq \omega_x$ 的陷波电路	267
6.12.3 $\omega_0 \leq \omega_x$ 的陷波电路	268
6.12.4 零点在无限时的低通	269
6.12.5 零点为零时的高通滤波器	270
6.12.6 零点在零频和无限频的带通滤波器	270
6.13 带通与低通的频率变换式及设计举例	271
6.13.1 对一阶低通的传递函数的变换	271
6.13.2 对二阶低通的传递函数的变换	272
6.14 用高低通设计带通滤波器举例	276
6.15 设计有源滤波器时应当考虑的问题	287
6.15.1 各种电路的比较	287
6.15.2 电路元件的使用	288
6.15.3 放大器性能对滤波特性的影响	288
<b>第七章 以模拟计算机或状态变量为基础的滤波器</b>	<b>291</b>
7.1 引言	291
7.1.1 信号流图理论	291
7.1.2 模拟计算机式滤波器中应用的积木单元式电路	294
7.1.3 一些简单的模拟计算机式滤波器举例	296
7.2 从给定的 $RLC$ 网络直接导出模拟计算机式滤波器	300
7.2.1 最少电容元件的电路和简单高通的模拟	300
7.2.2 从没有互感的正则的 $RLC$ 梯形电路导出滤波器	301
7.2.3 由一般的 $RLCM$ 滤波器节推导出模拟电路	304
7.3 从给定的传递函数直接综合成模拟计算机式滤波器	306
7.3.1 直接对传递函数进行综合	306

7.3.2 一般 $n$ 阶传递函数 .....	309
7.4 双二次型电路 .....	310
7.4.1 双二次型电路的构成 .....	310
7.4.2 双二次型的电路元件 .....	312
7.4.3 电路的调整 .....	314
7.4.4 电路的灵敏度 .....	315
7.4.5 双二阶传递函数的退化电路 .....	316
7.4.6 设计方法 .....	319
7.4.7 设计举例 .....	320
7.4.8 开关和多函数双二次型 .....	321
7.5 前馈双二次型或三个运算放大器的双二次型 .....	322
7.5.1 一个通用双二次型 .....	322
7.5.2 双二次型低通滤波器 .....	325
7.5.3 双二次型高通滤波器 .....	326
7.5.4 双二次型带通滤波器 .....	326
7.5.5 双二次型带阻滤波器 .....	327
7.5.6 双二次型全通滤波器 .....	327
7.6 基于正反馈的模拟计算机近似全通环式滤波器 .....	328
<b>第八章 均衡器</b> .....	<b>337</b>
8.1 有源幅度均衡器的电路 .....	337
8.2 调节频率特性斜率的有源可变均衡器 .....	339
8.2.1 增益可变的均衡器 .....	339
8.2.2 有源可变假线 .....	343
8.2.3 能调斜率正负的有源可变均衡器 .....	344
8.3 可调衰减的有源均衡器 .....	345
8.4 迟延均衡器 .....	348
8.4.1 全通函数及迟延特性 .....	348
8.4.2 有源二阶迟延均衡器的基本电路 .....	353
8.5 可变迟延均衡器 .....	358
8.5.1 第一种电路 .....	358
8.5.2 第二种电路 .....	360
8.5.3 第三种电路 .....	360
<b>附 录</b> .....	<b>364</b>
附录 I 实际运算放大器对有源滤波器的影响 .....	364
附录 II 随机变数的平均值和标准偏差 .....	377



## 绪 论

随着通信和电子技术的发展,滤波器的理论和应用也发展很快,为了满足不同场合的要求,产生了很多类型的滤波器,如 $LC$ 滤波器是最早发现的也是到现在为止最常见的一种滤波器。它的主要缺点是体积大、 $Q$ 值低,在较低频率时,电感电容数值、体积、重量和价格等方面可能超出实用的要求。特别是现代通信设备都向着小型化发展,大部分晶体管、电阻、电容都将为半导体集成电路和薄膜集成电路所代替的时候,如何去掉电感线圈,做成无感滤波器,这是从事这方面工作者所共同关心的问题。就无感滤波器来说,已有晶体滤波器,陶瓷滤波器,机械滤波器,琐相环以及 $RC$ 有源滤波器等等。这些无感滤波器,除 $RC$ 有源滤波器外,其它只能做成带通滤波器。而且所有滤波器,包括 $LC$ 滤波器在内,并不是在所有频率内都很好,或在所有频率内都不如其他的好,而是各有各自的适用范围。

$RC$ 有源滤波器的适用范围是最大 $Q$ 值小于1000,频率小于1MHz的滤波器。

$RC$ 有源滤波器的历史,最早可追溯到1938年斯科特(Scott)的选择放大器<sup>[1]</sup>,但是直到1954年林威尔(Linville)才真正做出第一个有源滤波器<sup>[2]</sup>,从这时起才开始了有源滤波器的大量研究工作,尤其在1965年运算放大器问世以后,更是一日千里,文献之多,种类之广,实难一一概括。但就使用的有源元件来说可分为以下三类,即负阻抗变换器、回转器和反馈放大器。到现在为止,应用最多的是放大器型,本书也只限于介绍放大器型。为了使读者对发展过程有所了解,下面将这三种类型作简要的叙述。

### (1) 负阻抗变换器型 $RC$ 有源滤波器

在变换器的传输矩阵中, $B=C=0$ ,因此当终端负载为 $Z_L$ 时它的输入阻抗 $Z_i=(A/D)Z_L$ 。当 $A=-K_1$ 、 $D=\frac{1}{K_2}$ 时称电压负变的阻抗变换器,当 $A=K_1$ 、 $D=-1/K_2$ 时称电流负变的阻抗变换器,在两种情况下, $Z_i=-K_1K_2Z_L$ ,统称负阻抗变换器(NIC)。1954年林威尔(Linville)首先提出用它可综合有源滤波器,实际上也是为设计有源滤波器第一个被研究的器件。此后数年中,有关有源滤波器的文献几乎都属于负阻抗变换器型。但是由于它对元件的灵敏度很高,因此近些年已放弃使它做为设计有源滤波器的器件。

### (2) 回转器型

如果传输矩阵中, $A=D=0$ ,则负载为 $Z_L$ 的输入阻抗 $Z_i=(B/CZ_L)$ ,即输入阻抗为负载阻抗的倒量,所以叫倒量器。如果 $B=1/g$ 、 $C=g_2$ ,这里 $g$ 叫回转导纳,则倒量器叫理想回转器,其输入阻抗 $Z_i=1/(g_1g_2Z_L)$ 。如果接地后理想回转器的负载为 $Z_L=\frac{1}{pC}$ ,则理想回转器的输入阻抗 $Z_i=pC/g_1g_2$ ,即模拟一个接地电感 $L_{eq}=C/g_1g_2$ 。用两个接地理想回转器和一个接地电容器可以模拟一个不接地的电感。回转器早在1948年就被泰里根(Tellegen)提出,但是一直到十五年以后山诺(Shenoi)才发表实现回转器的一些实际结果<sup>[3]</sup>,直到奥查德(Orchard)<sup>[4]</sup>证明无源 $LC$ 滤波器(也就是电容器负载的滤波器)在灵敏度方面比其它型式的滤波器都好以前,它还是作为一个有源网络元件而存在。如果说负阻抗变换器在当初被估价过高了,则回转器当初被估价过低了,至少现在用于实现回转器的努力比负阻抗变换器多些了。但是它能否做成集成电路的商品或仍退回到它原先只在理论

上感兴趣的地位, 则还是一个问题, 这是因回转器需要量较少, 比不上到处要用的运算放大器, 要把它集成为单片电路, 势必成本很高。除掉不经济这一主要缺点外, 还有它的回转电导与频率有关, 在高频时发生 $Q$ 谐振等一些缺点。而且对回转器说来克服这些缺点的动力被运算放大器减小了, 因为用运算放大器可以做成很好的有源网络。只有音频范围回转器还具有唯一的特长, 因为频率再高, 无论在大小价格稳定等方面它都不如无源滤波器。但在频率很低时, 也可用运算放大器来做成回转器。

### (3) 采用反馈放大器的有源滤波器

许多文献中把这类滤波器称为采用运算放大器的有源滤波器。由上面介绍已知, 回转器以及负阻变换器都可用运算放大器来构成, 为了区别, 这里定名为采用反馈放大器的有源滤波器。

1938年斯科特提出的选频放大器就是反馈放大器型滤波器的开端。利用这个概念将传递函数分解为二阶传递函数的乘积, 再把每个二阶传递函数用一个反馈放大器来实现, 这就是1955年赛伦-凯 (Sallen-Key) 提出的所谓电压控制压源 (VCVS) 滤波器, 但这种电路 $Q$ 值灵敏度高, 只适用于低 $Q$ 电路, 因此又出现多端反馈式滤波器, 以及用多个放大器来实现一个二阶函数的滤波器等等, 种类繁多, 以致在一本书中难以一一列举。现在所说 $RC$ 有源滤波器一般地都是指放大器式的有源滤波器, 它的最大优点是设计简便、实现容易, 而且不要求阻抗匹配, 因此每节的阻抗水平可以不一样, 因而可任选适当的元件值。但是放大器式滤波器成功的主要原因, 在于单片集成技术的进步, 高放大倍数的运算放大器, 它的输入阻抗可认为无限大, 输出阻抗可认为零, 不但能做很好放大器, 很好的级间隔离而且很容易组成各种运算电路。自从1965年以商品形式问世以后, 产量品种日益增多, 价格日益下降。国外已有在单片上集成四个运算放大器的商品, 每个放大器的成本就更低, 以致可以不考虑运算放大器的个数问题, 从而为了实现一个双二阶函数可以使用三、四个放大器, 这种滤波器设计容易、调整简单和性能良好, 而且可以多用。此外为了小型化的需要, 目前混合集成的滤波器已用于一些机器, 体积重量都大为缩小。

正如以上所述,  $RC$ 有源滤波器的设计制作过程主要是下面两步, 第一步是根据给定要求, 找出对应的近似传递函数, 并将传递函数分解为二阶因数的乘积, 然后第二步是把每一个二阶函数由一个 $RC$ 有源滤波器电路来实现, 这就是有源滤波器的基本节。将各个基本节级联起来, 便得总的特性。因此有源滤波器应包括两部分主要内容, 一是近似函数, 二是实现电路。正因为现代通信对滤波器的性能要求愈来愈高, 因此这两部分内容都非常丰富, 限于篇幅, 我们只能提及必要的内容。

本书对有源滤波器从基本理论与实用两方面进行论述, 可作为高等学校电信网络研究生及通信专业高年级学生选修课教材, 也可作为通信方面工程技术人员及大专院校教师参考。

本书在编写过程中参考了近年来国外发表有关这方面的书籍及文献, 从理论分析, 公式推导, 电路选择及设计图表数据的汇集等等都作了比较与选择, 为便于读者进一步学习的需要, 本书有关章节都注明参考书籍及文献。

全书共分八章。前三章是传递函数, 其中第一章是对传递函数理论作一般的概括复习, 第二、三章都是近似理论, 其中第二章是幅度近似, 第三章是线性相移近似。大部分函数都插入各种零极点的表格和特性曲线。四至八章属于电路部分。第四章对运算放大器作概括的介绍。第五章介绍有源滤波器衡量的标准-灵敏度。第六章是使用一个放大器的主要电路, 有限频率处有零点和无零点的滤波器各介绍了两三种。利用第二章和第六章的内容, 就可进

行一般滤波器的设计。第七章是模拟计算机式滤波器，前半部介绍模拟电路的一般分析方法，后半部则对这种型的重点电路（双二次型）的设计做较详尽的讨论。第八章是有源均衡器。

此外有二篇附录，附录 I 是实际运算放大器对滤波器性能的影响，附录 II 是有关元件的统计简介。

### 参 考 文 献

- [1] J.G.Linvill "RC Active Filters", Proc IRE, 12, PP.555~564 (1954) .
- [2] B.A.Shenoi "A Practical Realization of a Gyrator Circuit and RC-gyrator Filters", IEEE Trans Circuit Theory CT-12, PP.374~380 (1965) .
- [3] H.J.Orchard "Inductorless Filters", Electron, Lett-2, PP.224~225 (1966) .

# 第一章 传递函数

## 1.1 复频率和复平面

### 1.1.1 复频率

网络特性的分析研究一般是以复频率为变量在复平面内进行的。为了建立复频率的概念，我们先回顾一下RLC电路的自由放电过程。图1.1.1是一个自由放电电路，开关K先倒向左侧，待电容C上充电达到E伏时，将开关倒向右侧，这时构成RLC串联自由放电电路。

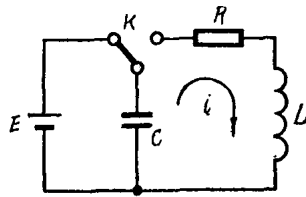


图1.1.1 RLC串联自由放电电路

该电路的微分方程为

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (1.1.1)$$

初始条件是

$$i(0^+) = 0 \text{ 和 } v_c(0^+) = E \quad (1.1.2)$$

式(1.1.1)是线性齐次方程，它的通解为

$$i = Ae^{pt} \quad (1.1.3)$$

将式(1.1.3)代入式(1.1.1)中得

$$R Ae^{pt} + pL Ae^{pt} + \frac{1}{pC} Ae^{pt} = 0$$

即

$$(R + pL + \frac{1}{pC}) Ae^{pt} = 0$$

因为  $Ae^{pt} \neq 0$ ,

故有

$$(R + pL + \frac{1}{pC}) = 0$$

将上式通分整理得

$$p^2 LC + RCp + 1 = 0 \quad (1.1.4)$$

式(1.1.4)称为特性方程，也是p的二次方程式，它的解为

$$p_1, p_2 = \frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

若假设  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，即  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ ，则上式可表示为

$$p_1, p_2 = -\alpha \pm j\omega_d$$

其中

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

此时电流  $i$  的表示式应为

$$\begin{aligned} i &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ &= A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

式 (1.1.5) 中的系数  $A_1$  和  $A_2$  可由式 (1.1.2) 所示的初始条件求出。将  $t=0$ 、 $i(0)=0$  条件代入式 (1.1.5) 可求出

$$A_1 + A_2 = 0$$

所以

$$A_2 = -A_1$$

又因在  $t=0$  时,  $v_c(0)=E$ , 在此瞬间回路无电流, 因而电阻  $R$  上无压降。此时电感上电压等于电容上的电压, 即

$$\begin{aligned} L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} &= E \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{E}{L} \end{aligned}$$

将式 (1.1.5) 代入上式, 可求出

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{E}{L}$$

将  $A_2 = -A_1$  关系代入上式, 则得

$$A_1 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{j2\omega_d L}, \quad A_2 = \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{j2\omega_d L}$$

将  $A_1, A_2$  值代入式 (1.1.5) 中得

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{j2\omega_d L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{2j\omega_d L} e^{-\alpha t} (e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) \\ &= \frac{E}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin\omega_d t \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

上式中利用了数学关系式  $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ , 又因  $\sin\omega_d t = \text{Im}e^{j\omega_d t}$ , 故上式可改写为

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \text{Im}e^{j\omega_d t} = \frac{E}{\omega_d L} \text{Im}e^{(-\alpha + j\omega_d)t} \\ &= \frac{E}{\omega_d L} \text{Im}e^{pt} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

式中  $p = -\alpha + j\omega_d$ 。

式 (1.1.6) 表示在  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  时,  $RLC$  自由放电电路的放电电流是一个振荡频率为  $\omega_d$ , 幅度随时间按  $e^{-\alpha t}$  规律衰减的减幅振荡正弦波, 如果把  $i$  的表示式写成式 (1.1.7)  $e$  的指数形式时, 指数  $p$  为一复数。

如果图 (1.1.1) 中  $R=0$  在这种特殊情况, 式 (1.1.4) 变为

$$pL + \frac{1}{pC} = 0$$

其振荡频率为

$$p_1, p_2 = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0$$

式中  $\omega_0$  为电路的自然谐振频率, 其放电电流表达式为

$$i = \frac{E}{\omega_0 L} \sin\omega_0 t$$

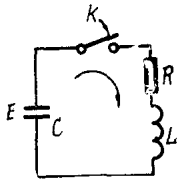
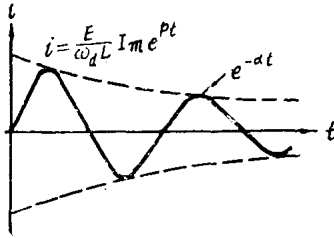
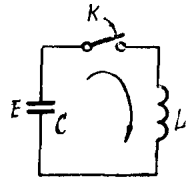
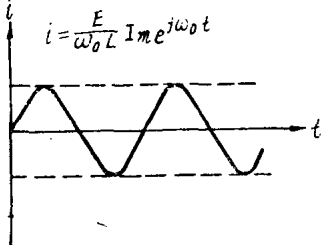
或写成

$$i = \frac{E}{\omega_0 L} \text{Im} e^{j\omega_0 t}$$

这时放电电流是个等幅振荡的正弦波，其振荡频率为 $\omega_0$ 。这个电流若以 $e$ 的指数形式表示，指数为一个虚数。为了说明复频率 $p$ 的性质，我们把 $RLC$ 和 $LC$ 放电电路的电流表达式、波形以及特征方程的根列于表1.1.1。

RLC与LC放电电路的比较

表1.1.1

电 路	电流表达式与波形	特征方程与它的根
		$R + pL + \frac{1}{pC} = 0$ $p_1, p_2 = -\alpha \pm j\omega_d$ $= -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
		$pL + \frac{1}{pC} = 0$ $p_1, p_2 = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0$

从表1.1.1中可以看出， $LC$ 自由放电电路只是 $RLC$ 自由放电电路中 $R=0$ 的一种特殊情况。在 $LC$ 放电电流表达式中 $e^{j\omega_0 t}$ 项指数 $j\omega_0 t$ 是纯虚数， $\omega_0$ 就是我们熟知的 $LC$ 电路自由振荡频率。在 $RLC$ 放电电路中，放电电流表达式中 $e^{pt}$ 项的指数 $pt$ 是一个复数，与 $LC$ 放电电流表达式相对比，我们称复数 $p$ 为复频率。

### 1.1.2 用复频率代表网络特性

有了上面引出的复频率就可以把 $LC$ 电路的谐振概念推广到 $RLC$ 电路。在 $LC$ 串联电路中，阻抗等于零时的频率，称为串联谐振频率，或称为阻抗函数的零点，可用符号“0”表示。在 $LC$ 并联电路中导纳等于零时的频率称为并联谐振频率，或称为阻抗函数的极点，可用符号“ $\times$ ”来表示。同样，在含有 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 的电路中，它的阻抗函数也有0、 $\times$ 点存在，一般来说是复数。与 $LC$ 电路相对比，也可以说这些0、 $\times$ 点是表示 $RLC$ 电路的谐振频率。从表1.1.1中可知， $LC$ 电路中的谐振频率表示一个等幅振荡的频率。而在 $RLC$ 电路中谐振复频率则代表一个减幅振荡。它的实部代表衰减程度，用奈/秒来计量；虚部 $\omega$ 即为实际振荡频率用弧度/秒来计量。

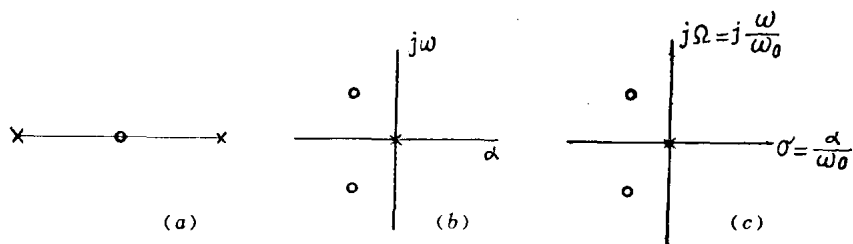


图1.1.2 用零极点分布表示网络特性  
 (a) LC串联零极点分布; (b) RLC电路的零极点分布在复平面上; (c) RLC电路的零极点分布在经过频率归一化的复平面上。

当我们用图来表示LC电路的0-x点分布时可以把“0”和“x”画在以 $\omega$ 为标度的一条直线轴上。0点表示阻抗为零，x表示阻抗为无限大，如图1.1.2(a)所示。若用图来表示RLC电路的0-x分布，因为“0”和“x”一般说来是复数，所以它们必须用横轴为实轴，纵轴为虚轴的平面上的点来表示，这个平面称为复频率平面，或简称为复平面。如图1.1.2(b)所示。

在复平面上，实轴代表衰减程度，用 $\alpha$ 表示；虚轴是实际的振荡频率，用 $j\omega$ 表示。为了以后应用方便，常将 $p$ 平面的坐标进行归一化。归一化的实轴为 $\sigma$ ， $\sigma = \frac{\alpha}{\omega_0}$ ；虚轴为 $j\Omega$ ， $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ 。此时复平面称为 $s$ 平面，即 $s = \sigma \pm j\Omega$ ，如图1.1.2(c)所示。

用 $\omega$ 轴上的0-x点分布，可表示LC电路的特性，同样用 $p$ 平面上的0-x点分布，可表示RLC电路的特性，不同零极点分布的电路，自由振荡的波形也不同，在图1.1.3中表示出这种关系。

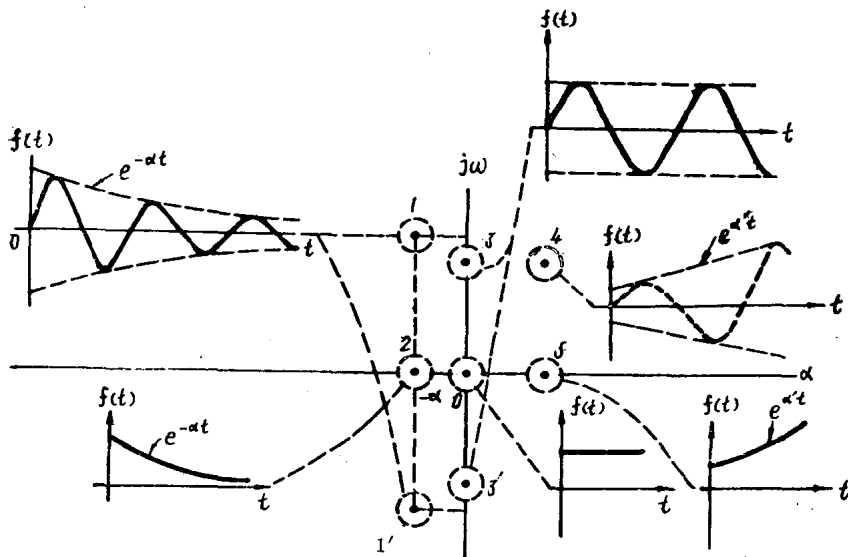


图1.1.3  $p$ 平面上的不同点代表不同的自由振荡波形

图中1'点代表衰减振荡，2点代表阻尼放电情况，3 3'点在虚轴上代表等幅振荡，4点是增幅振荡，5点是按指数增长。原点0处代表直流情况。这说明 $p$ 平面上的不同点所代表的电路特性也不同。根据0-x点在 $p$ 平面上的位置就可以判断电路所具有的特性。

例如，对于图1.1.4所示的RC串联电路，若用复频率表示它的阻抗函数是

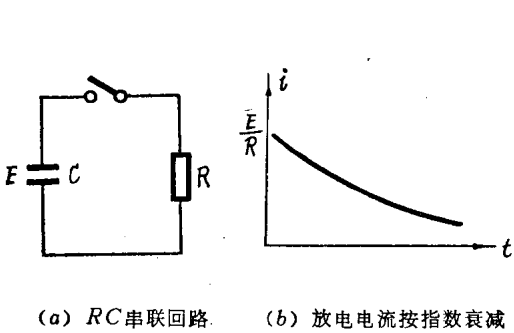


图1.1.4 RC串联电路的自由放电

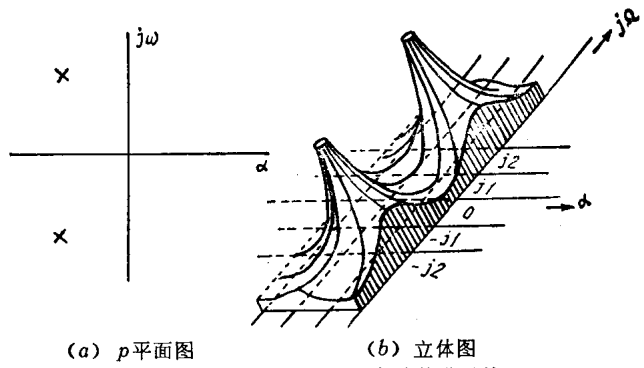


图1.1.5 极点为  $-2 \pm j3$  的传递函数

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = R \frac{p + \frac{1}{RC}}{p}$$

由上式可以求出  $Z(p)$  的零点为

$$p = -\frac{1}{RC}$$

它是一个负实数，位于  $p$  平面的负实轴上。对照图 1.1.3 可知，这种电路的放电电流波形为指数下降形式。这就是电容单调放电现象。

网络特性最清晰明显的表示方法是立体图。例如，对于图 1.1.5(a) 来说，其代表的传递函数特性如图 1.1.5(b)。

在  $p = -2 \pm j3$  处有两个峰。这个函数的频率特性等于  $j\omega$  轴截面的曲线。图 1.1.5(b) 可想像为在张紧的一张橡皮上，用力在极点处往上顶的结果。这个图没有画出零点。如果有零点，应该在零点那一点把橡皮钉在底架上。

### 1.1.3 利用复频率概念计算网络特性

引用复频率概念还可使电路分析计算简单。第一个例子是分析图 1.1.6(a) 所示，当电路外加一个减幅余弦波激励电压时求该电路电流。如果按正弦交流电路的求解法来计算是比较困难的，引用复频率的概念，即可将该电路的激励电压和阻抗可标成如图 1.1.6(b) 的方式。由图 1.1.6(b) 可列出如下方程：

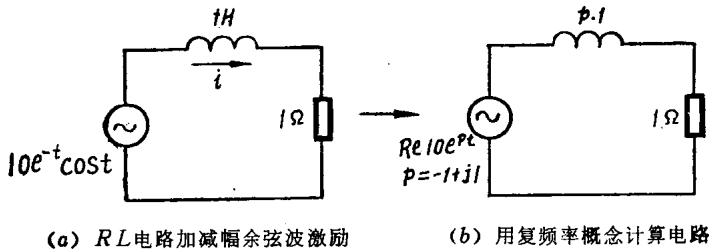


图1.1.6 引用复频率计算交流电路

$$I(p) = \frac{10/0^\circ}{p + 1} = \frac{10/0^\circ}{(-1 + j1) + 1} = 10/-90^\circ$$

$$i = Re\{Ie^{pt}\}$$

$$i = 10e^{-t} \cos(t - 90^\circ)$$



从以上讨论看出，引用复频率概念以后，计算交流电路要简便的多。  
第二个例子是用复频率概念分析图1.1.7 RLC串联电路接通电源时的瞬变过程。  
该电路的复数阻抗为

$$Z(p) = p + 1 + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + p + 1}{p} = \frac{(p - p_1)(p - p_2)}{(p - p_3)}$$

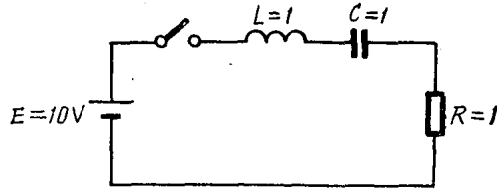


图1.1.7 用复数阻抗来解决RLC串联电路的瞬变过程

这里零点是  $p_1 = -0.5 + j0.866$ ,  $p_2 = -0.5 - j0.866$ ; 极点是  $p_3 = 0$ 。此时电流  $i$  的表示式为

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

根据初始条件  $i(t)|_{t=0} = 0$ ,  $L \frac{di}{dt}|_{t=0} = E$ , 即  $\frac{di}{dt}|_{t=0} = 10$ 。

将初始条件代入上式得

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 p + A_2 p &= 10 \end{aligned}$$

所以

$$A_1 = -A_2 = \frac{10}{p_1 - p_2} = \frac{10}{2j0.866} = \frac{11.54}{2j}$$

则

$$\begin{aligned} i(t) &= 11.54 e^{-0.5t} \frac{e^{j0.866t} - e^{-j0.866t}}{2j} \\ &= 11.54 e^{-0.5t} \sin(0.866t) \end{aligned}$$

## 1.2 利用网络函数的0-×点分布，由向量法求网络特性的举例

网络函数一般是指阻抗函数（导纳函数）和传递函数而言。因为任何网络都是  $R$ 、 $L$  和  $C$  以及有源元件所组成。这些无源元件的阻抗或有源元件的增益都是复频率的函数，所以网络输入端或输出端的电压和电流也都是复频率的函数。阻抗（导纳）函数是指网络同一端对电压与电流的比值。而传递函数是指输出端电压或电流与输入端电压或电流的比值。因此阻抗函数和传递函数也都是复频率  $p$  的函数。

在前节中已经说过，网络特性可由网络函数在  $p$  平面上  $0-\times$  点分布来决定。本节将介绍怎样用  $0-\times$  点的分布来求网络特性。

一般常用的方法是向量分析法。因为在复平面上的  $0-\times$  点都可以看成矢量，网络特性可通过这些矢量的运算而求得。下面我们通过具体电路的分析来说明这种方法的应用。

**例1.2.1** 求图1.2.1电路的阻抗频率特性。

**解** 首先指出，这里的“频率”是指实频率，也就是  $p$  平面的虚轴。

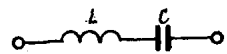


图1.2.1 LC串联电路

图1.2.1电路的阻抗函数是