现代数学译丛

常微分方程续论

——常微分方程的几何方法——

〔苏〕В. И. 阿诺尔德 著

齐民友 译

科学出版社

1989

内 容 简 介

这是一部把常微分方程和近代动力系统与分枝理论相结合的著作.

本书第一章用 Lie 群的观点研究微分方程求解问题,并用最新观点详细介绍绍较经典的理论;以后几章着重讨论非常重要的结构稳定性及摄动理论. 最后一章介绍微分方程的分枝理论. 本书所涉及的都是当前世界上在这一领域中最引人注目的问题.

本书可作为高等院校高年级学生和研究生教材,也可作为有关科技工作者的参考书.

В. И. Арнольд
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Наука, Москва, 1978

现代数学译丛
常微分方程续论
——常微分方程的几何方法——
〔苏〕 В. И. 阿诺尔德 著
齐民友 译
责任编辑 石小龙 吕 虹
科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1989年11月第 一 版 开本: 850×1168 1/32
1989年11月第一次印刷 印张: 11
印数: 0001—1 920 字数: 286 000
ISBN 7-03-001230-5/O·272
定 价: 11.20 元

序

Newton 的基本发现，他本人认为需要保密，所以只用字谜似的形式发表，这就是：Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa. 用现代数学语言来说，它的意思就是："解微分方程是有用处的."

现时，微分方程理论是许许多多性质各异的思想和方法的广泛的汇集，这些思想和方法在许多应用中行之有效，而且不断地促进着数学各分支的理论探讨.

把抽象的数学理论和自然科学的应用连结起来，大部分都借助于微分方程. 微分方程的许多部分发展得这么快，以致它已经成为一门独立的学科；对于许多学科，例如线性代数，Lie 群理论，泛函分析和量子力学等等，微分方程的问题对它们的发源有很重大的意义. 所以微分方程是自然科学数学观的基础.

在选择本书的材料时，作者想着重选取对研究微分方程有用的基本思想和方法. 特别着力使基本思想不受技巧细节之累，这些基本思想照例是既简单又直观的. 对最基本而简单的问题，本书论述得最仔细；而对比较专门和困难的理论，我们则进行了综述.

本书从可用求积法解出的一些特殊方程讲起. 重点不在于把初等积分法作形式的药方似的罗列，而在于一方面把它们与一般的数学思想、方法和概念(奇点的分解，Lie 群，牛顿图式等)结合起来，另一方面把它们与在自然科学中的应用联结起来.

一阶偏微分方程是用函数的一阶节 (jet) 之流形上自然接触构造来讲的，同时也顺带论述了所需要的接触构造几何学的初步. 这样，整个理论可以不再需要其它资料.

本书很大一部分是关于通常所谓的定性方法. 由 Poincaré 所开创的微分方程定性理论的最新发展使人们认识到，正如微分

方程的显示求积一般是不可能的一样，对高维相空间的一般微分方程的定性研究也是不可能的．本书从结构稳定性的观点讨论微分方程的分析．结构稳定性是指在微分方程的微小变动之下，其定性的图象的稳定性．这里叙述了自 А. А. Андронов 和 Л. С. Понтрягин 在这个领域的最初的工作发表以来所得到的基本结果，即 Аносов 的结构稳定 У-系统(Аносов 系统)理论的初步，这个系统的一切轨道都是结构不稳定的．还叙述了 Smale 关于结构稳定系统集合不稠密性的定理．同时讨论了这些数学发现在应用上的价值(这里说的是描述运动的稳定的混沌状态，诸如湍流那样)．

各种渐近方法是研究微分方程的最有力（也是最常用）的方法．本书讨论了平均法的基本思想，这个方法可追溯到天体力学的奠基性的工作，而且在一切需要把缓慢的演化与急速的振荡区分开来的应用领域中都广泛地予以应用(见 Н. Н. Боголюбов 和 Ю. А. Митропольский 等人的工作)．

尽管对于平均法已经作了大量的研究，但在演化问题(甚至对最简单的多频系统)中，远非一切都已清楚了．本书试图通过对共振以及共振的俘获进行考察以说明这些问题．

平均法的基本思想是通过选用适当的坐标系以消除摄动这一思想．这个思想也是 Poincaré 标准形理论的基础．标准形方法是微分方程局部理论的基本方法，这个理论描述相曲线在奇点或封闭相曲线附近的性态．本书讲了 Poincaré 标准形方法的基础，其中包括 Siegel 关于全纯映射线性化的基本定理的证明．

Poincaré 标准化方法不仅对研究个别的微分方程有重要的应用，而且在分枝理论中也是如此．这里，研究的对象是含有参数的一族方程．

分枝理论研究系统所含的参数变动时定性图象的变化．对参数的一般值，我们通常会遇到通有的[1]系统(例如所有奇点都是简

---

1) “通有的”是 generic 一词的试译，书中似未用到其准确数学含义．关于这点可以参看 M. Golubitsky and V. Guillemin [1]．在 Arnold [13] 中则将它概括为： generic 即“所有情况，但有某些例外” (p. 3)．——译者注

单的等等）．然而，若系统含有参数，则对参数的某些值不可避免地会遇到蜕化（例如向量场的两个奇点的融合）．

在单参数系统中，我们通常只遇到简单的蜕化（即在系统的小扰动下不可避免的蜕化）．这样就产生了在一切系统的泛函空间中按相应曲面的余维数把蜕化分为层次（hierarchy）：在单参数的通有系统中，只有相应于余维数为 1 的曲面的蜕化，等等．

近年来，由于应用了 Whitney 的可微分映射的奇点的一般理论的思想和方法，分枝理论取得了可观的进展．

本书最后一章论述分枝理论，其中应用了以前各章中所建立的方法，讲述了这一领域自 Poincaré 和 Андронов 的奠基性工作以来的主要结果．

在讨论这些主题时，作者力图避免公理-演绎的风格，这种风格的特点就是引进定义时不给出它的来龙去脉，而且掩盖基本思想和方法．我们应该把它们作为一种比喻，对学生讲讲，而不写上书本．

数学的公理化和代数化，为时已超过 50 年．正如人们所说的，它们已经使得许许多多的数学教本令人无法读懂了，而且它们使数学与物理和自然科学的完全脱节成为现实．作者打算这样来写这本书，使它不但对数学家有用，而且对所有要用微分方程理论的人都能有用．

对于本书读者，我们只假设他们具有很少的一般数学知识，大体上相当于大学一、二年级的水平，例如读过作者关于微分方程的教本（В. И. Арнольд [8]）就已经够了（但并非必要）[1]．

本书在内容上略去了读者感到困难的地方，这对理解后文并无大害，我们采取了一些措施以尽量避免各章甚至各节间互相引用．

书中内容有些是作者在莫斯科大学 1970—1976 年间所开设

1）在讲某些特殊问题时，要用到或提到关于微分形式，Lie 群和复变函数的最初步的知识．但为了理解本书绝大部分内容，这些知识不是必备的．

的许多必修课或专业课的材料；这些课程是为二至三年级大学生、数学系的进修生以及从事自然科学方面的应用的数学家的试验班开设的。

（下略）

B. Арнольд

1977年6月

目　　录

第一章 特殊方程

在研究微分方程时应用数学各分支的方法. 本章中讨论了个别的特殊方程和特殊的方程类型. 一方面特别注意所考虑的方程在应用上的意义,另一方面则注意它们与其他的一般数学问题(例如奇点的分解, Newton 图式,对称性的 Lie 群等等)的联系. 本章以一维定常 Schrödinger 方程的理论和二阶非线性方程的几何理论作为结束.

§1. 关于对称群不变的微分方程

本节介绍一些一般的思想，以显式积出微分方程的方法就是以它们为基础的. 作为一个例子,我们将讨论相似性理论,即齐次方程和准齐次方程的理论.

A. 微分方程的对称性的群

考虑相空间U中的向量场v.

定义 若微分同胚 $g: U \to U$ 将向量场v变为自身,即

$$v(gx) = g_{*x}v(x),$$

则称g为向量场v的对称性.

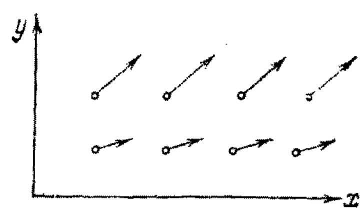

图1

这时也就说 v 关于微分同胚 g 是不变的.

例 1　若坐标为 (x, y) 的平面上的向量场的分量不依赖于 x，则它关于 x 轴的平移不变(图 1).

例 2　Euclid 平面 (x, y) 上的向量场 $x\partial_x + y\partial_y$ 关于伸缩 $g(x, y)=(\lambda x, \lambda y)$ 和旋转都是不变的.

给定向量场的所有对称性构成群.

问题　求坐标为 (x, y) 的平面上之向量场 $x\partial_x + y\partial_y$ 的对称群.

考虑扩充相空间中的方向场.

定义　若扩充相空间的微分同胚把一个方向场变为其自身，则称之为该方向场的对称性. 这时，就说方向场关于此微分同胚为不变的.

例 1　方程 $\dot{x}=v(x)$ 的方向场关于 t 轴的平移是不变的(图 2 a).

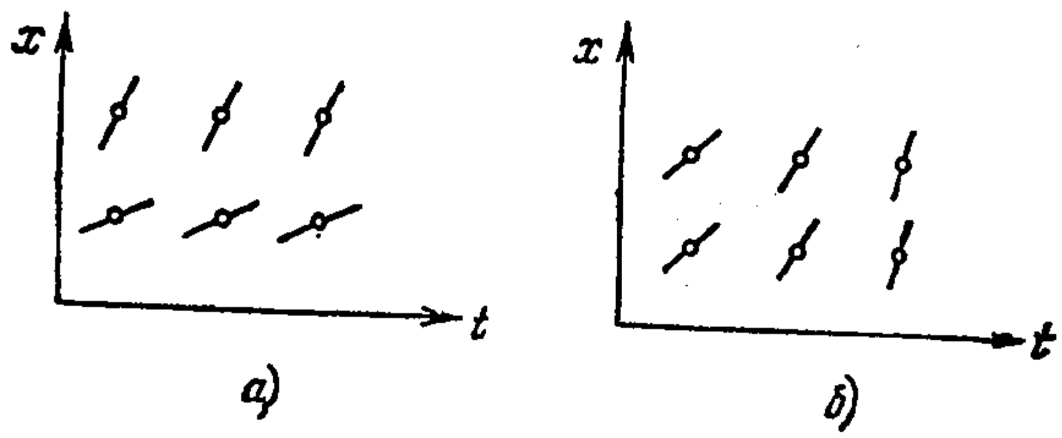

图 2

例 2　方程 $\dot{x}=v(t)$ 的方向场关于 x 轴的平移是不变的(图 2 б).

定义　微分方程 $\dot{x}=v(x)$ (或 $\dot{x}=v(x, t)$) 称为对相空间(或扩充相空间)的微分同胚 g 为不变的，如果向量场 v (或方向场 v) 对此微分同胚 g 不变；这时微分同胚 g 称为此方程的对称性.

定理　方程的对称性变此方程的相曲线(或积分曲线)仍为它的相曲线(或积分曲线).

◀设 $x=\varphi(t)$ 是方程 $\dot{x}=v(x)$ 的解而 g 为对称性. 这时 $x=g(\varphi(t))$ 仍然是解，所以对称性 g 变相曲线为相曲线. 对积分曲线证明亦类似.▶

例　方程 $\dot{x}=v(t)$ 的积分曲线族在沿 x 轴的平移下仍变为它的积分曲线族。方程 $\dot{x}=v(x)$ 则沿 t 轴的平移也如此。

以下的例子时常会在应用中遇到，不过称为“相似理论”、“量纲理论”或“考察自模性”。

B. 齐次方程

定义　如果在除去 O 点的平面上的方向场对一切伸缩

$$g^{\lambda}(x,y)=(e^{\lambda}x,\ e^{\lambda}y),\quad \lambda\in\mathbf{R}$$

都不变，就称它是齐次的。

如果微分方程 $\frac{dy}{dx}=v(x,y)$ 的方向场是齐次的，就称它为齐次方程（图3）。

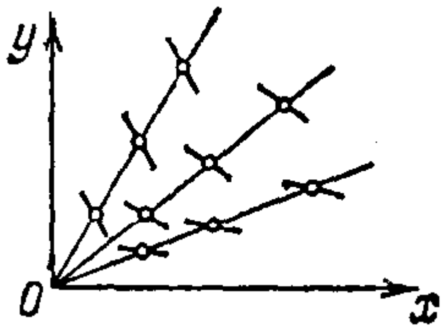

图 3

换言之，这就是说，在每一条由原点发出的射线之各点上，场的方向都应为平行的：

$$v(e^{\lambda}x,\ e^{\lambda}y)\equiv v(x,y).$$

例　若有实数 d 使函数 f 适合 $f(e^{\lambda}x, e^{\lambda}y)=e^{\lambda d}f(x,y)$，我们就称 f 为 d 次齐次的。当 d 为非负整数时，任意的 d 次型（型即齐次多项式）就是例子。令 P 与 Q 为 x 和 y 的两个 d 次型。微分方程

$$\dot{x}=P,\ \dot{y}=Q$$

是平面上的向量场。在区域 $P\neq 0$ 中相应的方向场就是齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}\quad \left(例如\ \frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ 等等\right)$$

的方向场。

注　齐次场的定义域并不一定是除去 O 点的整个平面—可以在任意齐次域（即对伸缩不变的区域）里，例如在以 O 为顶点的角域等区域中考虑齐次场。

定理　齐次方程的积分曲线在伸缩 g^{λ} 的作用下仍为同方程的积分曲线。

于是，在研究齐次方程时，只需在平面的每一个以 O 为顶点的

角域中考虑一条积分曲线就够了.

直接应用§1中A的定理即可得到证明.

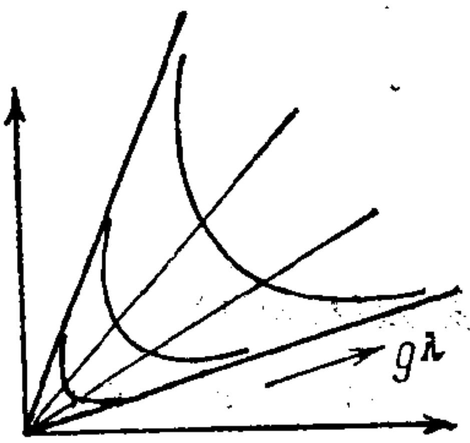

图 4

问题 令 P, Q 为 d 次型,证明方程组 $\dot{x}=P$, $\dot{y}=Q$ 的相曲线可以用伸缩而互相得出.

若这些相曲线有某一个是可在时间 T 内绕行的闭曲线,则在伸缩 g^{λ} 之下可由它得出迴转周期为 $T/e^{\lambda(d-1)}$ 的封闭相曲线.

C. 准齐次方程与量纲的比较

固定实数 α 与 β 并考虑平面上的一族在不同方向上倍数不同的伸缩

$$g^{s}(x, y)=(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y). \tag{1}$$

注意,公式(1)给出了平面上的线性变换的单参数群(图5).

定义 函数 f 称为 d 次准齐次的,如果对(1)中的 g^{s} 有

$$f(g^{s}(x, y))=e^{ds}f(x, y).$$

例 若 $\alpha=\beta=1$, 即得通常的 d 次齐次函数.

准齐次函数相乘时,其次数相加. 次数也称为权. 因此(1)中 x 的权为 α, y 的权为 β, $x^{2}y$ 权为 $2\alpha+\beta$. 所有固定次数的准齐次单项式可以很容易地由以下的牛顿图式(图6)看出: 用非负整数网格象限中的 (p, q) 点表示单项式 $x^{p}y^{q}$. 这样,所有 d 次单项式的次数即指数 (p, q)平面上第一象限中方程为 $d=\alpha p+\beta q$的线段上的整点.

问题 选择 x 和 y 的权使 $x^{4}+xy^{3}$ 为准齐次的.

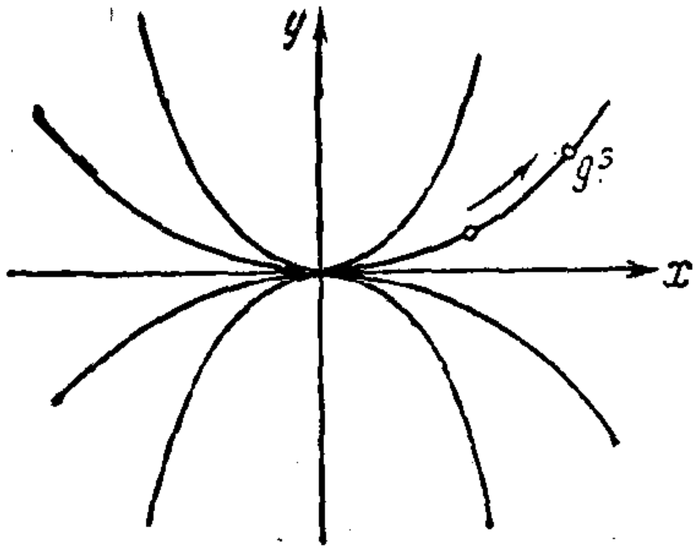

图 5

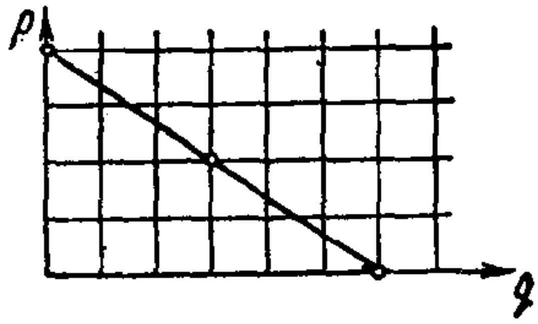

图 6

定义 若微分方程 $\frac{dy}{dx}=v(x, y)$ 的方向场 v 对伸缩 (1) 是不变的，就称此方程为(权 (α, β) 的)准齐次方程。

由 §1 中 A 关于对称性的一般定理可得

定理 可以在伸缩 (1) 的作用下求得准齐次方程的积分曲线。

问题 求证函数 $v(x, y)$ 给出(权为 (α, β) 的)准齐次微分方程，当且仅当它是 $d=\beta-\alpha$ 次准齐次的。

注 以上定义和定理很容易推广到多于两个变量的情况以及阶数高于 1 的微分方程的情况。特别地，容易证明

定理 设在 (x, y) 平面上有曲线 $\gamma: y=y(x)$，且在其上点 (x_0, y_0) 处有 $\frac{d^k y}{dx^k}=F$. 在曲线 $g^s\gamma$ 的相应点上有

$$\frac{d^k y}{dx^k}=e^{(\beta-k\alpha)s}F.$$

换言之在变换 (1) 之下，$\frac{d^k y}{dx^k}$ 也和 y/x^k 一样变换，这也说明了记号 $\frac{d^k y}{dx^k}$ 的方便之处。

问题 设在 d 次齐次力场中质点以时间 T 走过轨道 Γ，求证这一质点通过位似的轨道 N 需要时间

$$T'=\lambda^{(1-d)/2}T.$$

解 牛顿方程 $\frac{d^2x}{dt^2}=F(x)$ 中若 F 是 d 次齐次，则它在适当的变换(1)之下仍变为自身．亦即，取 x 的权为 α，t 的权为 β 且 $\alpha-2\beta=\alpha d$ 即可．因此 $\beta=\frac{1-d}{2}\alpha$．所以伸缩 $x'=\lambda x$ 相应于 $T'=\lambda^{(1-d)/2}T$．

问题 求证 Kepler 第三定律：在万有引力场中通过位似轨道所需时间的平方正比于轨道线性度量的立方．

解 在前问题之解中，取 $d=-2$（万有引力定律），即得 $T'=\lambda^{3/2}T$．

问题 若振动的恢复力正比于伸长（线性振子）或正比于伸长的立方（弱力），振动周期如何依赖于振幅？

答 线性摆的周期不依赖于振幅，弱力情况下则反比于振幅．

问题 众所周知，具有铅直轴的陀螺有临界角速度：若陀螺之角速度大于此临界值，陀螺将稳定地直立，若小于则将倾倒．

若将陀螺放在月球上，从而重力为地面上重力的 $\frac{1}{6}$，临界角速度将如何变化？

答 将以因子 $\sqrt{6}$ 减小．

D. 单参数对称群对降阶的应用

定理 对 $\mathbf{R}^n$ 中的方向场，若已知一个单参数对称群，则相应微分方程的求积问题可化为求积一个 $\mathbf{R}^{n-1}$ 中的微分方程问题．特别地，对平面上的方向场，若已知一个单参数对称群，则相应的方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 可以显式地积出．

◀设 $\{g^s\}$ 是所给的对称群．考虑流 $\{g^s\}$ 的轨道 $\{g^s x\}$，至少可以局部地确定 $(n-1)$- 维的轨道空间（即作用 g^s 的商空间）以及由原空间到商空间的映射 p（p 将流 $\{g^s\}$ 的每个轨道映为一点）．结果原来的方向场在映射 p 之下变为 $(n-1)$- 维轨道空间中的新方向场；只需对它求积即可．▶

更准确地说，考虑某点 $x_0\in\mathbf{R}^n$；设对称群 $\{g^s\}$ 过 x_0 的轨道是曲线 σ．过 x_0 点作一个横截于 σ 的 $(n-1)$- 维流形 Σ．在 x_0 点附近引入局部坐标 (s,u) 使 $s\in R$，$u\in\Sigma$ 对应于原空间的 $g^s u$ 点．于是到轨道空间的投影 p 和

对称群的作用由公式

$$p(s, u) = u,\ g^{s_1}(s_2, u) = (s_1 + s_2, u)$$

给出(从而 Σ 上的点将轨道局部参数化).

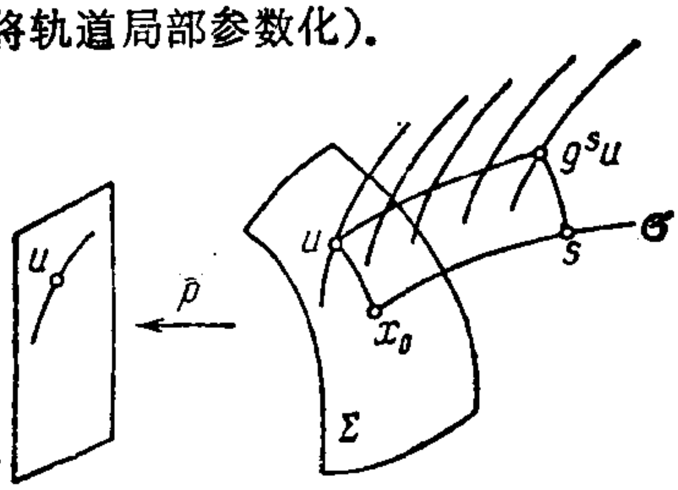

图 7

注意,若显示地给出群 g^s,则也可显式地求出坐标 (s, u). 将原来的微分方程在这些坐标中写出.若在 x_0 点的方向场不切于 Σ(适当选取 Σ 就可以做到这一点),则在此点附近方程可以写为

$$\frac{du}{ds} = v(s, u).$$

这时群 $\{g^s\}$ 就成为沿 s 轴的平移群,所以函数 v 不含 s. Σ 上的向量场 $v(u)$ 在这个 $(n-1)$-维流形上定义了一个方向场;知道它的积分曲线后即可用求积法解出方程 $\frac{du}{ds} = v(u)$,即得出原方程的积分曲线.

特别是在 $n = 2$ 的情况下,选定了坐标 (s, u) 就立即可将它转化成可求积的方程 $\frac{du}{ds} = v(u)$.

注 在实践中选取 s 的适当函数 z 代替 s 更为方便. 在这样的坐标之下,具有对称群 $\{g^s\}$ 的方程可写为

$$\frac{du}{dz} = v(u)f(z).$$

在 $n = 2$ 时,这是可分离变量的方程.

例如,齐次方程可以在极坐标系中,也可以在坐标系 $u = y/x$, $z = x$(图 8 a)中,化为可分离变量的方程.

这里 $\{g^s\}$ 就是倍数为 e^s 的伸缩的群;对于极坐标,Σ 是圆 $x^2 + y^2 = 1$,而对第二个坐标系则是直线 $x = 1$; $z = e^s$.

问题 在什么坐标系中可以显式积出准齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = v(x, y)?$$

这里 x 的权为 α, y 的权为 β(因此 v 是 $\beta-\alpha$ 次准齐次方程).

解 可以令 $u=y^\alpha/x^\beta$, $x=x$ (在 $x\neq 0$ 处)(图 8 б).

问题 显式地写出上题的方程在 (x, x) 坐标中所化成的可分离变量的方程.

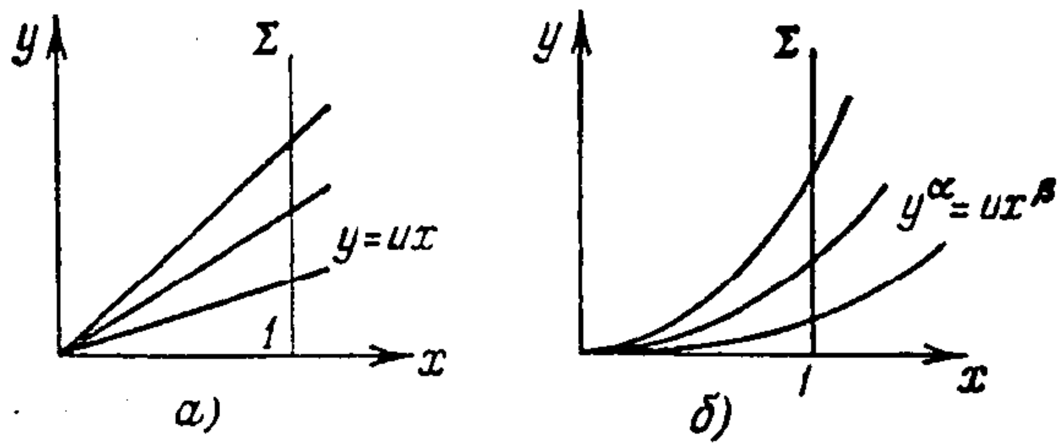

图 8

解 $y^\alpha=ux^\beta$, 所以 $\alpha y^{\alpha-1}dy=x^\beta du+\beta ux^{\beta-1}dx$. 因为 $dy=vdx$, 故 $\alpha y^{\alpha-1}vdx=x^\beta du+\beta ux^{\beta-1}dx$, 即

$$\frac{du}{dx}=\frac{\alpha y^{\alpha-1}v-\beta ux^{\beta-1}}{x^\beta},$$

但 $v(x, y)=x^{(\beta/\alpha)-1}w(u)$, 所以

$$\frac{du}{dx}=\frac{\alpha w_1(u)-\beta u}{x}, \quad w_1(u)=u^{-\frac{1}{\alpha}}w(u).$$

§ 2. 微分方程奇点的分解

这里要简要地讲述一个重要而常用的数学方法，即奇点的分解或爆破 (blow up) (亦称为 σ- 过程).

A. σ- 过程

在非奇点附近,所有向量场的构造都是简单的,而且也是相同的.

为了在奇点附近研究各种数学对象的细微结构，我们制订了一个特别的工具,它好像显微镜一样,有很高的分辨力，这就是所谓**奇点的分解**. 从解析观点看来,就是选择这样的坐标系,使得在

奇点附近很小的位移相应于坐标的很大的变化.

极坐标就已经具有这样的性质，但是变换为极坐标需要超越函数(三角函数),所以从代数观点看另一种程序更为方便,这就是 σ-过程，或称为奇点的膨胀.

先从一个辅助的构造开始. 令 $p:\mathbb{R}^2\backslash O \to \mathbb{R}P^1$ 是定义射影直线的纤维化(射影直线是一个流形,其中的点是平面上过坐标原点的直线. 映射 p 将平面上的点映为联结该点与原点的直线).

考虑映射 p 的图象 Γ，它是直积 $(\mathbb{R}^2\backslash O)\times\mathbb{R}P^1$ 中的光滑曲面(图 9). 将除去一点的平面嵌入平面中，即可视 Γ 为直积 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1$ 中的光滑曲面. 自然投影 $\pi_1: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1\to\mathbb{R}^2$ 可把 Γ 微分同胚地映到除去一点的平面 $\mathbb{R}^2\backslash O$ 上(为了更直观地想象它,我们把 Γ 看成一个螺旋楼梯是有好处的;整体看来,射影直线微分同胚于圆周 S^1，直积 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1$ 则微分同胚于环面的内域).

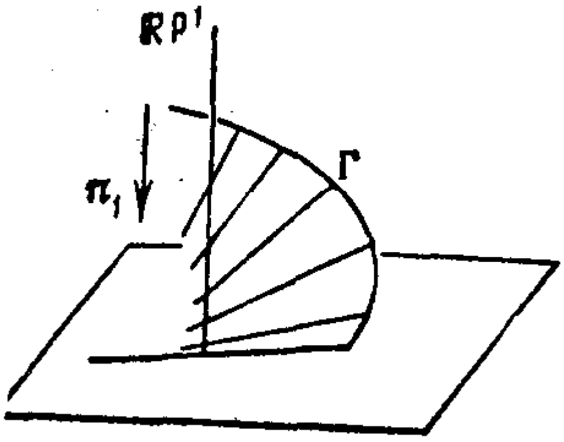

图 9

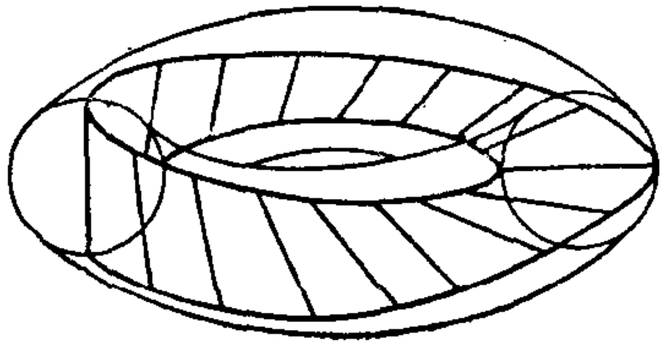

图 10

定理 映射 p 在 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1$ 中的闭包是光滑曲面 $\Gamma_1=\Gamma\cup(O\times\mathbb{R}P^1)$. 曲面 Γ_1 微分同胚于 Möbius 带(图 10).

◀设 (x, y) 是平面上的坐标，$u=y/x$ 是 $\mathbb{R}P^1$ 中的局部仿射坐标. 于是 (x, y, u) 是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}P^1$ 中的局部坐标系. 在此坐标系下，Γ 由方程 $y=ux, x\neq 0$ 给出，而 Γ_1 则由局部方程 $y=ux$ 给出. 这是一个光滑曲面；Γ 的被坐标系覆盖的部分加上射影直线 $O\times\mathbb{R}P^1$ 的落到其上的部分,我们就得到了 Γ_1.

只要考虑第二个局部坐标系 (x, y, v)，$x=vy$ 即可证明 Γ_1 的光滑性.