高等职业教育建筑施工专业系列教材

高等数学

中国建设教育协会组织编写

中国建筑工业出版社

高等职业教育建筑施工专业系列教材

高　等　数　学

中国建设教育协会组织编写

孔　黎　　主编
金光宇　焦云航
孙长范　周小跃　编

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/孔黎主编. —北京：中国建筑工业出版社，
2000．12
高等职业教育建筑施工专业系列教材
ISBN 7-112-04230-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．孔…　Ⅲ．高等数学-高等教育：
职业教育-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 54178 号

本书是按照高等职业教育建筑施工专业课程教学大纲编写的。主要内容为一元函数微积分。全书共分为五章，其中包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用等。每节末尾配有一定数量的习题。

本书考虑到高等职业教育培养应用型、技能型人才的特点，以应用为目的，以必需、够用为度。本书取舍适宜，叙述深入浅出，注重几何直观与物理解释，不过分强调理论推导和证明的严谨性，着重基本运算技能的训练，不追求过分复杂繁难的计算。

高等职业教育建筑施工专业系列教材
高 等 数 学
中国建设教育协会组织编写
孔　黎　主编
金光宇　焦云航
孙长范　周小跃　编

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店总店科技发行所发行
北京市彩桥印刷厂印刷

*

开本：787×960 毫米 1/16　印张：13　字数：258 千字
2000 年 12 月第一版　2000 年 12 月第一次印刷
印数：1—3000 册　定价：18.40 元

ISBN 7-112-04230-5
TU · 3332（9705）

前　言

大力发展高等职业教育，已成为我国教育发展战略的重要组成部分。高等职业教育就是要培养技术应用型的专门人才，而当前的教材建设还远落后于高等职业教育培养目标的需要，从而直接影响到高职教育的质量和办学特色。本书是根据中国建设教育协会组织审定的高职教育“建筑施工”专业的具体要求编写的，是高职教育“建筑施工”专业系列教材之一。

高等职业教育比较强调教育的针对性，高等数学这门基础课应该明确是为了专业的培养目标服务的。本教材注意把握高职教育人才的培养应具有形成技术应用能力所必需的基础理论知识这一质量要求，以必需够用为度，叙述深入浅出，注意几何直观与物理解释，不过分强调理论推导和证明的严谨性，着重基本运算技能的训练，不追求复杂的计算。

本教材教学时数为80学时，可作为高职、成人高等教育高等数学少学时各专业的教材。

本教材由长安大学孔黎主编，第一章由孔黎编写，第二章由苏州建筑职工大学金光宇编写，第三章由无锡市城建职工大学焦云航编写，第四章由长春市建筑职工大学孙长范编写，第五章由南京建筑工程学院周小跃编写。

本教材由无锡市城建职工大学金宝钰主审。

由于编者水平有限和时间仓促，书中不足之处在所难免，尽请读者提出宝贵意见。

第一章　函数　极限　连续

高等数学与初等数学的主要区别在于前者研究的对象是变量，而后者研究的对象基本上是不变的量。所谓函数就是变量之间的依赖关系，极限方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，并研究它们的一些性质。

第一节　预备知识

一、集　　合

在日常生活中，集合的概念是容易建立的，例如，某教室内学生的全体，某书柜中的书的全体，某商店一天售出的电视机的全体都分别构成一个集合。一般地说，所谓集合是指具有某种确定性质的对象的全体，组成集合的各个对象叫做这个集合的元素。

习惯上用大写字母 A、B、C、…表示集合，用小写字母 a、b、c、…表示集合的元素，如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"。如果 a 不是集合 A 的元素，记作 $a\overline{\in} A$，读作"a 不属于 A"。含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集，不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。

表示集合的方法主要有两种：列举法和描述法，所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在花括号内。例如，由元素 a_1，a_2，a_3，…，a_n 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$$

所谓描述法，就是指明集合元素所具有的确定性质，将具有性质 P 的元素 x 所构成的集合表示为

$$A=\{x|x\ \text{具有性质}\ P\}。$$

例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集合可以表示为 $S=\{-1,1\}$，也可表示为 $S=\{x|x^2-1=0\}$。

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合。如果没有特别声明，以后提到的数都是实数。

二、区间与邻域

区间是高等数学中经常用到的实数集，所谓变量 x 的区间就是介于两个实数

a 与 b 之间的一切实数，当 $a<b$ 时，区间定义如下：

开区间 (a, b)，表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

闭区间$[a,b]$，表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$。

半开区间 $[a, b)$，表示满足 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合，即 $[a, b) = \{x|a\leqslant x<b\}$；类似可定义半开区间 $(a, b] = \{x|a<x\leqslant b\}$。

此外还有所谓无限区间，引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），无限区间表示如下：

$$(a, +\infty) = \{x|a<x\};$$
$$[a, +\infty) = \{x|a\leqslant x\};$$
$$(-\infty, b) = \{x|x<b\};$$
$$(-\infty, b] = \{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x|x\in R\}，其中 R 为实数集。$$

区间在数轴上如图 1-1 所示。

图 1-1

邻域也是一个经常用到的概念。

称实数集

$$\left\{x \,\middle|\, |x-a|<\delta\right\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\left\{x \,\middle|\, |x-a|<\delta\right\}。$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$的半径。

事实上

$$|x-a|<\delta$$

相当于 $$-\delta<x-a<\delta,$$

即 $$a-\delta<x<a+\delta。$$

由邻域的定义知

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

这个开区间以点 a 为中心，而区间长度为 2δ，如图 1-2 所示。

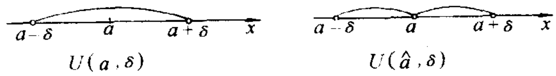

图 1-2

有些场合用到的邻域 $U(a,\delta)$ 需要将邻域中心点 a 去掉，邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心点 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$。

习 题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围：

(1) $x\geqslant 0$； (2) $-2\leqslant x<6$；

(3) $x^2<16$； (4) $|x-2|<3$；

(5) $x\leqslant 0$； (6) $U(a,\delta)$。

2. 试用绝对值不等式和区间表示点 3 的 $\frac{1}{2}$ 邻域。

第二节 函 数

一、函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，常常会发现问题中的变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在着相互联系、相互依存的关系。本章仅讨论两个变量的情况，先看下面的例子。

【例 1】 自由落体运动，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 S，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 S 与 t 之间的依存关系由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度。假定物体着地时刻为 $t=T$，当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一个值时，由上式就可确定 S 的相应数值。

【例 2】 金属棒受热后要伸长，根据实验结果，棒长 l 与温度 T 之间有如下的依存关系：

$$l=l_0(1+\alpha T),$$

其中 l_0 是 0℃时的棒长，α 是一个常数，称为线胀系数，它的值与金属材料有关。在 T 的取值范围内任取一值时，由上式可求出 l 的相应值。

上面两例虽然实际意义不同，但都表达了两个变量之间的依存关系。这种相互依存关系对应一个法则，当一个变量在它的取值范围中任取一个值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应。两个变量之间的这种依存关系称为函数关系，下面我们给出函数的定义。

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集，如果对任意的 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

称 D 为这个函数的定义域，称 x 为自变量，称 y 为因变量。

当自变量 x 取确定值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集称为这个函数的值域。

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可改用其他字母，如 F，g，f_1，f_2 等。这时函数就记作 $y=F(x)$，$y=g(x)$ 等等。

在实际问题中，函数的定义域是由实际意义决定的。如例 1 中定义域 $D=[0, T]$，在研究一个函数而不指明它的定义域时，我们规定它的定义域就是自变量使函数表达式有意义的一切实数值所组成的数集。例如，函数 $y=ax+b$，其中 a，b 为常数，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$。

【例 3】　求函数 $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$ 的定义域。

【解】　函数 $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$ 的定义域须满足下列条件

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ x+1>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-1。\end{cases}$$

用区间表示 $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$ 的定义域为 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$。

【例 4】　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$ 的定义域。

【解】　要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,\\ x-2\geqslant 0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 3,\\ x\geqslant 2。\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为区间 $[2, 3]$，所以函数的定义域为 $[2, 3]$。

【例 5】　设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x)+1$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$。

【解】　$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

【例 6】 若 $f(x+1)=x^2+2x-3$，求 $f(x)$。

【解】 方法一，用置换法

令　$x+1=t$，则 $x=t-1$，代入原式中，

于是
$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)-3=t^2-4,$$
将 t 换成 x，即得 $f(x)=x^2-4$。

方法二，用凑元法

$$f(x+1)=(x+1)^2-1-3=(x+1)^2-4,$$

即
$$f(x)=x^2-4。$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。例如，$y=3x-2$ 是一个单值函数，而函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 则是多值函数。今后，如果没有特别说明，我们所提到的函数都是指单值函数。

二、函数表示法

为了能很好地表达函数关系，产生了表达函数的不同方法。函数的表示法通常有三种：表格法、图示法和公式法。

（1）以表格形式把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值表示出来叫做表格表示法，如大家熟悉的对数表、三角函数表等都是以这种方法表示函数。表格法的优点是表中有对应数值，可以直接查用；缺点是数据不全，不便于作理论研究。

（2）将函数 $y=f(x)$ 的关系用一条曲线直观地表达出来的方法叫做图示表示法。图示法的优点是直观性强，函数的主要特征一目了然；图示法的缺点是不便于作理论推导和计算。尽管如此，我们在研究函数时仍常常利用它的图形。

（3）以数学公式表示函数的方法叫做公式表示法，公式法的优点是简明准确，便于理论分析；缺点是不够直观。

我们一般用公式法表示函数，为了研究函数也常常利用它的图形，从图形上去了解它的变化情况。

在实际问题中有些函数，当自变量在不同的范围内取值时，对应法则不能用同一个公式表达，而需要用两个或更多个公式来表示，这类函数称为分段函数。

【例 7】 旅客乘坐飞机可免费携带不超过 20kg 的行李，若超过 20kg，每千

克交运费 a 元，试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系。

【解】　由题意可知应考虑以下两种情况：

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，运费 $y=0$；

(2) 当 $x>20$ 时，运费 $y=a(x-20)$。

于是所求函数是一个分段函数，可以写成：

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ a(x-20), & x>20。\end{cases}$$

【例 8】　设

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & 当\ x>1。\end{cases}$$

求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$ 和 $f(3)$。

【解】　分段函数计算函数值时，要根据自变量的值所在的范围，用相应的表达式来计算。$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$，这个函数的图形如图 1-3 所示。

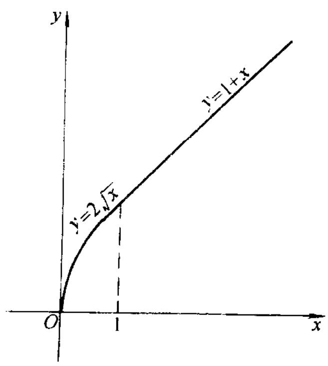

图 1-3

提醒注意的是，分段函数是公式法表达函数的一种方式，切不可因为它在不同的区间由不同的表达式来表示而误认为是几个函数。

三、函数的简单性态

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在正数 M，使得对于所有 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，那么称函数 $f(x)$ 在 D 上有界。如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上无界。

例如，$y=\sin x$，$y=\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。因为对于任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$。

又如，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界，但在区间 $(1, +\infty)$ 内是有界的。事实上，若取 $M=1$，则对于任何 $x\in(1,+\infty)$ 都有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$$

成立。由此可看出，一个函数是否有界，不仅与函数的对应法则有关，而且还与自变量定义区间有关。

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的，如图1-4所示；若当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 I 内是单调减少的，如图 1-5 所示。

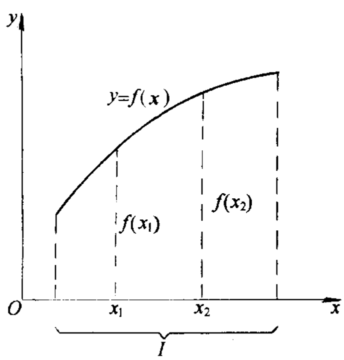

图 1-4

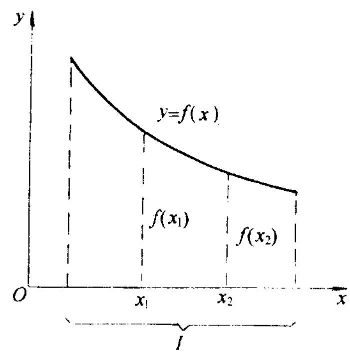

图 1-5

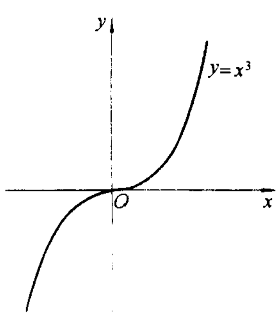

图 1-6

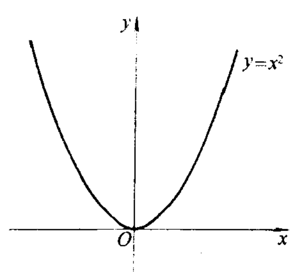

图 1-7

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，如图 1-6 所示。函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0]$上是单调减少的,在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,而对于区间$(-\infty,+\infty)$而言不是单调函数,如图 1-7 所示。

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$为偶函数；如果对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$为奇函数。

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。又如 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,如图 1-8 所示。奇函数的图形是关于坐标原点对称的，如图 1-9 所示。

在常见的函数中，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x-\cos x+1$ 既不是偶函数，也不是奇函数。

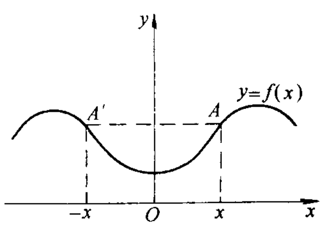

图 1-8

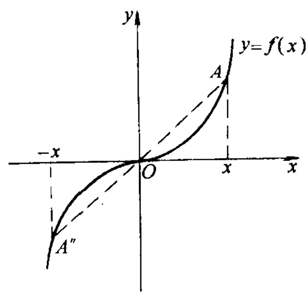

图 1-9

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域是 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm l\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 称为 $f(x)$的周期满足上述关系的最小正数称为最小正周期。通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos\dfrac{x}{2}$，$y=\tan 3x$ 都是周期函数，它们的周期分别是 2π，4π，$\dfrac{\pi}{3}$。

图 1-10 所示是一个周期为 l 的周期函数的图形，把$(-\infty,+\infty)$分成长度为 l 的许多区间，那么我们看到在每个区间上，函数图形有相同的形状。

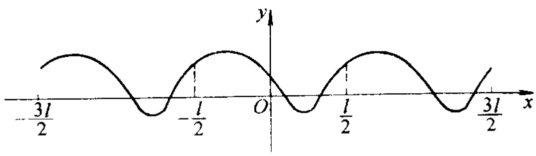

图 1-10

四、反　函　数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W，因为 W 是由函数值组成的数集，所以在 W 内任取一个数值 $y=y_0$，D 内必定有数值 $x=x_0$ 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$ 成立。这样的 x_0 可能不止一个，从图 1-11 上可看到，在 W 内任取一点 y_0 作平行于 x 轴的直线 $y=y_0$，这条直线与 $y=f(x)$的图形交点的横坐标就是适合 $f(x_0)=y_0$ 的 x_0。在图 1-11 中，这样的交点有两个，它们的横坐标分别是 x_0 及 x'_0。

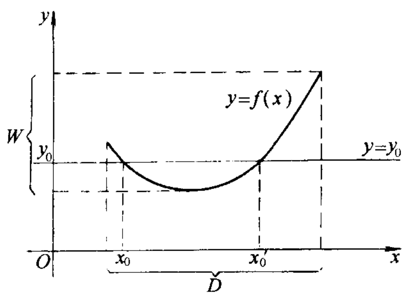

图 1-11

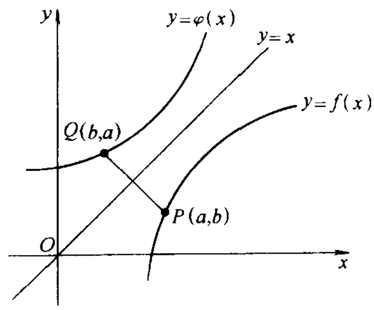

图 1-12

一般地，对于任一数值 $y\in W$，D 内至少存在一个 x 与 y 对应，即满足 $f(x)=y$。如果我们将 y 看作自变量，x 看作因变量，依据函数的定义，便会得到一个新的函数，我们称这个新的函数为函数 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=\varphi(y)$。这个函数的定义域为 W，值域为 D。相对于反函数 $x=\varphi(y)$来说，称原来的函数$y=f(x)$为直接函数。

由图 11-1 还可以看到，$y=f(x)$是单值函数，也不能保证它的反函数$x=\phi(y)$是单值函数。例如，函数 $y=x^2$ 对于值域 $[0, +\infty)$ 中任意一个 y 值，有一正一负两个不同的 x 值与之对应，即 $y=x^2$ 的反函数 $x=\pm\sqrt{y}$ 是多值函数。但在区间 $[0, +\infty)$ 上 $y=x^2$ 有反函数 $x=\sqrt{y}$ 是单值的，在区间 $(-\infty, 0]$ 上有反函数 $x=-\sqrt{y}$ 也是单值的。

一般地，如果函数 $y=f(x)$是单值单调函数则其反函数 $x=\varphi(y)$也一定是单值单调的。

设函数 $y=f(x)$的反函数为 $x=\varphi(y)$，因为 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$是变量 x 与 y

的同一方程，所以在同一坐标平面内它们有同一个图形。习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以我们可以将反函数 $x=\varphi(y)$ 改写作 $y=\varphi(x)$。

例如，$y=3^x$ 的反函数 $x=\log_3 y$ 可以记为 $y=\log_3 x$。

不难证明，在同一坐标平面内 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-12 所示。

【例 9】 求下列函数的反函数：

(1) $y=7x-5$；　　(2) $y=1+\lg(x+2)$。

【解】 (1)由 $y=7x-5$ 可解得 $x=\frac{y+5}{7}$，交换变量记号，即得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{7}(x+5)。$$

(2)由 $y=1+\lg(x+2)$ 解得 $x=10^{y-1}-2$，交换变量记号，即得所求的反函数为

$$y=10^{x-1}-2。$$

五、复合函数

先看下面的例子，在自由落体运动中，物体的动能 E 是速度 v 的函数 $E=\frac{1}{2}\times mv^2$（其中 m 为物体的质量)，而速度 v 是时间 t 的函数 $v=gt$。当我们要研究动能与时间的关系时，就须将 $v=gt$ 代入 $E=\frac{1}{2}mv^2$，结果动能 E 就成了时间 t 的函数

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2。$$

一般地，设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域内或其一部分取值时，$\varphi(x)$ 的函数值 u 均落在 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，并称 x 为自变量，u 为中间变量。

根据这个定义，易知复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 的定义域内所对应的 x 值的数集，它或者与 $\varphi(x)$ 的定义域完全相同，或者只是 $\varphi(x)$ 的定义域的一部分。

【例 10】 试求由函数 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 构成的复合函数。

【解】 将 $u=\sqrt{x}$ 代入 $y=\sin u$ 中，即为所求的复合函数 $y=\sin\sqrt{x}$，它的定义域为 $[0,+\infty)$。

【例 11】 三个函数 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成的函数为

$$y=\cos\sqrt{x^2+1},$$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。例如，函数 $y=\sqrt{1-u^2}$，$u=x^2+2$ 是无法复合的，因为对于任何 x 值，u 的值都在函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域之外。

为了研究的方便，往往要分析一个比较复杂的函数是由哪几个比较简单的函数复合而成的。

【例 12】 分析函数 $y=5^{(2x-1)^2}$是由哪几个函数复合而成的。

【解】 函数 $y=5^{(2x-1)^2}$可以看作是由下列三个函数 $y=5^u$，$u=v^2$，$v=2x-1$ 复合而成，其中 u 与 v 为中间变量。

六、初等函数

（一）基本初等函数

基本初等函数包括：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。基本初等函数是最常见、最基本的一类函数，这些函数在中学数学里已经讨论过，为了今后研究的方便，下面给出这些函数的图形和简单性质。

1. 幂函数 $y=x^\mu$（μ 为常数）

当 μ 为正整数时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$。

当 μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$。

当 μ 为正分数 $\frac{m}{n}$（m，n 为互质的正整数），则 n 为奇数时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；n 为偶数时，定义域为 $(0, +\infty)$。

当 μ 为负分数 $-\frac{m}{n}$（m，n 为互质正整数），则 n 为奇数时，定义域为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$；n 为偶数时，定义域为 $(0, +\infty)$。

当 μ 为无理数时，规定 x^μ 的定义域为 $(0, +\infty)$。

总之，幂函数的定义域随 μ 的值而定，但无论 μ 取何值，它在 $(0, +\infty)$ 内都有定义，而且图形都经过 $(1, 1)$ 点。

在幂函数 $y=x^\mu$ 中，$\mu=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 等情形最常用，它们的图形如图1-13所示。

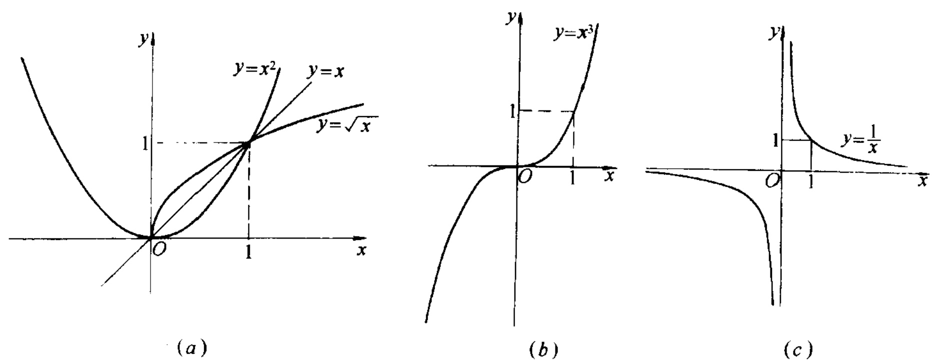

图 1-13

2. 指数函数 $y=a^x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$）

指数函数的定义域为（$-\infty$，$+\infty$）。

当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少。指数函数 $y=a^x$ 的图形总经过（0，1）点，且位于 x 轴上方，如图 1-14 所示。

3. 对数函数 $y=\log_a x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$）

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，其定义域恰为 $y=a^x$ 的值域即为（0，$+\infty$）。

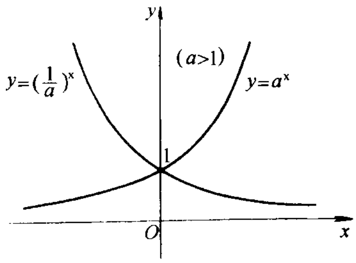

图 1-14

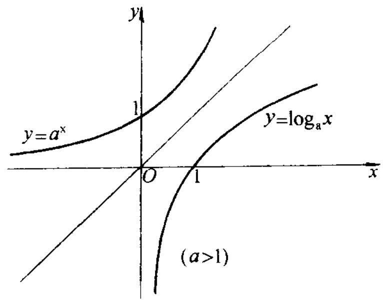

图 1-15

当 $a>1$ 时，对数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数单调减少。对数函数 $y=\log_a x$ 的图形同与其对应的指数函数 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右侧，且经过（1，0）点，如图 1-15 所示。

在工程技术中，常用以常数 e 为底的指数函数 e^x 和以 e 为底的对数函数简记为 $\ln x$。$\ln x$ 称为自然对数，这里 $e=2.7182818\cdots$，为一个无理数。

4. 三角函数

常用的三角函数有

正弦函数 $y=\sin x$，如图 1-16 所示；

余弦函数 $y=\cos x$，如图 1-17 所示；

正切函数 $y=\tan x$，如图 1-18 所示；

余切函数 $y=\cot x$，如图 1-19 所示。

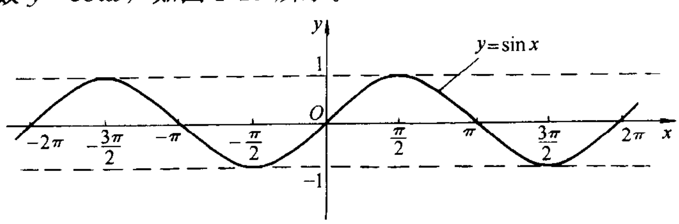

图 1-16

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域均为（$-\infty$，$+\infty$），它们都是以 2π 为周期的周

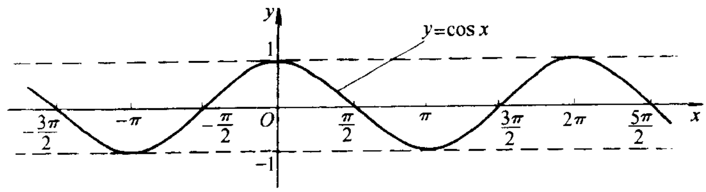

图 1-17

期函数，且为有界函数。正弦函数为奇函数，余弦函数为偶函数。

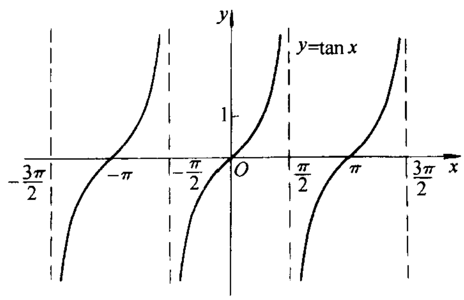

图 1-18

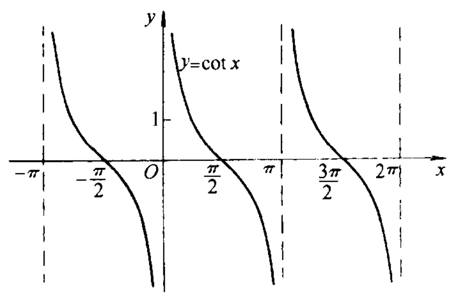

图 1-19

$y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 以外的全体实数。$y=\cot x$的定义域为除去 $x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 以外的全体实数。$\tan x$ 与 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数，且为无界函数。正切函数与余切函数都是奇函数。

以外，还有正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$，它们分别为余弦函数和正弦函数的倒数，即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，它们都是以 2π 为周期的周期函数。

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的反函数依次为

反正弦函数 $y=\mathrm{Aarcsin}x$，如图 1-20 所示；

反余弦函数 $y=\mathrm{Aarccos}x$，如图 1-21 所示；

反正切函数 $y=\mathrm{Aarctan}x$，如图 1-22 所示；

反余切函数 $y=\mathrm{Aarccot}x$，如图 1-23 所示。

反三角函数都是多值函数，我们可以选取这些函数的单值分支，称为主值分支，分别记作

$y=\arcsin x$ 定义域为 $[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；

$y=\arccos x$ 定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$；