对策论

竞争的数学模型和应用

王荫清　张华安

成都科技大学出版社

对 策 论

竞争的数学模型和应用

王荫清　　张华安

成都科技大学出版社

内 容 简 介

全书共分六章，第一章概论，第二章矩阵对策，第三章三人零和对策，第四章n人零和对策，第五章非零和对策，第六章无限策略对策。

本书以介绍对策论的基本内容为主，力求作到通俗易懂，适合自学。

本书可作为高等院校理、工、管各科非运筹专业对策论课程的教材，也可作为广大管理干部、工程技术人员和从事经济工作人员的自学材料和培训教材。

对 策 论

竞争的数学模型和应用

王荫清、张华安编著

责任编辑：王泽彬

成都科技大学出版社出版
四川省新华书店发行
成都科技大学印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张：8.25
1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷
印数：1—3000　字数：180千字

ISBN7—5616—0047—X/T·14

统一书号：15475·19 定价：1.38元

序

凭借策略以决胜负的竞争性活动，自古以来，即为人类的一项重要的活动．大而互相争城夺地，折冲尊俎；小而互相猜拳对奕，桥戏方城．然而对这项活动进行科学研讨，则始于本世纪二十年代，首倡于波雷尔(E.Borel)，创建于冯·诺意曼(Von. Neumann)．min-max 定理首次揭示了这一活动的基本性质，这一学科被称为博奕论．五十年代引起众卓越的青年学者的瞩目，硕果累累．

冯·诺意曼对博奕论的研究，实渊源于一些经济问题的启迪．而博奕论的创建，对经济学亦有所贡献．《博奕论与经济行为》一书已成为经典著作．此外，受到博奕论的影响，人类的另一项重要活动——决策成为科学的研究对象．如果说，博奕论是对竞争性活动进行数理的解析的探讨，那末博奕模拟(Gaming)则是对这种活动的一种实验性研究．沙盘作战，古已有之．博奕模拟受到重视，自然意料中事．运筹学的研究对象无论是排队、规划、搜索等等均为人类活动，博奕论自然成为运筹学的一个重要分支．

三十年来，运筹学在我国受到重视，得到了发展．但在博奕论方面，虽有水平甚高的工作，然而总的说来，文章不多，书亦甚少．近年来，关心者较众，王荫清同志即为其中重要成员．他教学有年，研究旨趣亦高，对博奕论知之甚

多，且对于相关学科，如经济数学等，亦颇多涉猎．现执笔成书，自乐为序．

许国志

1987年3月

目　　录

第一章 概 论

1.1. 什么是对策

在我们生活的社会中，常常可以观察到各种各样带有竞争性质的现象．例如：日常所见的下棋、打牌、球赛、各种体育竞赛和某些游戏；经济领域内的广告与销售活动，贸易谈判，价格竞争，生产管理；政治领域内的谈判策略，斗争策略；军事领域内的进攻与防御，战略与战术等等．这些现象都是冲突双方处于一种竞争或对抗状态中，并且由于参加双方在竞争中各自采取不同策略的组合而得到不同的结果，这种带有竞争性质的现象我们称之为对策现象，或简称为对策．现在让我们来看几个对策现象的例子．

例1.1． 某厂欲转产新产品，把它们分别叫做产品1,2,3，该厂现有设备为铣床50台，每周共运转2000小时，车床35台，每周共运转1400小时，磨床15台，每周共运转600小时，加工各种新产品所需各种机床运转时数如下表：

	铣床	车床	磨床
产品 1	9小时	5小时	3小时
产品 2	3小时	4小时	0小时
产品 3	5小时	0小时	2小时

产品1，2，3，的单件利润分别为30元、12元、15元．问怎

样安排每周产品1，2，3的产量才能使工厂获得最大利润.

又如在农业生产中，农民为了增加农业收入，必须考虑到水、肥、气候、田间管理、土地、农产品价格等各种自然和社会条件去种植不同作物，那么农民应如何安排种植计划才能获得最大利润呢？

例1.2. 两家公司为分享某种产品的市场，正在各自拟定下一年的销售计划，以便扩大销售量(此种产品市场需求量为定数，一家扩大销售量，另一家必减少销售量)，每家公司都在考虑用三种不同的办法来扩大自己的销售量，即(1) 改进包装；(2) 加强广告宣传；(3) 适当削价. 这三种办法所需费用大体相当，且根据公司财力每家公司只能在这三种办法中选用一种，各种办法的组合对于公司Ⅰ销售增长的百分比如左表(表中正数表公司Ⅰ销售增长数，同时也是公司Ⅱ销售减少数，负数表示公司Ⅰ销售减少数，也是公司Ⅱ销售增长数)，问各公司在不知道对方采用哪种方法之前如何作出自己的决策？

		公司Ⅱ		
		1	2	3
公司Ⅰ	1	−3	1	2
	2	1	2	1
	3	1	0	−2

例1.3. A、B两个游泳队将举行一次重要的游泳比赛，每个队都有一名在100米蝶泳，仰泳，及俯泳各项目中游得很出色的运动员(分别称为甲，乙)，可是比赛规则不允许把他们排在两个以上的非接力项目中，且赛前双方都不知道对方安排的队员名单，问A队的教练应怎样安排自己队的比赛名单(决定后不准更改)，才能获得更多的分？

下表给出A、B两队参加者赛前已达到的最好成绩：

	参加者	1	2	甲	1	2	乙
项目	蝶泳	59.7	1:03.2	57.1	1:01.4	1:04.8	58.6
	仰泳	1:07.2	1:08.4	1:03.2	1:04.7	1:06.5	1:01.5
	俯泳	1:14.1	1:15.1	1:10.3	1:13.4	1:16.9	1:12.6

记分法为第一名5分，第二名3分，第三名1分，以后名次无分．两队教练都相信他们各自的队员在这次比赛中能达到他们各自已达到过的最好成绩．

例1.4. B上校和他的敌人都打算适当地分配自己的兵力去占领两个据点．假设B上校有四个团的兵力，他的敌方有三个团的兵力，双方都把这些兵力分配到两个据点去．B上校有五种不同的方法来分配他的四个团的兵力．敌方有四种不同的方法来分配他的三个团的兵力．双方各种分配办法的组合对B上校来说其得失如下表：

		敌方所用方法			
		(3·0)	(0·3)	(2·1)	(1·2)
B上校所用方法	(4·0)	4	0	2	1
	(0·4)	0	4	1	2
	(3·1)	1	−1	3	0
	(1·3)	−1	1	0	3
	(2·2)	−2	−2	2	2

问B上校在不知道对方兵力分配的情况下，用何种方法分配自己的兵力，方能最好完成任务？

从以上例子可见，对策论就是研究在竞争场合下参加者

为争取获胜应如何作出决策的数学理论和方法．在这种典型的竞争场合中每个参加者的决策能够对事件的结果产生一定影响，但不能单独完全决定事件的结果，机会也不能单独决定事件的结果．每个参加者只能在双方可能采取的行动和机会的条件下选择一种最优的行动方针，从而得到竞争事件的结果．还要注意，对策论所研究的现象与概率论所研究的纯机会现象是有区别的(虽然两者都研究带有竞争性质的现象)．概率论所研究的竞争现象纯粹由机会来决定而不受参加者的决策的影响．如掷骰子．而对策论所研究的竞争现象则必须受到参加者双方决策的影响．如玩扑克牌，其结果主要取决于参加双方的出牌方法(即决策)而不是发牌的机会．

对策论的早期应用在我国有着重要的成就．如战国时期“齐王赛马”就是一个典型的例子．战国时期齐国的国王有一天约定与田忌进行赛马，双方约定各自从自己的上、中、下三种等级的马匹中抽出一匹马参加比赛，每匹马只参加一次比赛，共赛三次，每次赛后负者将给胜者千金．当时齐王的马比田忌的同等级马都强，看来田忌要输三千金了．这时田忌的一个谋士给田忌出了一个主意，每次比赛先让齐王说他要出那一匹马，然后让田忌的下等马对齐王的上等马(负一场)，田忌的上等马对齐王的中等马(胜一场)，田忌的中等马对齐王的下等马(又胜一场)，结果田忌二胜一负反得千金．在国外最初用数学方法去研究对策现象的是德国数学家E．Zermelo．他在1912年用数学方法证明了国际象棋下述三种着法(自始至终的一种走法)必定存在一种：(1) 不依赖黑方如何白方总取胜的着法；(2) 不依赖白方如何黑方总取胜的着法；(3) 有一方总能达到和局的着法(当然究竟存在

那一种着法未能指出)．1921年法国数学家E．Borel讨论了几种个别的对策现象，并引入了一些概念．如“最优策略”等，同时猜测出一些对策的结果．直到1928年美籍匈牙利人J．V．Neumann证明了对策论的基本定理——最大值最小值定理后，对策论的理论才坚实的建立起来了．第二次世界大战期间军事上生产上提出了许多对策问题，使对策现象成为许多数学家研究的对象，并获得了一系列的成果，从而形成了数学的一个新分支——对策论．1944年J．V．Neumann和O．Morgenstern合著的“对策论与经济行为”一书问世，使对策论的数学理论更加系统和完善．同时也受到各方面的充分重视，而在经济、军事、政治上日益被广泛应用．1965年美国数学家R．Isaacs提出的追踪问题中追逃双方都能自由决策行动的微分对策理论，更引起了控制论专家们的密切注意和极大兴趣．微分对策可以看作是由利益相反的双方进行控制的控制过程，因此它是一类双边或多边的最佳控制问题．1971年A．Friedman确立了微分对策的数学理论，使微分对策渐趋系统和完善．

对策论作为运筹学的一个分支，虽然只经历了短短地几十年的时间，但它的研究对象和处理问题的方法却引起了人们的广泛注意，成为近年来数学中发展得最快的一个分支．

1.2．对策论的基本要素

在各种各样的对策现象中，我们可以看出它们具有共同的特征是：两个或两个以上具有利害冲突的参加者处于一种不相容的状态中，即一方的行动必须取决于对方所采取的行

动．对策论就是研究这种不相容情况的数学理论．要研究它，就要首先抓住它的普遍本质的要素，这些要素就是：

1． 局中人——一场竞争(称为一局对策)的参加者．这当然是对策论的基本要素，如果没有参加者，就不会出现竞争或斗争现象．因此也就没有对策现象．但要注意的是局中人指的是竞争中有决策权的参加者，而非既无决策权且与结局无关的人．局中人也不能只理解为一个人，他可以是利害一致的集团、公司、球队等．局中人还可以视为自然界．如气候、病虫害、自然环境等等．

对策现象依局中人的多少而分为一人对策，二人对策，多人(n人，$n\geqslant 3$)对策．所谓n人对策并非指这种对策现象恰好有n个人参加，而是按照利害冲突一切参加者都被分在n个互斥的集体里(每个人只能属于一个集体)，每个集体都具有共同的利益，不同集体利害冲突不同，这n个利害不一致的集体就看作n个局中人．如玩桥牌，虽然有四个人参加，但因南北两方利害一致，应视为一个局中人，东西两方也应视为一个局中人．因此玩桥牌属于二人对策．

一人对策即通常最大化问题，不管这个人进行选择的可能性有有限个或无限个，都可以用初等数学或微积分解决．因此对策论只考虑二人以上对策．

2． 策略——局中人在一局对策中为对付对方而采取的一个可行的、自始至终通盘筹划的行动方案．策略也可理解为局中人在一场竞争中所采取的一个从头到尾的全部完整的计划方案．可见一个策略并非局中人在一场竞争中某一步行动方案，或每步临时作出的决定．如二人对策的象棋比赛中，甲方采用“当头炮”就不能叫做这是甲方的一个策略，

它只是甲方策略的一个组成部份，我们把它叫做一个“着”.一个策略只能包含有限个着. 在一局对策中局中人的一个策略有时要分成几个阶段去完成，我们把这种阶段叫做局中人的“步”. 局中人的一个策略只有有限步，而每一步只包含有限个着. 局中人的策略的全体叫做这个局中人的策略集.对策现象按照局中人策略的个数又分为：有限对策，即各局中人的策略只有有限个(或策略集为有限元集)；无限对策，即局中人的策略有无限个(或策略集为无限元集). 如齐王赛马中田忌的策略集为有限元集，他的策略的个数等于三匹马取不同的排列数，即$A_3^3=3!=6$个.在经济领域中由价格竞争所出现的对策现象，因为价格作为策略有无限多个，因而此时局中人的策略集为无限元集.

我们把每个局中人的策略集中各取一个策略所组成的策略组称为一个“局势”.

3. 支付——一局对策结束后，局中人所获得的结果.支付又可叫得失，它对于每个局中人来说，可以是按照某种确定的竞争规则得了多少或失了多少，也可以是胜利了或失败了，也可以是收入多少(赢了)或支出多少(输了)等等. 一局对策结束时每个局中人的支付显然是每个局中人策略的函数，也就是局势的函数. 因此，也可以把支付称为支付函数. 如果在任一局势中所有局中人得失相加总是零，则称这种对策为零和对策，否则称为非零和对策. 如齐王赛马就是零和对策. 因为在一个局势中如果田忌收入了两千金则齐王必支出两千金，两人的得失相加总是零. 经济领域中的对策现象有不少是非零和的，这是因为一个经济过程总是要增加(或减少)财富.

第二章　矩阵对策

2.1.　矩阵对策的定义

矩阵对策(又叫有限对抗对策)就是二人零和有限对策，这种对策模型虽然是简单的，但它确是非常重要的，以后我们将看到一些复杂的对策模型都可化为矩阵对策.

由上述定义可知矩阵对策的局中人只是两个，我们用P_1，P_2来代表，每个局中人都只有有限个策略可供选择(为了和后面的概念区别，我们把本章的策略叫纯策略). 设P_1的纯策略有m个，用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_m$来表示，$P_2$的纯策略有$n$个用$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n$来表示，我们用$S_1$表局中人$P_1$的策略集，$S_2$表局中人$P_2$的策略集，则

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_i,\cdots,\alpha_m\}$$
$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_j,\cdots,\beta_n\}$$

由于矩阵是零和的，因此在一局对策结束时，局中一人的收入必等于局中另一人的支出.

在本章我们假定，局中人的每个策略只要一个阶段即可完成，因此每个策略只有一步.

例2.1.　局中人P_1从(1,2,3)这组数里选出一个数，局中人P_2在不知道P_1选择了那个数的情形下他也从(1,2,3,4)这组数里选出一个数来，当两人都选定以后一局对策结束. P_2按照下表支付给P_1一笔数目：

P_1 \ P_2	1	2	3	
1	2	1	10	11
2	0	-1	1	2
3	-3	-5	-1	1

也就是说，若P_1选1这个策略而P_2选3这个策略时，P_2付给P_1 10个单位，若P_1选3这个策略而P_2选2这个策略时，P_2支付给P_1负5个单位，亦即P_1付给P_2 5个单位．这样一个支付的数表

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

我们以后称为局中人P_1的支付矩阵或赢得矩阵，只要把上述数表中的所有数字都换成它的相反数，它就是局中人P_2的支付矩阵．

对于矩阵对策而言，只要给定了一个支付矩阵，就给出了一个具体的对策现象，我们所要研究的重要问题就是，局中人如何选择一个好的策略，使自己支付比其它策略支付都好．

一般情况，若局中人P_1的支付矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

或$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则局中人P_2的支付矩阵为$A^*=(-a_{ij})_{m\times n}$．它表明局中人$P_1$有$m$个纯策略$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$，局中人$P_2$有几个纯策略$\beta_1;\beta_2,\cdots,\beta_n$，对任一局势$(\alpha_i,\beta_j)$(即局中人$P_1$选纯策略$\alpha_i$，局中人$P_2$选纯策略$\beta_j$所构成的局势)，局中人$P_1$根据支付矩阵$A$从局中人$P_2$处收入$a_{ij}$．

对一个给定的矩阵对策，若局中人P_1的策略集为$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_m\}$，局中人$P_2$的策略集为$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n\}$，$P_1$的支付矩阵为$A$，则可把这个矩阵对策简记为$G=\{S_1,S_2,A\}$.

2.2. 具有鞍点的矩阵对策和最优纯策略

先看下面这个例子.

例2.2. 给定对策$G=\{S_1,S_2,A\}$，其中$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

也可把G写成下表：

		P_2			
		β_1	β_2	β_3	β_4
	α_1	-5	3	1	20
P_1	α_2	5	5	4	6
	α_3	-4	-2	0	-5

由P_1的支付矩阵A可以看出，局中人P_1的最大赢得是20，P_1想赢得20就要选择纯策略α_1，局中人P_2根据支付矩阵A也在考虑，他猜测P_1想赢得20这种心理就选用纯策略β_1，这样局中人P_1不但不能赢得20反而要支出5.同样，局中人P_2根据支付矩阵A想赢得最大值5，就要选用纯策略β_1或β_4，此时局中人P_1也可选用纯策略α_2或α_1来对付P_2，使他反而支出5或20. 所以，如果局中人都是冷静的而又不冒风险的话，他就应该从最坏的情形中去选择一种最好的结果.