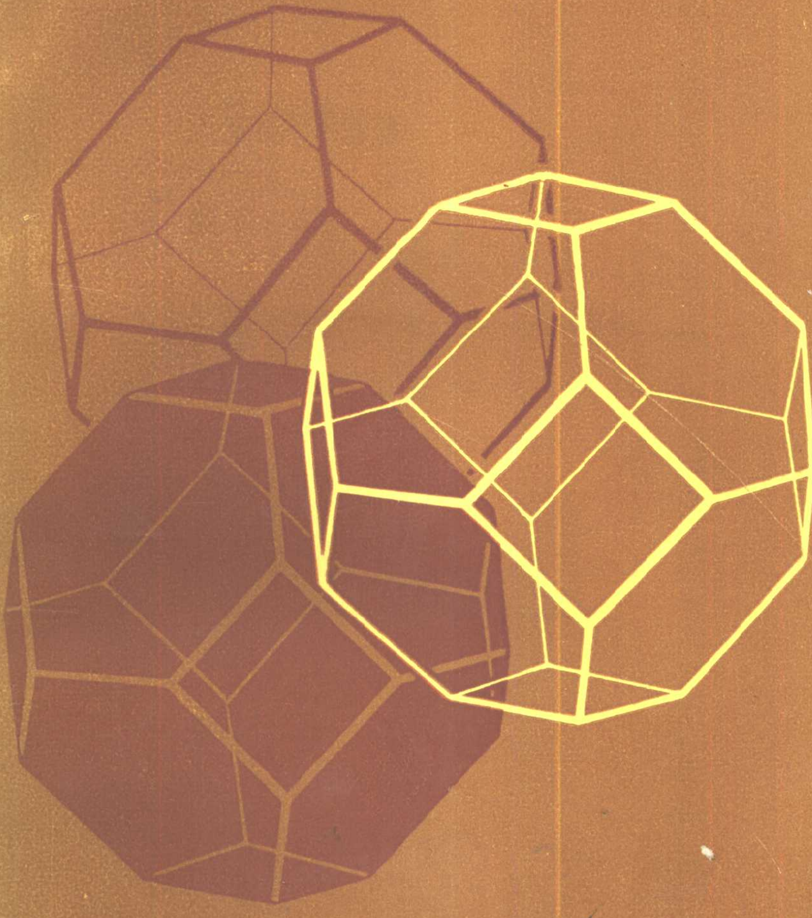

组合计数方法及其应用

屠规彰 著

组合计数方法及其应用

屠规彰 著

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书介绍了组合计数的各种方法和技巧，列举了许多实例，说明组合计数方法在工程技术和自然科学各分支学科中的广泛应用，并注意到尽量反映近年来组合计数方法的新进展。书中对渐近计数方法作了比较系统的介绍。

本书可供数学工作者、有关的科技工作者和高等院校数学系师生参考。

组合计数方法及其应用
屠规彰 著
责任编辑 张鸿林、杜小杨
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1981年5月第一版 开本：787×1092 1/32
1981年5月第一次印刷 印张：8 3/8
印数：0001—6,120 字数：191,000

统一书号：13031·1547
本社书号：2122·13—1

定价： 1.30 元

前　　言

在工程技术与自然科学的各个分支中，我们会遇到大量的计数问题．例如在计算机科学中，为了解决某个特定问题，通常有好几种算法可供选择，究竟哪一种算法最优呢？为了回答这个问题，就需要细致地分析各种算法的运算次数，计算出在最不利情形下运算次数是多少，在原始数据按寻常几率分布时平均运算次数又是多少．在统计物理中，为了计算一个系统处于某种特定状态下的几率，就需要求出该系统有多少种可能的状态．在化学及遗传学中，则需要研究某类分子按一定法则互相结合时可能形成多少种结构．又如在数字通信的纠错编码中，我们会遇到码字的重量计数问题，由此可以导出相应编码的纠错能力．在纠错编码的理论分析中，则会遇到有限域上不可约多项式、本原多项式的计数问题．为了求解这些形形色色的计数问题，就需要用到组合计数的方法和技巧．

简单说来，考察一类有限或离散集合中元素的各种排列和组合、选择和配置、研究相应的计数或构造，这就构成现代数学的一个重要分支——组合数学所研究的对象．组合数学自本世纪六十年代以来，发展尤为迅速，目前它的成果已被广泛地运用于工程技术及各个自然科学部门中．

本书共分六章，系统地介绍了组合计数的各种方法和技巧，并列举了许多应用的例子，这些例子既有助于更好地理解组合计数的理论和方法，并且也显示了组合计数方法的丰富多采的应用．在编写方面本书作了某些新的尝试．例如，迄

今在有关组合数学的专著中，对渐近计数这一重要课题都缺乏系统的论述，有关的结果散见于各处，本书则专辟一章，结合组合计数的特点，对渐近方法作了比较系统的介绍；又如在第五章群论方法中，还讨论了经典的 Pólya-de Bruijn 方法所不适用的纠错编码理论中的重量分布问题；另外，由于近年来计算机算法的研究进展很快，在第六章中还介绍了两种遍数性质的算法及算法分析．

由于作者水平有限，书中必有不少不足以至谬误之处，恳望得到同志们的批评指正．作者诚挚地期望今后国内会有更多更好的有关组合数学的书籍出版，特别是本书未涉及组合数学的另一分支——构造性组合数学，因此深盼能早日见到国内这方面专著的出版．

作者谨在此对他的导师冯康先生的大力支持、指导和关怀表示深切的感谢；并向关肇直先生多年来给予的勉励、指导和关怀表示衷心的感谢．此外，作者还要向林群、郭本瑜、朴顺玉、唐云、麦洁华等同志的热情帮助、鼓励和关切表示由衷的谢意．

万哲先同志仔细地审阅了本书的原稿并提出了宝贵的修改意见，作者谨向他表示诚挚的感谢．

作　　者

1977 年 9 月于北京

目　　录

第一章　初等计数函数 ………………………… 1
1.1.　排列与组合 ………………………… 1
1.2.　二项式系数 ………………………… 9
1.3.　三项递推式的一般解 ………………………… 21
第二章　生成函数方法 ………………………… 28
2.1.　Fibonacci 数与优选法 ………………………… 28
2.2.　生成函数的基本方法 ………………………… 33
2.3.　复合函数的求导公式 ………………………… 43
2.4.　集合的分划，Stirling 数与 Bell 数 ………………………… 52
2.5.　Bernoulli 数与多项式，求和公式 ………………………… 60
第三章　反演技巧 ………………………… 71
3.1.　重排问题与环状字计数 ………………………… 71
3.2.　第一反演公式 ………………………… 76
3.3.　Möbius 反演公式 ………………………… 85
3.4.　“入与出原理”及其应用 ………………………… 98
3.5.　矩阵的常值 ………………………… 107
第四章　渐近计数 ………………………… 115
4.1.　概述 ………………………… 115
4.2.　和式变换方法 ………………………… 121
4.3.　生成函数方法 ………………………… 142
4.4.　渐近式的直接推导例：拉丁矩阵的计数 ………………………… 162
第五章　群论方法的应用 ………………………… 171
5.1.　置换群和等价类 ………………………… 171
5.2.　Pólya-de Bruijn 计数定理 ………………………… 181
5.3.　置换群轮换指标的计算 ………………………… 193

5.4. Pólya 计数方法的应用 …………………………………… 201
5.5. 纠错编码理论中的码字重量分布问题 ……………… 206
第六章 计算机算法…………………………………………… 222
6.1. 两种遍数性质的算法 ………………………………… 222
6.2. 计算机算法分析：分类问题的“气泡”算法 ………… 240
参考文献……………………………………………………… 250
名词索引……………………………………………………… 259

第一章　初等计数函数

1.1. 排列与组合

1.1.1. 四种基本的排列组合问题

我们首先从一些简单的例子入手来说明排列和组合这两个基本概念。

问题 1.　有三个不同颜色的球 a, b, c，每次取出二个排成一排，共有多少种排法？

容易得出，共有六种排法，它们是

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

这里问题中的"排成一排"四个字意味着我们强调两个球的先后次序，例如 ab 与 ba，同样是由两个球 a 与 b 组成的，但因次序不同，便看作是不同的排法。

问题 2.　有三个不同颜色的球 a, b, c，每次取出二个构成一组，共有多少种取法？

这里"二个构成一组"意味着我们所关心的只是一个组由哪二个球组成，而不计较它们之间的次序。对于问题 2 易见共有三种取法，即

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}.$$

在上面的写法中 $\{a, b\}$ 也可以写作 $\{b, a\}$，两者都表示由 a, b 两个球构成的那一组。

从这两个简单例子中，我们可以引出排列和组合的定义：

定义 1.　设 $\mathscr{A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 是由 m 个不同元构

成的一个集合，则称自 $\mathscr{A}$ 中有序取出的 n 个元为 $\mathscr{A}$ 的一个 n-排列，而称由 $\mathscr{A}$ 中无序取出的 n 个元为 $\mathscr{A}$ 的一个 n-组合.

于是我们可以说，3 个不同的元可以构成 6 种 2-排列，3 种 2-组合.

问题 3. 有三个盒子甲、乙、丙，每个盒子中放着颜色相同的球，甲中为球 a，乙中为球 b，丙中为球 c. 现从这三个盒子中任意取出两个球排成一排，问有多少种不同的排法？

这里"任意取出"是指两个球既可取自不同的盒子，也可取自同一盒子，换言之构成一排的两个球可以是同一色的. 易见共有 9 种排法：

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc.$$

这种排列称作是"允许重复"的排列，问题中的"任意取出"还意味着我们对重复的次数不加限制. 同样，在"组合"的计算中也可以有重复. 由三种颜色的球构成的 2-组合，当允许重复时，共有 6 种取法，它们是

$$\{a,a\},\ \{b,b\},\ \{c,c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\}.$$

上面我们从四个简单的例子出发引出了四种最基本的排列组合问题. 下面我们转向一般情形的讨论.

命题 1. 由 m 个不同的元共可构成

$$[m]_n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) \qquad (1)$$

种不同的 n-排列.

证. 从 m 个不同的元中顺序取出 n 个元时，头一个元可从 m 个元中任取其一，计有 m 种取法；头一个元选定后，第二个元可从剩下的 $m-1$ 个元中任选一个，计有 $(m-1)$ 种取法；…当选取最后一个元时，还剩下 $m-n+1$ 个元可供选择，故第 n 个元有 $(m-n+1)$ 种取法；因此顺序选出 n 个元共有 $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$ 种方式.

公式(1)的一个重要的特殊情形是 $n=m$，此时 $[m]_n=[n]_n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$ 即为 n 个不同的元排成一行的各种排列之总数. $[n]_n$ 一般记作 $n!$，读作“n 的阶乘”：

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1. \tag{2}$$

此外，我们约定 $0!=1$.

在计算机算法中，有时我们需要按照一定的法则，逐次产生全部 $n!$ 个排列. 迄今已有许多种生成全部排列的算法(见 Nijenhuis[118], Beckenbach[30])，其中最有效的算法是由 Johnson 与 Trotter 提出的. 在这一算法中，后一排列可从前一排列中交换两个相邻元的位置得出. 例如对 $n=4$，由此算法得出 $4!=24$ 种排列为

表 1.

1234	1342	4321	2431
1243	1324	3421	4231
1423	3124	3241	4213
4123	3142	3214	2413
4132	3412	2314	2143
1432	4312	2341	2134

这一算法在 1975 年为 Азагян 等所进一步简化(见 Азагян, Тамразян [26]).

图 1 表出了以表 1 所列 24 个排列为顶点的凸多面体. 两个排列若其一可由另一交换两个相邻元的位置得出时，在图 1 中便取为相邻两顶点. 用图论的术语来说，由上述算法顺序得出的诸排列相当于此凸多面体上诸顶点间的一条 Hamilton 迴路.

命题 2. 由 m 个不同的元共可构成 $[m]_n/n!$ 种 n-组合.

证. 由定义，n-组合与 n-排列之区别在于前者不计较元的先后顺序，因此由每个 n-组合可以作出 $n!$ 个不同的 n-排列. 于是若有 $C_{m,n}$ 种 n-组合，则 $C_{m,n}\cdot n!=[m]_n$，由此 $C_{m,n}=[m]_n/n!$.

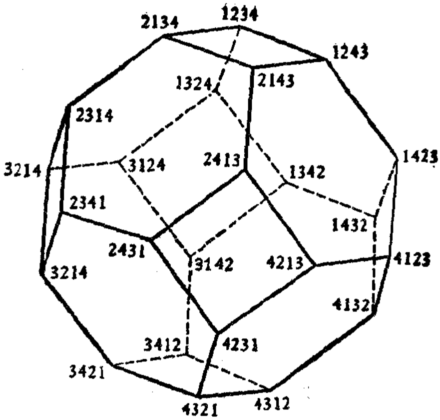

图 1. 由 24 个排列为顶点构成的凸多面体

$[m]_n/n!$ 一般记作 $\binom{m}{n}$.

$$\binom{m}{n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)/n! \qquad (3)$$

称为二项式系数,在组合分析中占有重要地位,我们将在下一节中详加讨论.

命题 3. 由 m 种不同的元可作出的重复次数不限的 n-排列个数为 m^n.

证. 实际上,从 m 种不同的元有序取出 n 个元时,由于元的重复次数不限,每次选取时均有 m 种方式,于是共有 $m\times m\times\cdots\times m = m^n$ 种选取方式.

命题 4. 由 m 种不同的元可作出的重复次数不限的 n-组合个数为 $\binom{m+n-1}{n}$.

证. 今将 m 种不同的元用 $1, 2, \cdots, m$ 予以编号,于是每个允许重复的 n-组合具有形式 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 其中

$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，因允许重复，其间等号可以成立。今将$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 对应于

$$\{a_1 + 0, a_2 + 1, \cdots, a_n + n + 1\},$$

此种对应是双向单值的，亦即不同的 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 对应不同的 $\{a_1, a_2 + 1, \cdots, a_n + n - 1\}$，反之亦然。但 $\{a_1, a_2 + 1, \cdots, a_n + n - 1\}$ 显然是集合 $\{1, 2, \cdots, m, m + 1, \cdots, m + n - 1\}$ 的一个不带重复的 n-组合，故共有 $\binom{m+n-1}{n}$种。

在上述证明中，我们将带重复的组合计数问题转化为不带重复的组合计数问题，这种转换技巧在组合计数中经常遇到。下面试再举一例说明之。

问题 4. 一个 n 个元的集合 $\mathscr{A}$，共有多少个子集合？

例如当 $\mathscr{A} = \{a, b, c\}$ 时，它的子集合计有

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

共 8 个，其中$\varnothing$表示不包含任何元的所谓“空集合”。

命题 5. 集合 $\mathscr{A}$ 的子集合个数为 $2^{|\mathscr{A}|}$，这里 $|\mathscr{A}|$ 表示集合 $\mathscr{A}$ 中元的个数。

证. 设 $\mathscr{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. $\mathscr{A}$ 的每个子集合 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s}\}$ 与一个二元序列 010…011…100 一一对应，其中在第 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 个位置上为 1，余为 0. 而由命题 3，此种 n-排列的个数为 $2^n = 2^{|\mathscr{A}|}$.

命题 3 也可以改述成另一种形式：一个 n 个元的排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，若元 a_i 可取自集合 $\mathscr{A}$ 中任意一元，则全部排列个数为 $|\mathscr{A}|^n$. 在这一陈述形式下，此命题显然可以推广成

命题 6. 一个 n 个元的排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，若元 a_i 可取自集合 $\mathscr{A}_i$ 中任一元，则全部排列个数为 $|\mathscr{A}_1| \times |\mathscr{A}_2| \times$

$\cdots \times |\mathscr{A}_n|$.

用集合论记号，命题 6 也可写成

$$|\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots \times \mathscr{A}_n| = |\mathscr{A}_1| \times |\mathscr{A}_2| \times \cdots \times |\mathscr{A}_n|. \qquad (4)$$

式中 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$ 表示诸集合 $\mathscr{A}_1$, $\cdots$, $\mathscr{A}_n$ 的直积，它由形如 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中 $a_i \in \mathscr{A}_i$ 的元所组成。

1.1.2. 阶乘函数

在上一小节的讨论中我们引出了计数函数 $[m]_n$，通常我们称

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \qquad (5)$$

为下阶乘函数。与之相应，我们定义上阶乘函数为

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1). \qquad (6)$$

下面的命题给出了上阶乘函数的组合学意义。

命题 7. 将 n 个不同的元，分放到 m 个不同的盒子中，每个盒子可容纳的元数不限，但必须计及放入时的先后次序(即所谓“有序的盒子”)，则共有 $[m]^n$ 种放法。

例如将元 $\{1, 2\}$ 分放到 2 个有序的盒子中，共有 $[2]^2 = 6$ 种放法：

$$\begin{array}{lll} \varnothing|1,2 & 1|2 & 1,2|\varnothing \\ \varnothing|2,1 & 2|1 & 2,1|\varnothing \end{array}$$

证. 假定 n 个元有 T_n 种放法。在 $n-1$ 个元的情形，每一种放法可以表示成

$$i_1 i_2 \cdots | i_k i_{k+1} \cdots | \cdots | \cdots i_{n-1}.$$

在这一排中有 $(n-1)+(m-1)$ 个记号(i_k 或 $|$)，于是将 i_n 放入时共有 $(n-1)+(m-1)+1$ 种方式，因此 $T_n = (m+n-1)T_{n-1}$，由此递推式即得 $T_n = [m]^n$.

同样，与 $[m]_n/n!$ 相应，我们给出 $[m]^n/n!$ 的组合学意义如下：

设 $\mathscr{A}$ 为由 m 个字母 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 所构成的一个有序集合，其次序为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. 一个由 $\mathscr{A}$ 中字母拼成的字 $x_1x_2\cdots x_n$，若满足条件 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，则称为一个递增字. 例如对 $\mathscr{A} = \{a, b, c\}$，$a < b < c$. 长为 2 的递增字共有 6 个：

$$aa, ab, ac, bb, bc, cc.$$

命题 8. m 个字母 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ 共可组成 $[m]^n/n!$ 个长为 n 的递增字.

证. n 个元在 m 个有序盒子中的每种分放方式均可对应一个递增字. 例如当 $m = 4, n = 7$ 时

$$\underbrace{|\ 3\ |}_{a_1}\quad\underbrace{|\ 251\ |}_{a_2}\quad\underbrace{|\qquad|}_{a_3}\quad\underbrace{|\ 647\ |}_{a_4}\longrightarrow a_1a_2a_2a_2a_4a_4a_4.$$

每种分放方式对应于一个且仅一个递增字，而对每个递增字计有 $n!$ 个不同的分放方式与之相应. 由此便可推出所述命题.

1.1.3. 两个几率统计问题

(i) (**Banach 火柴盒问题**，见 Feller[63]) 一个数学家，随身携带两个火柴盒，当他要用火柴时，随意从其中的一盒中取出一根. 假定开始时两个火柴盒中各有 n 根火柴，问在某一次该数学家发现拿出的那盒火柴已经用空时，另一盒中尚剩 $p(p < n)$ 根火柴的几率是多少?

解. 该数学家从开始使用两盒满的火柴起至发现所述情形止，共用去了 $2n - p$ 根火柴：$a_1, a_2, \cdots, a_{2n-p}$，其中 a_i 等于 A 或 B，表示第 i 根火柴取自盒子 A 或盒子 B. 此种排列显然有 2^{2n-p} 种(命题 3)，而欲出现所述情形，必须在 a_i 中

有 n 个 A 或 n 个 B，此种排列显然有 $2\binom{2n-p}{n}$ 个(命题 2)。因此所求几率等于

$$\binom{2n-p}{n}\Big/2^{2n-p-1}.$$

(ii) (**Boltzmann 分布**，见唐有祺[7]) 一个晶体体系由 n 个原子组成，其中有 n_1 个原子能级为 ε_1，n_2 个能级为 ε_2，$\cdots$. 每种能级 ε_j 又有 ω_j 种不同的量子状态，能级为 ε_j 的原子可以处于其中任一状态，问此种体系有多少种微观状态?

此问题相当于从 ω_1 种编了号的红球中取出 n_1 个(编号允许重复)，从 ω_2 种编了号的黑球中取出 n_2 个，…将它们排成一排共有多少种方式? 例如 $n_1=\omega_1=2$，$n_2=\omega_2=1$ 时共有 12 种：

$$\begin{array}{ccc} a_1a_1b & a_1ba_1 & ba_1a_1 \\ a_1a_2b & a_1ba_2 & ba_1a_2 \\ a_2a_1b & a_2ba_1 & ba_2a_1 \\ a_2a_2b & a_2ba_2 & ba_2a_2 \end{array}$$

为解决这一问题，我们首先注意到 n 个不同的球共有 $n!$ 种排列方式，如果同色球之间没有区别，则共有 $n!/n_1!n_2!\cdots$ 种排列，因为此相当于从 n 个位置中任意选出 n_1 个放红球，计有 $\binom{n}{n_1}$ 种。然后从 $n-n_1$ 个位置中选出 n_2 个放黑球，共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$，…故共有 $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots=n!/n_1!n_2!\cdots$ 种。但 n_1 个红球有 ω_1 种编号，且编号可以任取，故排列方式个数等于 ω_1 种元的可重复的 n_1-排列个数 $\omega_1^{n_1}$。因此总的排列方式个数亦即体系的微观状态数为

$$L=(n!/n_1!n_2!\cdots)\omega_1^{n_1}\omega_2^{n_2}\cdots=n!\prod_j \omega_j^{n_j}/n_j. \tag{7}$$

对于一个体系而言它的总粒子个数 n 与总能量 ε 是确定的，亦即

$$\sum n_j = n, \ \sum n_j\varepsilon_j = \varepsilon. \tag{8}$$

试问哪一种分布 $n_1, n_2, \cdots$ 所给出的微观状态数 L 为最大？此问题归结为在条件 (8) 下求目标函数 L 之极大. 应用 Lagrange 乘子法可解出状态数最大的分布为

$$n_j^* = (n/\omega)\omega_j e^{-\beta\varepsilon_j}, \ \omega = \sum \omega_j e^{-\beta\varepsilon_j},$$

其中 β 为常数. 此种分布在统计力学中称作 Boltzmann 分布.

本节讨论了几种简单但很基本的组合排列问题，在应用中我们会遇到一些更复杂的情形. 例如在排列计数中，我们可以对元的重复次数加上若干限制，对元的相邻关系或者位置提出某些要求；我们还可以考察环状的排列等等，这些问题的求解需要更多的技巧，我们将在以后各章中陆续讨论.

1.2. 二项式系数

1.2.1. 二项式定理

“二项式系数”的名称来自下面的二项式展开定理：

定理 A (二项式定理). 设 n 为非负整数，则

$$(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k \tag{1}$$

式中求和下标 k 遍及 0 至 n 的非负整数.

证. 因 $(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdots(1+x)$，在展开过程中，自 n 个括号 $(1+x)$ 中任选 k 个，取出 x，再从余下 $n-k$ 个括号中取出 1，便形成一个幂次 x^k，因此展开式中 x^k 前的系数即为 n 个元的 k-组合个数 $\binom{n}{k}$.

今将二项式系数 $\binom{n}{k}$ 排成下面的三角阵形式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

这一三角阵称为“**杨辉三角形**”.我国早在十一世纪中叶,在宋朝的《黄帝九章算术细草》中就列出了这个三角阵,用于开任意高次方根,较之欧洲人的同一发现要早三百多年.

在讨论二项式系数的各种性质之前,我们首先将 $\binom{n}{k}$ 的定义范围予以适当扩大. 为此注意到表示式(1.1.3)[1]的右边实际上对任何实数 m 均有定义,因此对于任意实数 a,我们定义

$$\binom{a}{k}=a(a-1)\cdots(a-k+1)/k!. \tag{2}$$

由此定义特别可以推出

$$\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}, \tag{3}$$

1) 式(1.1.3)表示1.1节第(3)式,又如命题(1.2.2)表示1.2节命题2,等等.