山东师范大学数学系
西北师范大学数学系 主编

数学物理方程

庄 万 萧 礼
洪良辰 刘中元 著

山东科学技术出版社

数学物理方程

庄　万　萧　礼
洪良辰　刘中元　编

山东科学技术出版社

1988年·济南

数学物理方程

庄　万　萧　礼
洪良辰　刘中元　编

山东科学技术出版社出版
（济南市玉函路）
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　9.25印张　180千字
1988年5月第1版　1988年5月第1次印刷
印数：1—5000
ISBN 7—5331—0283—5/O·25
定价 2.25 元

前　　言

1982年5月在济南召开的全国部分高等师范院校数理方程教学科研讨论会上，代表们切望能编出一部供高师数学系用的数理方程教材。1984年洛阳会议以后，我们分工合作着手进行这一工作。确定第一章由山东师范大学庄万编写；第二、三章由西北师范学院萧礼编写；第四章由北京师范大学洪良辰编写；第五章由河南师范大学刘中元编写。1985年初完稿后，由刘中元汇编成油印讲义，除作为征求意见稿外，先后在西北师范学院、西北民族学院、河南师范大学、山东师范大学多次试用。在此基础上，召开了统稿会议，逐章逐节讨论修改，最后由庄万、萧礼统一修改定稿。

本书提供学习数理方程经典的传统内容。共分五章。第一章介绍基本概念，典型方程的导出及二阶方程的分类；第二、三、四章分别给出了波动方程、热传导方程、调和方程定解问题的求解方法和解的性质；第五章讨论了定解问题的适定性、特征概念和三类方程的比较。此外，每节都配备一定数量的习题，书末附有习题答案。考虑到高师数学系开设数理方程这门课情况不一，课时分配悬殊较大，为此，本书把部分内容打了*号供选用。全部内容预计72学时可完成，若删去打*号内容，则50学时左右即可教完。

复旦大学李大潜教授详细地审阅了本书，提出了许多宝贵意见，在此表示深切的谢意。

此外，复旦大学陈恕行教授以及试用过油印讲义的同志们也提出了许多宝贵的意见，在此表示感谢。

本书可作为高等师范院校、综合大学的数理方程教材或参考书，也可作为自学者用书。

编　者

1987年6月

目　录

第一章 绪 论

本章在§1·1给出有关偏微分方程及其解的一些基本概念，并粗略地介绍数学物理方程的内容和特点；§1·2阐述了如何从物理模型导出三种典型方程及其定解条件；§1·3讨论了两个与多个自变量二阶线性偏微分方程的分类及化为标准形式的问题。

§1·1 基本概念

一、偏微分方程及其解

含有自变量、未知函数及未知函数的导数的关系式称为**微分方程**。若微分方程中自变量多于一个，未知函数是多元函数，从而未知函数的导数是偏导数，这样的微分方程称为**偏微分方程**，或者说含有多元函数及其若干阶偏导数的关系式称为偏微分方程，例如：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f\ (x,y,z,t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f\ (x,y,z,t) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\ (x,y,z) \qquad (3)$$

$$u_t+buu_x=u_{xxx} \qquad (4)$$

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 - u = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

等都是偏微分方程。一般地，含有n个自变量x_1，$\cdots, x_n$的一个未知函数的偏微分方程可写为如下形式

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \tag{8}$$

其中F是其变元的已知函数，$u = u(x_1, \cdots, x_n)$为未知函数，而方程(8)在自变量$x_1, \cdots, x_n$的n维空间R^n的某区域Ω内考察。

定义1 若存在一函数$u(x_1, \cdots, x_n)$在区域Ω内具有方程中出现的各阶连续偏导数，代入方程(8)后，使它在该区域内成为恒等式，则称函数u为方程(8)在区域Ω内的**经典解**，或简称**解**。

例如，容易验证函数

$$u(x,y) = (x+y)^3$$

$$u(x,y) = \sin(x+y)$$

都是方程(7)的解。

二、偏微分方程的阶，线性、拟线性与非线性方程

出现在方程中的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的**阶数**。因此，(1)，(2)，(3)，(5)，(7)是二阶方程，(4)是三阶方程，(6)是一阶方程，而(8)是K阶方程。

如果一个偏微分方程对于未知函数及其所有的偏导数是线性的，则称为**线性方程**.如(1)，(2)，(3)，(7)都是二阶线性方程。一般地，n个自变量的二阶线性方程可写为下列形式：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}+cu=f \qquad (9)$$

这里a_{ij}，b_i，c，f都是n个自变量x_1，…，x_n的已知函数。不失去一般性，可以假设$a_{ij}=a_{ji}$（i，$j=1$，…，n）.f称为方程(9)的**自由项**.如果$f\equiv 0$，则方程(9)称为**齐次的**，否则称为**非齐次的**。

如果方程仅对未知函数的所有最高阶导数是线性的，则称为**拟线性方程**，如(4)，(5)是拟线性方程。

如果方程对未知函数的最高阶导数不是线性的.则称为**非线性方程**.如(6)是一阶非线性方程。

三、定解条件

我们知道通常一个n阶常微分方程的通解是含有n个独立的任意常数的函数族.对于偏微分方程是否有类似的结果呢？为此，我们来考察如下的例子。

例1 二阶线性方程

$$u_{xy}=0 \qquad (10)$$

若固定x，方程两端关于y积分得

$$u_x=f(x)$$

其中$f(x)$是x的任意函数。再固定y，将上式两端关于x积分，即得方程(10)的解

$$u(x,y)=g(x)+h(y)$$

这里$g(x)$与$h(y)$是所含变量的任意可微函数。

例 2 设u是三个变量x,y,z的函数，则对于一阶方程

$$u_y = 2$$

易求得它的解

$$u(x,y,z) = 2y + f(x,z)$$

这里f是两个变量x,z的任意函数。

例 1 考察的是一个二阶偏微分方程，它的解含有两个任意函数；而例 2 是一个一阶偏微分方程，它的解含有一个任意函数。这两个例子说明，一个偏微分方程的解可能是很多的，并且与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比，它的自由度往往更大。这样的解称为偏微分方程的通解。但是，只有极少数简单的偏微分方程容易求出它的通解。

实际问题要求的是偏微分方程在某些特定条件下的解，这些附加在未知函数上的特定条件称为**定解条件**。寻求方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**，例如

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & (0<x<l,\ t>0) & (11) \\ u(x,0) = \sin x & (0\leqslant x\leqslant l) & (12) \\ u(0,t) = 0 & (t\geqslant 0) & (13) \\ u(l,t) = 0 & (t\geqslant 0) & (14) \end{cases}$$

是由一个方程和三个附加条件构成的定解问题。在§1·2我们将见到这个定解问题的实际背景：方程(11)刻划了长为l侧面绝热的均匀杆的热传导过程，杆上的点x在时刻t的温度$u(x,t)$满足方程(11)；条件(12)称为初始条件，它描述了初始时刻（设为$t=0$）的温度分布，而条件（13），(14)表示了在杆的两端点$x=0$，$x=l$的温度变化规律，称为**边界条件**。这种带有初始条件和边界条件的定解问题称为**初——边值问题**或**混合问题**，只含初始条件的定解问题称为**初值问**

题或**柯西**（Cauchy）**问题**.只含边界条件的定解问题称为**边值问题**.

四、数学物理方程的内容和特点

17世纪微积分学产生以后，数学家、物理学家用微积分工具处理力学、物理学中的一些问题，产生了大量的微分方程问题. 如欧拉（Euler）和拉格朗日（Lagrange）研究流体力学，拉普拉斯（Laplace）研究势函数，傅立叶（Fourier）研究热传导理论时都归结出一些偏微分方程问题. 通常把物理学和其他自然科学、技术科学中遇到的偏微分方程称为**数学物理方程**（有时也包括积分方程、积分—微分方程和某些常微分方程），简称为**数理方程**.

（一）数理方程的内容

数理方程是以自然科学和技术科学中的具体问题作为其研究对象的，因此它的内容是非常广泛的，而且正在不断丰富，不断发展和更新. 它的内容包括:

1.把实际问题抽象出数学模型，归结为偏微分方程的定解问题;

2.提供定解问题的解法，使能得出解的表达式或解的计算方法;

3.研究解的性质.

本教材只讨论方程(1)，(2)，(3)这三类基本方程，它们分别称为**波动方程**，**热传导方程**和**泊松**（poisson）**方程**.方程(3)在齐次情形称为**调和方程**或**拉普拉斯方程**.这是研究得最早也是研究得最充分的数理方程，它们都是二阶线性方程，在§1·3，我们给出二阶线性方程的分类后，就可以看到它们分别是所谓二阶双曲型方程、二阶抛物型方程和二

阶椭圆型方程的最典型的例子。它们来源于不同的物理模型，分别描述一些基本的物理现象，由这些实际背景提出的定解条件和定解问题也是不同的。

对这三类基本方程也可以从数学角度按照一定的准则来说明所提出的定解问题的合理性，这些准则是：

解的**存在性** 定解问题至少存在一个解。

解的**唯一性** 定解问题至多存在一个解。

解的**稳定性** 定解问题的解对定解条件或方程中的自由项等的连续依赖性。即如果当定解条件或自由项作微小变化时，相应的解也只能有微小的变化，则称这个定解问题的解为稳定的。

如果一个定解问题的解是存在、唯一且稳定，则称这个定解问题是**适定的**。适定性概念是由阿达玛（Hadmard）首先提出来的，对于偏微分方程的研究起着重要的指导作用。这是因为虽然所考察的物理模型在一定条件下具有唯一确定的状态，但是归结为方程的定解问题总是近似地描述这个物理模型，如果这个描述是基本正确的，那么方程的定解问题的解应该是存在而且唯一的。此外，因为在实际测量中误差总是难免的，如果由于定解条件或自由项等资料的微小误差会引起解的很大变化，那么相应的定解问题实际上不可能提供所考察的物理模型的近似解，从而失去实际意义。因而我们在求解定解问题的过程中，考察定解问题的适定性，一方面有助于我们判别从物理模型归结出来的数学模型是否合理，使我们了解对怎样的微分方程通常应如何提出相应的定解条件，另一方面对求解定解问题的解也往往起着一定的指导作用。

（二）数理方程的特点

1. 求解一个常微分方程定解问题，通常采用这样的方法：先求出方程的通解，然后再根据定解条件确定通解中任意常数的值，从而得到所求的特解。对于偏微分方程来说，除了极简单的定解问题可以采用这种方法以外，一般地，求通解是很困难的，即使求出通解，由于通解中含有任意函数，要想从通解中选出满足定解条件的特解也往往是相当困难的。所以在数理方程中，通常是直接去求定解问题的特解或给出其近似解法。

2. 由于数理方程所研究的问题是由物理学或其他自然科学、工程技术提供的，这些方面的需要，不仅决定了数理方程的研究方向，同时对定解问题的求解方法及解的性质的探讨给出许多启发。数理方程中许多常用的数学方法都可以在它所描述的物理现象中找到其来源，物理现象中的许多性质也都反映在方程的许多性质之中。因此对数理方程的学习，不可忽视学习典型的物理模型，物理模型提供求解方法的基本思想，自始至终贯串在数理方程的整个讨论之中。理论与实践紧密结合，这是数理方程和一些其他数学分支不同的重要特点。

3. 数理方程广泛地适用了许多数学分支（如复变函数、泛函分析、微分几何、变分法、计算数学等）的新旧成果，使许多数学方法在这里有广泛的用武之地。数理方程是促进分析数学和其他数学分支发展的主要动力，反过来数学各个分支的发展，提供了许多新的数学方法来解决数学物理方程问题，推动了数理方程理论的发展。特别是电子计算机的诞生和发展，使许多相当复杂的问题也有可能计算出数值解来，

这对于解决工程实际问题有着重要的意义。

本教材准备作这样的安排，第二、三、四章分别介绍波动方程、热传导方程和调和方程、泊松方程定解问题的求解方法，第五章再回过来讨论所考察的定解问题的适定性及三类方程的比较。本教材所需要的基础知识主要是微积分，特别是多元函数微积分学，此外还需用到常微分方程、复变函数和线性代数等有关知识。

通过本教材的学习，可以使我们初步学会如何从实际问题归结为微分方程定解问题，掌握求解偏微分方程定解问题的典型方法，使具有解决一般工程技术问题的初步能力，同时为进一步学习数理方程的近代理论打下必要的基础。

习 题1·1

1. 指出下列方程的阶，以及是线性的还是拟线性的或非线性的？如果它是线性的，那么它是齐次的还是非齐次的？

(1) $u_{xx}+xu_y=y$　　(2) $uu_x-2xyu_y=0$

(3) $u_x^2-uu_y=1$　　(4) $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$

(5) $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=\sin x$

(6) $u_{xxx}+u_{xyy}+\ln u=0$

(7) $u_{xx}^2+u_x^2+\sin u=e^y$

2. 验证函数

$$u(x,y)=x^2-y^2$$

$$u(x,y)=e^x\sin y$$

都是方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

的解。

3. 验证$u=f(xy)$　（f是任意可微函数）满足方程

$$xu_x-yu_y=0$$

4. 验证$u(x,y)=f(x)g(y)$　（f,g是任意二次可微函数）满足方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0$$

5. 设u是变量x,y,z的函数，求下列方程

$$u_{yy}+u=0$$

的通解。

6. 求方程

$$u_{xy}+u_x=0$$

的通解。

§1·2　基本方程的导出

本节给出典型方程的物理模型。

一、弦振动方程

弦振动方程是早在18世纪由达朗贝尔（D′Alembert）首先加以研究的。这个方程的导出比较简单，但具有典型意义。

一根长为l两端固定的拉紧的绝对柔软的弦，受外力作用，使它在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

（一）基本假设

所谓弦是长度比起截面积大得多的细线。把弦的两端固定在ox轴上o，l两点，弦处于平衡位置时，即为线段ol。弦作横振动指的是弦的运动发生在一个平面内，而且弦上各点

的位移与弦的平衡位置垂直. 为此, 如图 1—1 选取坐标系, 并以$u(x,t)$表示弦上各点在时刻t沿垂直于x轴方向的位移。

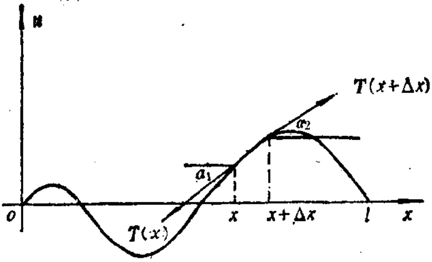

图1—1

把实际问题归结为数学模型, 必须对问题作一些理想化的基本假设:

1. 弦是均匀的, 即设弦的线密度ρ是一常量.

2. 弦在发生变形时, 会产生反抗形变的弹性力, 这是组成弦的质点之间的一种相互作用力称之为张力. 弦是绝对柔软的, 指的是弦上各点的张力沿弦的切线方向, 这表明形变过程只能抵抗拉压, 不抵抗弯曲.

3. 弦所受的重力与张力相比小到可以忽略不计, 这样一来, 考虑弦振动的受力情况时, 只须考虑弦所受的外力与张力。

4. 弦作微小横振动, 这时$\frac{\partial u}{\partial x}$很小, 以至于$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$与 1 相比可以忽略不计. 在弦上任取一小段$[x, x+\varDelta x]$, 它的弧长为

$$\varDelta s=\int_x^{x+\varDelta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\approx\int_x^{x+\varDelta x}dx=\varDelta x$$

这样, 在所考虑的精度范围内, 可以认为这段弦在振动过程中并未伸长, 因此由虎克 (Hooke) 定律知道, 弦在每一点