通俗数学名著译丛

YUANZHUIQUXIAN DE JIHEXINGZHI

[英国] A·科克肖特　F·B·沃尔特斯 著

蒋 声译

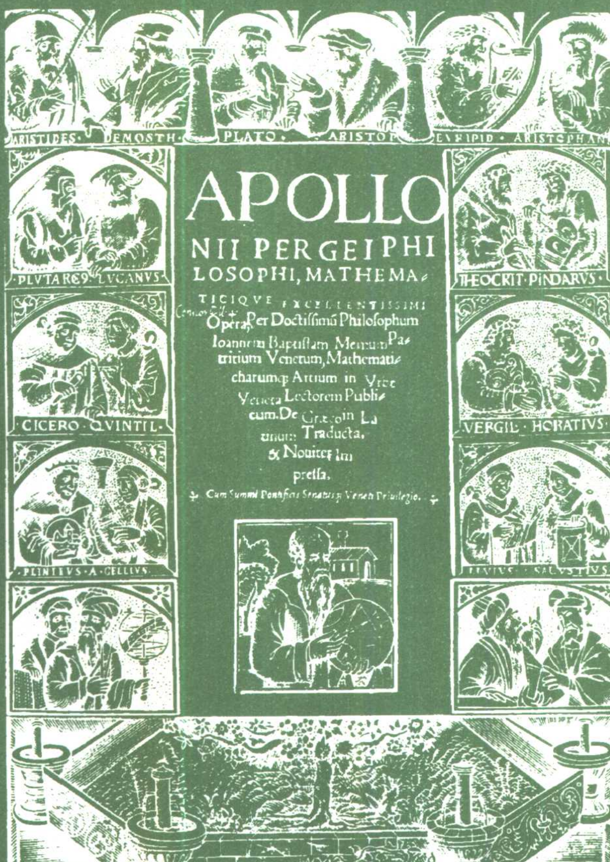
上海教育出版社

圆锥曲线的几何性质

圆锥曲线的几何性质

[英国] A·科克肖特　F·B·沃尔特斯 著　蒋　声 译

●上海教育出版社



图书在版编目（CIP）数据

圆锥曲线的几何性质／（英）科克肖特，（英）沃尔特斯著；蒋声译．—上海：上海教育出版社，2002.1
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-7770-5

Ⅰ.圆...　Ⅱ.①科...②沃...③蒋...　Ⅲ.圆锥—曲线　Ⅳ.O123.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第005616号

A. Cockshott and F. B. Walters

A Treatise on Geometrical Conics

Macmillan and Co., Limited

London 1927

根据英国麦克米兰公司 1927 年版译出

通俗数学名著译丛

圆锥曲线的几何性质

［英国］A·科克肖特　F·B·沃尔特斯　著

蒋　声　译

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行

（上海永福路 123 号　　邮政编码：200031）

易文网：www.ewen.cc

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 7.75　插页 4　字数 184,000

2002 年 2 月第 1 版　　2002 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—5,150 本

ISBN 7-5320-7770-5/G·7874　定价：(软精)15.00 元

开創新世紀的
數學文化

陳省身
二千年十一月

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

序

对圆锥曲线初等几何性质某些认知联系的需求，长久以来，已达成极为普遍的公识．为了满足这种需求，英国改进几何教学协会进行尝试，出版了圆锥曲线几何性质大纲，由一个有影响的委员会草拟，并在 1884 年 1 月的年度大会上被协会接受．

在下面的书页中，我们将给出这种性质连锁的证明，希望能让那些提出要求并得到协会赞同的教师们感到有用．

我们引进了一章讲正射影，紧跟在抛物线之后．我们认为这很重要，因为它将使学生尽可能早地理解椭圆和圆之间的联系，并且立刻带来了一种方法，使那么多的椭圆性质能从圆的熟知性质推导出来．

在书的末尾，可以看到一大批剑桥问题；我们还列举了课文里的命题中没有提到的一些圆锥曲线重要性质，它们都被看成是熟知的，因而可在解答其他问题时引用．

A·科克肖特
F·B·沃尔特斯
1889 年 5 月

这次印刷时，在书中附录 A 后面又列举出一些重要命题，在解题中可以引用它们．这样做是按照埃姆泰基(Emtage)先生

的建议,他最近出版了本书练习题和问题的解答.

A·科克肖特

1898年11月

译者序

这本小册子里，有许多在别处很难找到的内容.

这是因为，通常书刊中讲圆锥曲线时采用解析法，形数结合，结论虽多，基本上离不开坐标和方程.本书却用综合法，从图形到图形，以平面几何知识为主，立体几何知识为辅，轻车快马，直截了当，导出圆锥曲线的大批几何性质，包括许多通常资料中没有见过的性质.最后一章附有480个剑桥问题，可供练习、研究和参考.中译本还从国外杂志上选译了一篇关于蝴蝶定理的综述文章，又从国内书刊中选载了一篇介绍圆锥曲线史料的文章，附于书末，文中同样包含许多珍贵信息，希望能对读者有所帮助.

本书令人耳目一新，其实却是一本老书.翻译老书就像新拍古装电视剧，要使今人理解古人，一方面尽量原汁原味，同时也要古为今用，适当添加注释，进行沟通.

例如，英文原版中的图没有编号，各章也都只有标题、没有编号.为了便于读者将文字和图形对照，翻译时，将各章和各图统一编号，第1章命题2的插图编号为图1-2，第1章命题5的第一幅插图编号为图1-5a，其余类推.英文版原有的注释文字写在圆括号里，译者为了帮助理解而添加的少量注释文字写在方括号里，以示区别.译文力求保持原貌，只在个别地方稍有调整.译者所作的这些尝试未必妥当，译文中也难免出现疏漏和错误，恳切希望得到读者朋友的批评指正.

蒋　声

2001年3月

目　录

第1章　抛物线…………………………………………………… 1
第2章　正射影 ……………………………………………… 28
第3章　椭圆 ………………………………………………… 34
第4章　双曲线 ……………………………………………… 77
第5章　直角双曲线………………………………………… 123
第6章　圆柱面和圆锥面的截线…………………………… 124
第7章　补充命题…………………………………………… 141
第8章　问题………………………………………………… 145
附录A　………………………………………………… 186
附录B　蝴蝶问题的演变(L·班可夫)………………… 193
附录C　圆锥曲线小史(白尚恕)……………………… 221
索引………………………………………………………… 234

第1章 抛 物 线

定义 1. 抛物线是到一定点(S)的距离等于到一定直线(XM)的距离(PM)的点(P)的轨迹,

$$(SP = PM).$$

2. 定点(S)叫做焦点.

3. 定直线(XM)叫做准线.

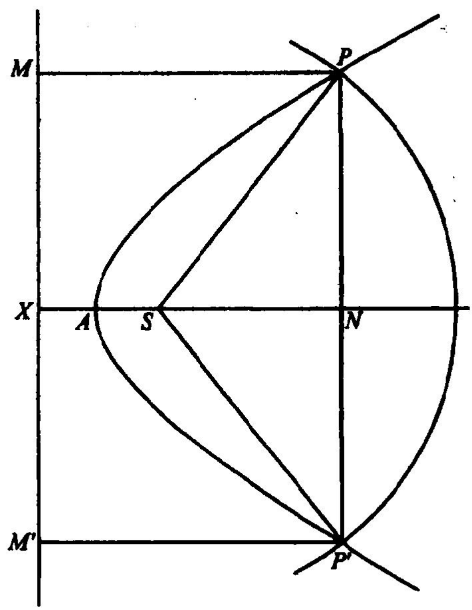


图 1-1

定义　一条曲线被称为关于一条直线对称，如果对应于曲线上的任一点，总存在这曲线上另外一点，使这两点位于直线异侧，并且连结它们的弦被这直线垂直平分.

定义　上面这条直线叫做曲线的轴.

【1】 **定义**　曲线与它的轴的交点叫做顶点.

课题 1

作抛物线上的点，并且证明过焦点所作准线的垂线是抛物线的对称轴.

[解]　[如图 1-1，]设 S 是焦点，MXM' 是准线. 过 S 作直线 SX 垂直于准线，并将垂线沿 XS 方向延长.

【2】 平分 SX 于点 A. 那么由于 $SA = AX$，A 是抛物线上一点.

在线段 XS 或 XS 的延长线上任取一点 N；过 N 作直线 PNP' 垂直于 XN；以 S 为圆心、XN 为半径作圆，(如果能)与 PNP' 相交，设交点为 P 和 P'；作 PM，$P'M'$ 垂直于准线. 那么由于

$$SP = NX = PM,$$

所以 P 是抛物线上的一个点.

类似地，P' 也是抛物线上的点.

由于

$$NP = NP', \quad (\text{Euc. III. 3.})①$$

PP' 总是被 XS 垂直平分，因而曲线关于 XS 对称.

[下面考虑作图过程中的圆与直线在什么场合相交，什么场合不相交.]

(1) 若 N 与 S 在 A 点同侧，则 SN 小于 NX，因而圆与直线 PNP' 相交.

---

① 译者注：括号中的“Euc. Ⅲ. 3.”表示论证理由见欧几里得《几何原本》第 3 卷问题 3，其余类推.

(2) 若 N 与 S 在 A 点异侧,则圆与直线 PNP' 无公共点.

所以,抛物线无限伸展,但是整个抛物线都在过 A 且垂直于 AS 的直线的一侧.

练习问题见第 6 页.

定义 通过焦点垂直于准线的直线(SX)叫做抛物线的轴.

定义 抛物线的轴与曲线的交点(A)叫做抛物线的顶点.

定义 抛物线上一点(P)到轴的垂直线段(PN)叫做这个点的纵标线.

定义 轴在顶点和纵标线之间的部分(AN)叫做横标线.

定义 抛物线上一点到焦点的距离(SP)叫做焦半径.

[**定义** 通过焦点的弦叫做焦点弦.] [3]

命题 2

若[抛物线的]弦 PP'[延长后]交准线于 K,则 SK 平分 SP 与 SP' 夹角的外角.

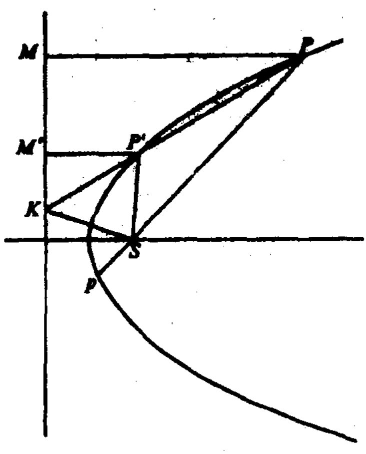


图 1-2

［证明］ 连结 SP，SP'.
作 PM，$P'M'$ 垂直于准线，并且延长 PS 到 p.
那么由相似三角形 PKM，$P'KM'$ 得到

$$PK : P'K = PM : P'M' = SP : SP',$$

【4】 $\therefore$ SK 平分外角 $\angle P'Sp$. （Euc. Ⅳ. A.）

命题 3

若 PN 为抛物线上一点 P 的纵标线，则

$$PN^2 = 4AS \cdot AN.$$

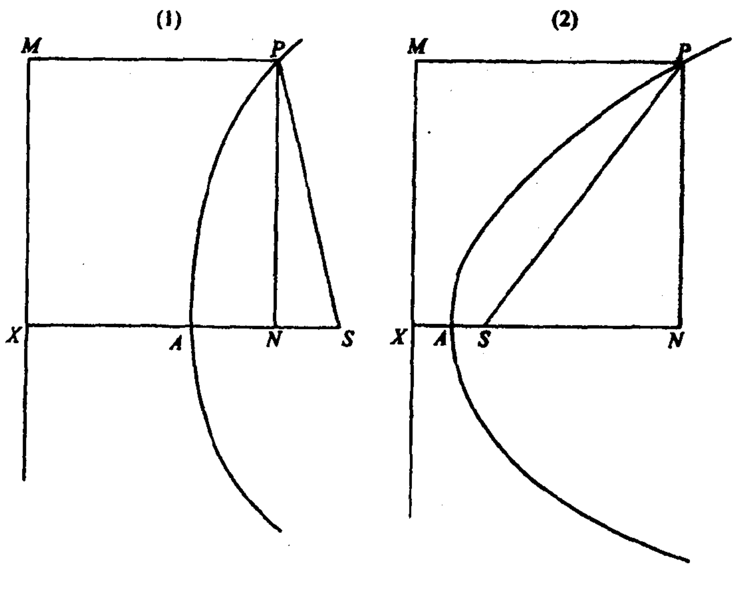


图 1－3

［证明］ 连结 SP，作 PM 垂直于准线. 那么

$$NX^2 = (XA + AN)^2$$
$$= XA^2 + AN^2 + 2XA \cdot AN \quad \text{(Euc. Ⅱ. 4.)}$$

$$= AS^2 + AN^2 + 2AS \cdot AN$$
$$= (AS - AN)^2 + 2AS \cdot AN + 2AS \cdot AN \quad (\text{Euc. II. 7.})$$
$$= SN^2 + 4AS \cdot AN.$$

但是

$$NX^2 = PM^2 = SP^2 = PN^2 + SN^2,$$
$$\therefore \quad PN^2 + SN^2 = SN^2 + 4AS \cdot AN;$$
$$\therefore \quad PN^2 = 4AS \cdot AN. \qquad [5]$$

[**定义**　设 P 和 P' 是抛物线上互相对称的两点，那么线段 PP' 叫做抛物线的一条双纵标线.]

定义　通过焦点的双纵标线(LL')叫做正焦弦.

命题 4

正焦弦 $LL' = 4AS$.

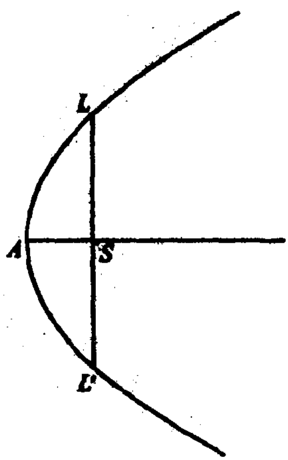


图 1-4

[证明]　$\because \quad SL^2 = 4AS \cdot AS$，（命题 3）

$$\therefore \quad SL = 2AS;$$

【6】

$$\therefore \quad LL' = 4AS.$$

问　　题

[以下若无特别说明，S 总是表示焦点，A 总是表示顶点. 各题中未说明意义的字母可参考相应命题的图形.]

课题 1

1. 利用欧几里得《几何原本》第 1 卷问题 23 作点，从而画出抛物线.

2. 设 PP'，QQ' 是抛物线的双纵标线. 求证：PQ，$P'Q'$ 相交于轴上同一点.

3. [如图 1-1，]若 SM 与过 A 点平行于准线的直线相交于 Y，求证：SM 被 Y 点平分.

4. 再证明：PY 垂直于 SM，并且平分 $\angle SPM$.

5. 作 SZ 垂直于 SP，交准线于 Z. 求证：PZ 平分 $\angle SPM$.

6. 设抛物线的两条焦点弦相等，那么连结它们中点的直线垂直于轴.

7. 设动圆与一条已知直线相切，并且通过一个已知点，求圆心的轨迹.

8. 设动圆与一定圆及一定直线同时相切，求动圆圆心的轨迹.

9. 平行于轴的直线，与抛物线只有一个公共点.

命题 2

1. 设 Pp 是抛物线的一条焦点弦，Q 是曲线上另外一点. 若 PQ，pQ 分别交准线于 K 和 K'，则 $\angle KSK'$ 是直角.

2. 设 PQ，pq 是焦点弦. 求证：Pp 与 Qq 的交点在准线上，Pq 与 pQ 的交点也在准线上.

3. 设上题中与准线的交点为 K 和 K'，则 $\angle KSK'$ 为直角.

4. 利用命题 2，通过将 A 点与准线上不同点相连，画抛物线.

5. 设 P 是抛物线上任一点. 若 PA 延长后交准线于 K，则 $\angle MSK$ 为直角.

6. 已知抛物线及其焦点，求准线.

7. 设 PQ 是抛物线的双纵标线，PX 交曲线于 P'[其中 X 是轴与准线的交点]. 求证：$P'Q$ 通过焦点.