高等学校教学用書

实变函数論

H. H. 魯金 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

实变函数論

H. H. 魯金 著
何旭初等譯

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部國立教科書出版社（Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР）出版的魯金（Н. Н. Лузин）著"實變函數論"（Теория функций действительного переменного）1948年第二版譯出。原書經蘇俄教育部審定爲師範學院教學參考書。

參加本書的翻譯工作者爲南京大學何旭初、唐述釗、夏定中等三位同志。

实 变 函 数 論

Н. Н. 魯 金 著

何旭初等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·23　開本 850×1168 1/32　印張 11 15/16　字數 332,000

一九五四年九月上海第一版

一九五七年一月上海第五次印刷

印數 7,501－10,000　　定價(8) ¥1.40

原　　序

在目前要編一部完備的集合論和實變函數論的書，還是件過早的事情，因爲各方面正在研究這些學科的原理，就容易使得最精心而細緻的敍述，很快地成爲過了時的東西。

所以，這本小册子的目的，只想用來解決在講授函數論的基礎知識中純教學上的問題。至於在科學上的問題，就是怎樣選擇函數論基本知識中的必要內容並將它安排成嚴格的邏輯系統，這已經由現有的一些教本足以令人滿意地解決了。在這些教本中，可以舉出亞力山大羅夫和考莫果洛夫的書，或者瓦勒布然的分析教程中用小體字排印的那些部份。

本書作者所抱的目的僅爲解決教學上的問題，就是，卽使在瓦勒布然所給條件下也不擴大科學內容的範圍，作者要想把它寫成儘可能生動的形式，使它對於開始對數學分析作深入研究的那些人來說，成爲易於了解而且有吸引力的。

無理數的理論，由於教學上的理由而放在附錄裏，因爲如在卷首對它作詳細邏輯上的闡述，可能會使讀者覺得困難，而影響他對後面內容的興趣。

在結束時，我不能不懷着深切的感激來提到我的兩位老師：幕勞德傑耶夫斯基，他一貫地將科學敍述中藝術方面的要求提到首要的地位，和熱佳爾金，他堅持要使學生能意識到在科學推理中的那怕是最微小的困難，並預告他避免思維中可能發生的錯誤。

我也對格里文考的審閱手稿和提出意見表示謝忱。

最後，我深深感謝編輯諾娃謝羅夫對本書全文的詳細審閱，感謝他的寶貴忠告和他在本書中所作的一些修改，這書中的某些部份便是屬於他的。

科學院院士　魯金

目　　錄

第一章　集合和蘊度

§1. 集合的概念　甚麽是"集合"(множество)(有時簡稱爲集)?對這問題我們不準備來求得一個答案,因爲集合這概念是如此基本的一個概念,至少在目前,還很難用更簡單的概念來規定它的定義。

對於這樣的情形,讀者不必感到驚異。在實際上,如果某一個概念 P 是用較簡單的概念 D 來規定它的,那末這概念 D 本身也需要用更簡單的概念 C 來規定它。而爲了要規定概念 C 的定義,又還需要利用到更簡單的概念 B,如此繼續類推下去。這樣,到了最後,我們勢必要遇到如此基本的一個概念 A,不可能再用更爲簡單的概念去規定它。到了這地步,我們所能做的,僅僅是用一些例子來說明這一個概念 A 的含義而已。

因此我們不想去尋求"集合"這個詞的定義。當然也可以說,集合就是"會集","綜合","集團","組","類","夥","彙",等等。但這樣將一個名詞用另一個名詞來代替,對於一個原先對集合的觀念一無所知的人,是不能使他了解集合的眞正意義的。所以我們寧願用舉例來說明集合這名詞的含義。我們把集合二字了解爲由一些不論什麽樣的一些對象所組成的總體,因此我們可以說:在指定的一頁中所有字的集合;在一個給定的銀幣裏所有銀原子的集合;一個已知的方程式的所有的根的集合;所有的正數的集合;所有多項式的集合;所有的連續函數的集合;在一個給定的圓周上所有的點的集合;其正弦爲無理數的所有角的集合等等。

組成某一個給定集合的那些對象,叫做這集合的元素(элемент)。

爲了表示一個給定的集合 M 是由那些元素 e 所組成，通常寫成：

$$M=\{e\},$$

這裏括號 $\{\cdots\}$ 是用來表示將這些元素 e 彙集在一起以組成集合 M 的那一作用的。

從上面所引用的那些例子中可以看到，一個集合的元素可能是些極其各種各樣的對象：字，原子，數，函數，點，角等。因此從一開始便顯然見到集合理論的極端廣泛性，及其可以適用到很多種的知識領域中去（如數學，力學，物理學）。

讀者不要忽略在集合概念中最主要的那一點——即將互不相同的對象彙集成爲一個整體的這一作用，這整體就是以已給定的那些對象爲其元素的集合 M（在經過彙集作用以後）。集合論的創始人坎托爾（G. Cantor），在首次發表他那著名的原理時，也曾企圖着重指出這一要點：

"一個集合就是許多對象，而被我們設想如一個單一的對象"。

爲了幫助讀者瞭解起見，採用下面這樣粗淺的形式來作說明，將比較方便。我們想像有一個透明而不可穿過的囊膜，就像一隻嚴密封閉的袋子。假設在這個囊膜中包含了一個給定的集合 M 的所有元素，而且在這囊膜中，除了這些元素以外，再沒有任何別的東西。這個囊膜連同被裝在它裏面的那些對象 e，可以用來作爲表示由對象 e 所組成的集合 M 的形像。同樣，這個包含了所有的元素（而且除了它們以外沒有任何別的東西）的透明囊膜，也足以用來很好的表示將諸元素 e 彙集在一起的那一作用，由於這彙集作用的結果才產生了集合 M。這種把互不相同的元素彙集成爲一個集合 M 的作用，通常是藉表明了爲那些元素 e 所共具（而且也唯有它們才具有）的某種特徵性底方式來完成的。例如，當我們說"所有正數的集合"這話時，我們藉助於"是正數"這一特性，立刻就從全部實數中單把正數區別出來，就像把它們（而且也祇有它們）放在那個透明的囊膜裏，而把所有其他的數（負數和零），以及一

切的其他對象，留在囊膜外面一樣。

在這裏我們還要指明一點：一個集合完全不必一定要包含許多對象，有時候一個集合可以攏總由幾個對象，甚至很少幾個對象來組成。例如，倘若拿任意一個方程式 $f(x)=0$ 的所有的根的集合 M 來看，讀者對這點就很容易確信了。在解出這個方程式之前，我們還不知道集合 M 究竟包含多少元素：它的根可能有無限多個，但也可能是很少幾個，例如只有兩個甚或一個根。

最後也可以考慮到那種極端的情形，這時集合連一個元素也不包含。例如當方程式 $f(x)=0$ 根本沒有根時，就遇到了這一情形。此時可以設想一個沒有元素在它裏面的囊膜。

連一個元素也不包含的集合，叫做空集(пустое множество)。

所有的空集是看做是相同的。兩個不空的集合 M 和 M_1，當它們彼此所有的元素完全一樣的時候，才被看作是相同的集合。這時簡寫成：$M=M_1$。

§2. 無限性　當考慮上面所引的例子時，就將發現，不論有限的集合也好，無限的集合也好，全是一視同仁，並列提出來的。例如，在指定的一頁中所有字的集合是有限的，因為這些字可以容易地數出來。在一個給定的銀幣裏所有銀原子的集合，雖然不可能直接去數，然而藉助於物理學，我們立刻可以寫出一個大的數字，使其顯然超過這些原子的數目；因此便可得出結論，這些銀原子的集合是有限的。但是在一個給定的圓周上所有的點的集合，和所有連續函數的集合，便是無限的集合了。任何集合，只有當它被給定了時，才有可能去研究它。但是所謂"給定了一個集合"究竟是什麼意思呢？假使是對有限集合而說的話，事情看起來便多少明顯一點：在這種情形下，"給定了一個集合"這話，當然是"給出它所有的元素，一個也不遺漏"的意思。但是對於無限集合的情形，同樣的解釋是不是可以完全保留呢？在那樣情形，既然它的元素有無限多個"給出它所有的元素"這話又意味着什麼呢？

當第一次碰到這個問題時，很自然地會想到這樣的回答：給出無限多個元素——這就是說，首先給出一個元素，然後是另外的一個，然後再給出第三個，如此繼續下去，直到我們把全部元素一個一個地舉完為止。應當立刻就要指出，這樣的解釋，雖說顯然很幼稚，畢竟也是有其某種根據的。

在實際上，試問所謂給定了任何一個無窮級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

是意味着什麼？這是不是說眞的首先給出級數的第一項 u_1，然後給出第二項 u_2，然後再給出第三項 u_3，這樣繼續下去，用這種一步接着一步的過程，就會把這級數所有的項所成的集合確實全部舉完，因而完全給出這個級數呢？

因此，上述答案乍看很可令人信服，然而它卻是完全不正確的。對於希望學會在研究函數理論中能獨立思考的讀者，這裏宜於指出，在會遇到無限集合的一切問題中，應當十分小心那些所謂"顯然性"：沒有比在這地方更容易會將思慮引入錯誤的途徑裏去，因而其結果便祇是玩了一套文字上的把戲。這一點不久讀者就會自已看到。

首先讓我們就拿在一個圓周上的所有的點的集合這例子來說吧。這集合當然是無限的。按照前面所提供的回答，要給出這個集合，就要首先給出在這圓周上的一點，然後給出另外一點，然後再給出第三點，這樣繼續下去，直到我們把那些點一個接着一個地全部得出爲止。但是試問，爲了使對確實全部得到那些點這事有充分把握起見，我們將用怎樣的次序來在圓周上畫這些點呢？不錯，這裏還可以試行辯護，說：爲了要確實得到圓周上全部的點，只要乾脆用圓規把它們畫出來就行。當圓規的尖端移動時，就將依次地經過所有的這些點了。可是在這裏，只要一注意到這個回答，和在提到以 u_n 爲項的無窮級數那問題時的那個回答，二者間的不同之處，我們就不由地要停止下來了。在那裏，任何一個元素（除了開頭的那一個外），都有一個直接在其前的（和一個直接在其後的）完全確定的元素；這一個重要的事實使我們有可能來說：把那級數的所有的項一個接着一個地舉完。而在這裏卻沒有這種可能性，因爲對於在圓周上的一個點，不能指出一個直接和它相鄰的點來。

我們拿所有連續函數 $f(x)$ 的集合 M，$M=\{f(x)\}$，來作爲另一個例子。這集合也是個無限集合。可是，在像上述例子中的時候，圓周的點有其確定的次序，因爲可以用圓規尖端的移動，畫這個圓周，依次地經過圓周上所有的點，來全部得到它們。——而在這裏呢，集合 M 的那些元素 $f(x)$，對我們顯得像是彼此之間沒有任何聯繫，或者被雜亂地混雜着的，而因此便沒有任何自然的次序。例如，連續函數 $\log x$ 是應該被規定在連續函數 $\sin x$ 之先呢還是應該在它之後，就完全無從知道。所以要期望集合 M 的眞正的所有元素 $f(x)$ 可以被一個接着一個地給出，直到把集合 M 舉完爲止，是頗爲缺乏根據的。

其實，以後將要嚴格證明，不管是圓周上所有的點的集合也好，或是所有連續函數的集合也好，都是無論如何不可能照對於以 u_n 爲項的無窮級數來說似乎是可能的那種樣子，用一個接着一個地給出它們的元素這方式來得到的。由此可見，我們已走上了顯然是錯誤的道路。爲了要依正確的方向走，我們必須重新回到所提出的問題上，來審查原先所提供的答案。這個原先所提供的答案是在考慮無窮級數時所提示的。可是所謂給出任何一個無窮級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

的意思，決不是說首先給出它的第一項 u_1，然後給出第二項 u_2，然後再給出第三項 u_3，如此繼續下去，直到我們一個一個地舉完它所有的項爲止。用這樣的方法，永遠只可以給出有限數個的項，無論何時，都不可能用這樣的方式來給出任何一個確定的無窮級數。任一無窮級數，

其所以被看作是給定了的眞正的理由，是在完全不同的地方：當我們能規定（就如：能計算出）一個無窮級數的普通項 u_n（在知道其附數 n 時）的時候，而且只有當這個時候，這個無窮級數才是給定了的。換句話說，當普通項 u_n 被給定爲 n 的函數，$u_n=f(n)$ 時，而且只有當這個時候，無窮級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

才可以被看做是給定了的。這裏應當注意，u_n 不僅可表示作 n 的顯函數，而且在一般情形，u_n 還可以藉任何規則來規定。譬如說，藉任何一個可以遞推的關係來確定它。因此，一個無窮級數的被給定，決不是因爲我們一項一項地給出了它全部的項，而是因爲知道了用來確定它的項的規則。這個規則，有時也可能很複雜的，但在一切情形，它都應當是用有限方式來表示的，例如用給定 u_n 爲其附數 n 的一個函數的方式。就是這個規則，當它被給定了以後，便一項接着一項地舉出了這級數所有的項，其中既不會遺漏了那一項，也不會有那一項重複幾次。它顯得把級數所有的項連合成爲一個整體。因此，關於無窮級數，我們已達到了這樣一個結論：給定一個無窮級數——就是說給定了一個確定它的那些項的規則。

剛才所說的也可以適用於任何無限集合，因爲一個無限集合是許多對象，而由於它的規則，可以被看作單一的對象。

給定一個無限集合——這就是意味着給定了它的規則，也就是給定了它的元素的特徵性。

這個爲所討論的那些元素所共具，而不爲此外任何對象所具有的特徵性，完全規定了這個集合。我們只消把任何集合的元素的特徵性一經表述出來，那末它的所有元素，縱使它們有無限多個，也就因而立刻都給出了。如果回到前面說起過的那個粗淺的具體表示方式上來，集合的元素的特徵性，恰恰正像包含了所給集合的全部元素在內的（而且只包含了它們）那個透明的囊膜。例如，所有連續函數 $f(x)$ 的集合 M，$M=\{f(x)\}$，我們是看作已經給定了的。因爲它的那些元素的特徵性“是連續的”已經規定了。顯然用這個方法，不僅可以給出前面所列舉過的那些集合，而且也可以給出無窮多樣的別的無限集合。但是被所給定的特徵性“牽合”在一起的那些元素的這種無限多性，因之也是已經完全給定了的，已經定型而且不變的（如果我們不改變那特徵性的話），而因之，好像是已經固定而且是自足的。

這樣的無限多性通常叫做眞無限性（актуальная бесконечность）。眞無限性有許多和“有限”相似的地方：兩者都是被看成固定不動的，已經定型的，而且，如同已說過的那樣，是自足的。

§3. 個數和蘊度　我們考慮任何一個由那些元素 e 所組成的集合 M，$M=\{e\}$。如果集合 M 是有限的，這時我們就有可能來說它的元素的個數。當 M 是個空集時，它的元素的個數是零；而如果 M 是一個不空的集合時，它的元素的個數是一個正整數，也卽自然數。

自然數列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$

是從1開始的；在任何數 n 之後都有另外一個數直接跟在它後面。當要找出一個給定的有限集合 M 的元素的個數時，祇需簡單地點數它們好了。這就是說，把集合 M 的那些元素 e，一個個沒有遺漏地和號數 $1,2,3,\cdots$ 在想像上聯繫起來（就是使之成爲相互對應的），使這些元素在我們面前以編了號的形式出現：$e_1, e_2, e_3\cdots$。而且因爲所給的集合是有限的，所以在它元素的序列 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ 中，一定有其最後的一個元素 e_n，因此集合 M 可以寫成

$$M=(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$$

的形式，所有這些元素都放在圓括號$(\cdots)$裏面。在這些情形中，被寫成編了號的形式的有限集合 M 的最後一個元素的號數 n，就是集合 M 的元素個數。

任何有限集合 M，只要它包含了多於一個的元素，則其可以用來編號的方式，當然就不僅僅是一種，而是有許多種。但不管它的元素用來編號的方式是怎樣的，結果總達到一個相同的最後號數 n，因而總達到集合 M 的一個相同的元素個數。因此，任何有限集合的元素個數，是和它所用的編號方式完全無關的。爲了估計這一事實的價值，我們設想任何兩個元素個數相同的有限集合 $M=\{e\}$，和 $M'=\{e'\}$。這樣的兩個有限集合叫做是等數的（равночисленне）。要想達到我們的目的，找出使等數性成立的條件是最要緊的。如果集合 M 有 n 個元素，那末就是說，集合 M 的所有元素，可以一個不缺地用自然數 $1,2,3,\cdots,n$ 編起號來。而這個對於集合 M' 也是同樣正確的。可是這時 M 和 M' 兩個集合的元素之間就可以建立起完全確定的一一對應的關係（взаимно-однозначное соответствие）來了，因爲在這兩個集合中，得到同一號數的那兩個元素，我們可以把它們看成是互相對應的。這種情形使我們能以用下述的定義來引入一個新的概念：

兩個有限集合 M 和 M'，如果在它們的元素之間可以建立起一一

對應的關係來，就叫做是對等的 (эквивалентные)。

為了要表示出兩個有限集合 M 和 M' 是對等的，通常以符號 $M \backsim M'$ 記之。顯然，如果任何兩個有限集合 M 和 M' 分別各和第三個有限集合 M'' 是對等的話，那末 M 和 M' 彼此之間也是對等的。用符號表示出來就是：如果 $M \backsim M''$，而且同時 $M' \backsim M''$ 那末也必 $M \backsim M'$。

現在回到那些等數的集合上來，我們知道，它們都是互相對等的。而其逆命題也成立：兩個對等的有限集合 M 和 M'，$M \backsim M'$，是等數的集合。為了要看出這點，只需注意到下面這事實就夠了：用自然數 1, 2, 3, …, n 來為集合 M 的元素編號，同時也就提供了一種用這些數來為集合 M' 的元素編號的方法，因為集合 M 的元素所獲得的附數，不妨就可拿來作為其所對應的 M' 的元素的附數。這一個命題具有非常的重要性，因為由此就可看出，為了要建立任何兩個有限集合 M 和 M' 之間的等數性，既不需要實際去點數，甚至也不需要有自然數的概念：只要 M 和 M' 兩個集合之間能建立起一種一一對應的關係來就足夠了，而這是可能用極其多樣的方法來達到的。因此，預先知道自然數，對於建立有限集合之間的等數性，在邏輯上並沒有什麼必要。

相反地，現在自然數本身卻得到了一個新的說明：自然數是互相對等的一切有限集合之所公有的數量上的特徵。例如，從這個觀點上來看，抽象的自然數"3"，就是每一個由三個任何對象（具體的或抽象的）所組成的集合的特徵。一切互相對等的有限集合 M（而且也只有這些互相對等的集合）都有一個同一的特徵 n，稱為集合 M 的"元素個數"。如果兩個有限集合 M 和 M' 不互相對等，那末，它們的元素個數 n 和 n' 就不相等：$n \neq n'$。

因此，我們只利用一一對應的關係，就規定了自然數的相等和不相等。不僅如此，還可以利用這種對等關係從邏輯上來規定自然數間"大於"和"小於"的關係。為了要實現這目的，我們首先引進下述定義：如

果集合 M_1 是由集合 M（有限集合或無限集合）的一些元素所組成，但不包含 M 的全部元素，那末我們說，集合 M_1 是集合 M 的眞部份集合（точная часть）（在這裏"部份"二字是按照它的原意用的）。

現在假設 M 和 M' 是任何兩個有限集合，分別具有元素個數 n 和 n'。我們引進下面的定義：如果集合 M 和 M' 不互相對等，而同時集合 M 和集合 M' 的一個眞部份集合 M_1' 是對等的，那末我們說，數 n' 大於數 n，寫成 $n'>n$。

由此可見，爲了要解決兩個不同的數 n 和 n' 中那一個大於另一個的問題，並不必去點數集合 M 和 M' 中的那些元素。因爲只需要決定：第一，M 和 M' 不是對等的；第二，其中有一個集合和另一個的眞部份集合對等，那就夠了。這個定義和平常對於自然數的觀念是完全一致的，這差不多已經不需要再來指出了。實際上，如果集合 M' 的元素個數 n' 大於集合 M 的元素個數 n，那末，在將 M 和 M' 兩個集合的元素編了號之後，

$$M=(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n)$$
$$M'=(e_1',\ e_2',\ \cdots,\ e_n',\ \cdots,\ e_{n'}');$$

我們立刻就可以看出，第一，M 和 M' 不是對等的。第二，集合 M' 有一個眞部份集合 $(e_1',\ e_2',\ \cdots,\ e_n')$，和整個 M 對等。讀者不必因我們對於單是有限集合就付與了如此多的注意而感到奇怪。事實上是，剛才所說的關於有限集合的性質，其中有許多可以同樣推廣到無限集合上去，而不需要加以任何變更。

在集合論中，在有限集合和無限集合之間，幾乎不加任何區別。正如同任何有限集合被我們認爲是已經連同它所有的元素一起，一下子給了我們（因而是不會變動的）那樣，對於任何無限集合 M，若它的元素的特徵性（就是爲 M 的那些元素所共同具有，而且也只有它們才具有的那個特性）是已指出了給我們的，同樣也認爲集合 M 是已經連同它所有的元素一起給定了的。

由於上面所說，集合論力圖把對於有限集合生效的那些規律，儘可能多地推廣到無限集合上去。爲了要集合的"元素個數"這概念推廣到無限集合，我們將要導入"集合的蘊度"（мощность）這一個重要的概念。

首先讓我們把對等性的概念搬到無限集合上來：

如果在兩個無限集合 M 和 M' 之間，可以建立起一種一一對應的關係來，那末我們說這兩個集合 M 和 M' 是對等的，寫成 $M \backsim M'$。

這裏也和有限集合的情形一樣，顯然，都和第三個集合 M'' 對等的兩個集合 M 和 M'，彼此也是對等的。這就是說，如果同時有 $M \backsim M''$ 和 $M' \backsim M''$，也就必有 $M \backsim M'$。

對等的那些有限集合都是等數的集合。把等數性的概念推廣到無限集合上去乃是等蘊性（равномощность）的概念。同樣，我們關係於和集合 M 對等的一切無限集合 M' 的那個概念，叫做蘊度。

無限集合 M 的蘊度是被結合於和 M 對等的一切無限集合 M' 上的一個概念。所有和同一集合 M 對等的那些集合，可以聯繫到同一記號 μ。這個符號可以認作是集合 M 的蘊度的記號。如果兩個無限集合 M 和 M' 不是對等的，那末它們的蘊度 μ 和 μ' 就不相等：$\mu \neq \mu'$。

這樣，我們已規定了蘊度的相等和不等。正像我們對於自然數所做的一樣，那些無限集合的蘊度，在替它們規定了"大於"和"小於"的關係之後，這就是說建立了蘊度間的不等性之後，它們也就可以來互相比較大小了。

如果 M 和 M' 這兩個集合不是對等的，而且集合 M 是和集合 M' 的某一部份集合（часть）對等，那末集合 M 的蘊度 μ 就小於集合 M' 的蘊度 μ'，

$$\mu < \mu';$$

而 μ' 大於 μ，

$$\mu' > \mu。$$

讀者可以看到，無限集合的"蘊度"概念和有限集合的"元素個數"概念是完全相類似的。坎托爾在初次給出他的蘊度定義時，所力求保存的也就是這個類似性：

"集合的蘊度就是當我們去掉了它的元素的個別特性和它們的次序時，也就是當我們把這些元素看做一個抽象的總體時，在我們思想上剩下來的那個東西"。

就心理上來說，這個定義，當集合是無限的時候，完全符合蘊度的觀念；而當集合是有限的時候，完全符合自然數的觀念。

假如以後在實際上發現所有的無限集合都是互相對等的，那末以上所給我們的全部定義就要沒有絲毫意義；因爲那時我們就將只和一個無限蘊度有關係，而導入不同的蘊度以及它們的不等式就要成爲無謂的了。但事實上卻不是這樣，而坎托爾的卓越發現之一，也正就在於確定了存在着許多不相等的無限蘊度這件事實。

下述這一事實非常重要：在無限集合的那些不同的蘊度之中，存在着一個最小的蘊度。坎托爾用符號 $\aleph_0$ 來表示這一個蘊度。

爲了使讀者對這事實有個輪廓起見，我們試作下述想像上的實驗：

我們作出自然數列

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots,$$

並且設想任一個由諸元素 e 所組成的集合 M，$M=\{e\}$。我們再想像把所有這些元素 e 都放在一個密閉的透明囊膜裏，而且在這個囊膜裏不再包含任何別的東西。在這個囊膜上開一個窟窿，把囊膜沿着自然數列移動，並且假設，在每一個自然數上面，由囊膜的窟窿自它裏面落出一個元素來，這個元素就和它所落在上面的那個自然數編在一塊。顯然，借助於這個機械的方法，就可將那些元素用自然數來編號。

在邏輯上提供了兩種可能性：

1. 或者是，在這囊膜的移動過程中，遇到這樣一個時候，那時集合 M 的所有元素都已經落出來了，但是還剩留有空餘的自然數沒有被集