应用数学力学講座之 8

級　数

柳原二郎著

級　　数

柳原二郎著

応用数学
力学講座
8

朝倉書店

著作者略歴

昭和4年　大阪市に生まれる
昭和31年　東京大学理学部数学科卒業
昭和33年　中央大学理工学部講師
現　在　千葉大学文理学部助教授

応用数学力学講座8　**級　　数**

昭和 37 年 11 月 30 日　初版発行

著 作 者　柳 原 二 郎

発 行 者　朝 倉 鉱 造
東京都新宿区東五軒町55

印 刷 者　斎 藤 貞 子
東京都千代田区飯田町1の18

発 行 所

株式会社 **朝 倉 書 店**
東京都新宿区東五軒町55
電話東京(301) 0146 番(代)
振替口座 東京 8673番
自然科学書協会会員

日月印刷・渡辺製本

はしがき

本書は，理工科系第2学年程度を対象として，級数の一般論の初歩を述べたものである．目新しい材料はないが，漸近級数について多少くわしく記したことが特長といえばいえるであろう．またほとんど各節の終りに問をおき，その解答を巻末に示した．いろいろの形のものをあつめるようにしたから，公式集の代りにもなるかも知れない．

極限の概念は解析学の基礎であり，それをよく理解しておくことは応用方面の学生にとっても大切であると思われる．なるべく丁寧に説明し，理解して戴くように努めたつもりであるが，筆者の力が足りないためにその意をつくすことができなかったであろうことを恐れるのである．

予備知識としては，第4章まで初歩の微積分の知識があれば十分である．第5章には多少関数論を使った．たいていの個所では途中の計算を省略せずにくわしく記すようにしたが，読者はなるべく自分でも筆を持って計算を行なってみて戴きたい．

本書の内容についてさらに興味を持たれる読者には，つぎのような参考書をおすすめしたい．

K. Knopp: Theory and Application of Infinite Series, 555 頁. Blackie and son 書店, London-Glasgow, 1951.

E.T. Whittaker-G.N. Watson: A Course of Modern Analysis, 590 頁. Cambridge, 1927.

I.P. Natanson: Konstruktive Funktionentheorie, 496 頁. Akademie-Verlag 書店, Berlin, 1955.

L.W. Kantrowitch-W.N. Krylow: Näherungsmethoden der Höheren Analysis, 608 頁, Deutscher Verlag der Wissenschaften 書店, Berlin, 1956.

A. Erdélyi: Asymptotic Expansions, 107 頁, Dover 書店, 1956.

H. Jeffreys: Methods of Mathematical Physics, 705 頁, Cambridge. 1956.

東京大学の犬井鉄郎先生は，執筆をおすすめ下さったばかりでなく，お忙しい時間をさいて原稿を通読し，いろいろと注意と指示とを与えられた．感謝の言葉を知らないほどである．

執筆を終るに当り，恩師故辻正次先生の御教導を回想し，拙い書ではあるが御霊前に捧げて，辻先生の御冥福を祈りたい．

朝倉書店の秦晟，喜入康司氏らには，原稿が遅れて御迷惑ばかりお掛けした．よくそれをお許し下さった同書店の熱意と寛容とに，深甚の敬意と謝意とを表する次第である．

昭和37年11月

著者しるす

目　次

第1章　数列および級数

第2章　関数列と関数項級数

第3章　整　級　数

第1章　数列および級数

§1.　数列の収束と発散

1.1.　数　列　たとえば

$$2,\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\cdots\cdots \tag{1.1}$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\cdots\cdots \tag{1.2}$$

$$1,-1,\ 1,-1,\cdots\cdots \tag{1.3}$$

のように，ある規則に従って数がならべられてあるときにこれを**数列**という．くわしくいえば：自然数 $n=1,2,3,\ \cdots$ のおのおのに，きまった数（実数または複素数）$a_1,a_2,a_3,\cdots$ が対応していて

$$a_1,a_2,a_3,\ \cdots\cdots \tag{1.4}$$

のようにならべられてあるときに，これを数列というのである．各 a_n をこの数列の**項**，n 番目の項を**第 n 項**という．第 n 項が a_n であるような数列を

$$\{a_n\} \tag{1.5}$$

とかくことにしよう．たとえば(1.1) では $a_n=\dfrac{n+1}{n}$，(1.2)では $a_n=2n-1$，(1.3) では $a_n=(-1)^{n+1}$ であるから，それぞれ $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$，$\{2n-1\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$ とかかれる．

本書ではとくに断らない限り，数列といえば項の数が無限なもの（**無限数列**）のこととしておく

とくに各項がすべて実数であるような数列を**実数列**といい，一般の数列で各項が必ずも実数とは限らないことを強調するときには**複素数列**という．取扱いの便宜上差当っては実数列のみを考えることとし，複素数列は後で（§10）考えることにしよう．

数列の性質を調べるために，これを図にあらわしてみよう．横軸に番号をとり，縦軸に各項の値をとると，図1〜3のようになる．図1では各項の値は，n が増すにつれて次第に，あるきまった数（ここでは1）に近ずいて行くが，図2や図3ではそのようなきまった数がなく，図2の場合には各項はいくらでも大き

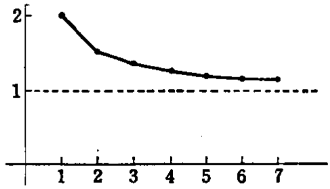

図 1 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$

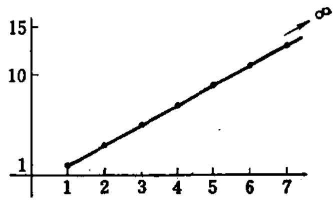

図 2 $\{2n-1\}$

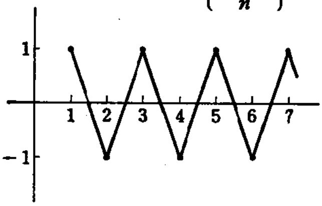

図 3 $\{(-1)^{n-1}\}$

くなり，図3では $+1$ と -1 との間を往復している．

図1のように，数列 $\{a_n\}$ において，n が増すにつれて a_n がいくらでも近ずいて行くようなきまった数 a があるときには，$\{a_n\}$ は**収束**するといい，a をこの数列の**極限値**という．このことを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to a \tag{1.6}$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1.7}$$

とかいてあらわす．たとえば図1の数列では

$$\frac{n+1}{n} \longrightarrow 1.$$

図 2，図3のあらわす数列には極限値がなく，収束しない．これらは**発散**するといわれる．このような事柄をもう少しくわしく考えてみよう．

1.2. 収束のくわしい定義　数列 $\{a_n\}$ が a に収束するということは，第 n 項 a_n が，番号 n が増すにつれていくらでも a に近づいて行くことであるとした．それは，a_n と a との差の絶対値 $|a_n-a|$（a_n を図4のように実数直線上に

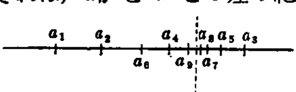

図 4

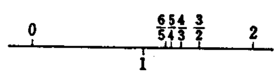

図 5

目盛れば，a_n と a との距離）がいくらでも小となること，すなわちいくら小さな正数 ε を考えても，番号 n が十分大きくなれば，ある番号から先の a_n については $|a_n-a|$ がそれよりも小さくなる，ということである．

たとえば (1.1) の数列 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\cdots,\ a_n=\frac{n+1}{n}$,

についてみれば．番号 n が 100 万よりも大きくなれば，$|a_n-1|=\left|\dfrac{n+1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$ は 100 万分の 1 ($=10^{-6}$) よりも小となり，1 億 ($=10^{8}$) 番目よりも先の a_n については，$|a_n-1|<10^{-8}$．一般にいくらでも任意に小さな正数 ε を考えたとき，$\dfrac{1}{\varepsilon}$ よりも大きな n に対しては，$|a_n-1|<\varepsilon$ となる．これが，$\dfrac{n+1}{n}$ が 1 に収束するということである．

以上のことから，つぎのような定義をする．

定義 数列 $\{a_n\}$ に対しあるきまった数 a があって，任意に正数 ε を与えるときこれに対して自然数 N を十分大きくとることによって，番号 n が N よりも大なすべての a_n につき

$$|a_n-a|<\varepsilon \tag{1.8}$$

が成立つようにできるならば，$\{a_n\}$ は a に収束するといい，a をこの数列の極限値という．記号では (1.6) または (1.7) のようにあらわす．

例 1.1. $0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{6}{7}, \cdots\cdots$

第 n 項は，$a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$．これと 1 との差は

$$|a_n-1|=\frac{1}{n}.$$

任意に正数 ε を与えるとき，$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ ととれば

$$|a_n-1|<\varepsilon$$

となる．よって $\dfrac{n+(-1)^n}{n} \longrightarrow 1$.

例 1.2. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots\cdots$

$a_n=\dfrac{1}{2^n}$．これと 0 との差をつくれば

$$|a_n-0|=|a_n|=\frac{1}{2^n}.$$

任意に正数 ε を与えたとき，n を $\left(\log\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\Big/\log 2$ より大きくとりさえすれば $1/2^n<\varepsilon$ となる．ゆえに，$\dfrac{1}{2^n}\longrightarrow 0$.

問 1.1. つぎの数列において，$|a_n-a|<\varepsilon$ が成立つようにするには番号 n をどのようにとればよいか．

(i) $a_n=\dfrac{1}{3^n}$，$a=0$.

(ii)　$a_n=n/10^n$,　$a=0$.

(iii)　$a_n=\dfrac{n^2+2}{3n^2+1}$,　$a=\dfrac{1}{3}$.

注意　実際に数列の極限値を求めたりする場合には，上のような定義に戻る必要はなく，適宜に計算すればよい．上の定義はいたずらにわずらわしく近ずき難いようにみえるかも知れないが，極限に関する議論は微妙で誤りやすいから，推論を正確に進めるにはどうしても上のように定義しないわけにはいかないのである．その理由は本書を読み進むうちに明らかとなってくるであろう．とくに第2章以後で扱う一様収束の議論は，上の定義をしなくては行なうことができない．

1.3.　無限大への発散と振動　数列 $1,3,5,7,\cdots\cdots$ では，第 n 項 $a_n=2n-1$ は，n が大きくなるとどんな数よりも大きくなる．すなわち，いくら大きな正数 G を考えても，n を $\frac{1}{2}(G+1)$ よりも大きくしさえすればそのような番号をもつ a_n は G よりも大きくなる．

一般にある数列 $\{a_n\}$ において，任意に大きな正数 G を考えるとき，これに対して適当な自然数 N をとることによって，N 番目よりも先の（$n>N$ なる）すべての a_n について

$$a_n>G \tag{1.9}$$

が成立つようにできるとき，$\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**するといい，

$$n\to\infty \text{ のとき } a_n\to+\infty \tag{1.10}$$

とかく．またときには $\{a_n\}$ の極限値が $+\infty$ であるといって

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \tag{1.11}$$

とかくこともある．たとえば

$$2n-1\to+\infty.$$

また上とは反対に，任意の正数 G に対して $n>N$ なすべての a_n について

$$a_n<-G \tag{1.12}$$

が成立つようにできるならば，$\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**するといい，

$$n\to\infty \text{ のとき } a_n\to-\infty$$

とかく．ときには $\{a_n\}$ の極限値が $-\infty$ であるといって，$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ とかくこともある．

たとえば $-2,-4,-8,-16,\cdots\cdots,-2^n\cdots$ では，

$$a_n=-2^n\to-\infty.$$

問 1.2. $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するならば，その各項の符号をかえてつくった数列 $\{-a_n\}$ は負の無限大に発散することを証明せよ．

数列 $\{a_n\}$ が収束もせず，正または負の無限大に発散もしないとき，**振動する**という．(1.3) に記した数列 $1, -1, 1, -1, \cdots$ は，-1 と 1 との間を振動しているわけである．

数列 $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, 9, \frac{1}{10}, \cdots\cdots$ では，

$$a_{2m}=\frac{1}{2m}, \quad a_{2m-1}=2m-1$$

であるから，収束していないことはもちろんであるが，$+\infty$ に発散しているわけでもない．なぜなら正数 G に対し，番号 N をいくら大きくとっても $n>N$ な a_n の中には G よりも大なものと小なものとがある．ゆえにこの数列は 0 と $+\infty$ との間を振動している．

1.4. 簡単な例

例 1.3. a はある定数であるとし，

$$a, a^2, a^3, a^5, \cdots\cdots, a^n, \cdots\cdots$$

を考える．$a>1,\ a=1,\ -1<a<1,\ a=-1,\ a<-1$, の各場合にわけて論じよう．

(i) $a>1$ のとき，$a=1+h,\ h>0$, とおく，まず

$$a^n=(1+h)^n>1+nh,\ n=2,3,4, \tag{1.13}^*$$

なる不等式を証明しよう．数学的帰納法による．$n=2$ のとき，

$$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$$

で，(1.13) は成立つ．つぎに $n=j$ のとき成立つとすれば $(1+h)^j>1+jh$ であって，この両辺に $1+h$ をかければ

$$(1+h)^{j+1}>(1+jh)(1+h)=1+(j+1)h+jh^2>1+(j+1)h$$

となるから，(1.13) は $n=j+1$ のときにも成立つ．したがって (1.13) は $n\geqq 2$ のときに正しい．

さて $h>0$ であるから $n\to\infty$ のとき $1+nh\to+\infty$, よって $a^n\to+\infty$.

(ii) $a=1$ のときはすべての n について $a^n=1$, ゆえに $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=1$.

(iii) $0<a<1$ のとき，$b=1/a$ とおけば $b>1$. $b=1+k(k>0)$ とおくと (i) により，$n\geqq 2$ のとき $a^n=1/(1+k)^n<1/(1+nk)$. $n\to\infty$ のとき $1/(1+nk)\to 0$ であるから $a^n\to 0$.

(iv) $a=0$ のときはもちろん $\lim a^n=0$

(v) $-1<a<0$ のとき，$b=-a$ とおくと $0<b<1$. $a^n=(-1)^n b^n$ で，(iii) により $b^n\to 0$ ゆえ，$a_n\to 0$. (iii), (iv), (v) をまとめて，$-1<a<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

---

* この不等式は，証明から明らかなように，$0>h>-1$ のときにも成立っいる．

(vi)　$a=-1$ のときは明らかに $+1$ と -1 との間を振動している.

(vii)　$a<-1$ のとき，$b=-a$ とおくと $b>1$. $a^n=(-1)^n b^n$ で，$n=2m$ (偶数) ならば $a^n=a^{2m}=b^{2m}\to+\infty$, $n=2m-1$ (奇数) ならば $a^n=-b^{2m+1}\to-\infty$. したがってこのときには，$\{a^n\}$ は $+\infty$ と $-\infty$ との間を振動している.

例 1.4.　a は正の定数として

$$a^{\frac{1}{n}},\quad n=1,2,3,\cdots\cdots.$$

$a>1$, $a=1$, $0<a<1$, の場合をわけて考える.

(i)　$a>1$ のとき．明らかに $a^{\frac{1}{n}}>1$ であるが，いくら小さな正数 ε を与えても，これに対して N を十分大きくとれば

$$n>N \text{ のとき } a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon. \tag{1.14}$$

なぜならば (1.13) から $(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon$. よって N を，$(a-1)/\varepsilon$ より大きくとっておきさえすれば

$$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon>1+N\varepsilon>a.$$

ゆえに (1.14) が成立ち，$|a^{\frac{1}{n}}-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$. したがってこのとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

(ii)　$a=1$ のときは任意の n について $a^{\frac{1}{n}}=1$ であるから，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$

(iii)　$0<a<1$ のとき．$a=1/b$ とおけば $b>1$. (i) によって，任意の正数 ε に対し，N を大きくとれば，$n>N$ のとき $|b^{\frac{1}{n}}-1|=b^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$. したがって $|a^{\frac{1}{n}}-1|=\dfrac{|b^{\frac{1}{n}}-1|}{b^{1/n}}$ $<|b^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$.

ゆえにこのときも，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

以上をまとめて，$a>0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1. \tag{1.15}$$

問 1.3.　つぎの数列の収束発散を調べよ.

(i)　$\left\{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$.　　　(ii)　$\{a^n/n\}$.

(iii)　$\left\{(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$.　　　(iv)　$\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}\sin\dfrac{n\theta}{2}\right\}$，$\alpha,\theta$ は定数.

(v)　$\{(a^2-7a+11)^n\}$，　a は定数.

注意. 数列はその各項が以上のように数式であらわされていたり，あるいは第 n 項を与える規則がわかっていたりする必要はない．ただ数が並んでいればよいのである．たとえば　　3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6, ……

は，円周率 (π) を小数でかいたときに出てくる数字をならべたものであるという以外，何の規則もわからない.

1.5.　極限値に関する簡単な諸定理

定理 1.1.　$\{a_n\}$ が収束すれば，その極限値はただひとつである.

(証明) 極限値がいくつもあるとし，その中の2つを a, a' とする．$|a-a'|=$

δ とおけば，$\delta>0$.

収束の定義から δ に対して自然数 N_1, N_2 を十分大きくとれば

$$n>N_1 \text{ のとき } |a_n-a|<\frac{\delta}{2},$$

$$n>N_2 \text{ のとき } |a_n-a'|<\frac{\delta}{2}.$$

ゆえに n を N_1, N_2 のどちらよりも大きくとればこの 2 つの不等式はともに成立ち

$$|a-a'|\leqq|a-a_n|+|a'-a_n|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$$

これは $\delta=|a-a'|$ としたことに矛盾する． （証終）

$\{a_n\}$ からいくつかの（有限箇または無限箇の）項を取り去った残りはやはり数列をなしている．これを $\{a_n\}$ の**部分数列**という．

定理 1.2. $a_n\to a$ ならば，その任意の無限部分数列も $\to a$.

（証明）任意の正数に対し，Nを大きくとれば

$$n>N \text{ のとき } |a_n-a|<\varepsilon.$$

$\{a_n\}$ の部分数列を $\{b_k\}$ とすると，番号 K が十分大きければ $b_{K+1}, b_{K+2}, \cdots\cdots$ の各項は $a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\cdots$ の中のどれかと一致する．したがって

$$k>K \text{ のとき } |b_k-a|<\varepsilon, \text{ よって } b_k\to a.$$ （証終）

定理 1.3. $a_n\to a,\ b_n\to b$ ならば

(i) $a_n\pm b_n\to a\pm b$, (ii) $a_nb_n\to ab$,

(iii) $b_n\neq 0,\ b\neq 0$ ならば $a_n/b_n\to a/b$.

（証明） (i) ε に対し N を十分大きくとれば，$n>N$ のとき $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

よって $|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$.

(ii) $|a_nb_n-ab|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\leqq|b_n|\cdot|a_n-a|+|a|\cdot|b_n-b|$.

$b_n\to b$ であるから，$|b_n|<M$, $n=1,2,3,\cdots$ となるような正数 M がある．ε に対し N を十分大きくとって，$n>N$ のとき

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2|a|+2}$$

が成立つようにする．すると

$$|a_n-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|a|}{|a|+1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(iii) $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a_nb-ab_n}{bb_n}\right|=\frac{|a_nb-ab+ab-ab_n|}{|bb_n|}$

$$\leqq\frac{1}{|b\,b_n|}\{|b|\cdot|a_n-a|+|a|\cdot|b-b_n|\}.$$

$b_n\neq 0$, $b_n\to b$, $b\neq 0$, であるから，すべての n について $|b_n|>B$, $|b|>B$, となる正数 B がある．ε に対して N を大きくとり，$n>N$ のとき

$$|a_n-a|<\frac{B^2}{2|b|}\varepsilon,\quad |b_n-b|<\frac{B^2}{2|a|}\varepsilon$$

となるようにしておくと

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|\leqq\frac{1}{B^2}\{|b|\cdot|a_n-a|+|a|\cdot|b-b_n|\}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\qquad\text{(証終)}$$

とくに $b_n=\lambda$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$ とおけば

定理 1.4.　λ は定数とする．$a_n\to a$ ならば

(i)　$a_n+\lambda\to a+\lambda$, (ii) $\lambda a_n\to\lambda a$.

定理 1.5.　$a_n\to a$, $b_n\to b$ であって，ある番号 n_0 から先では $a_n\leqq b_n$ ならば，$a\leqq b$.

(証明) $a>b$ と仮定して矛盾を示そう．

$a-b=2\delta>0$ とする．N を十分大きくとれば $n>N$ のとき $|a_n-a|<\delta$, $|b_n-b|<\delta$. したがって

$$a-b=(a-a_n)-(b-b_n)+(a_n-b_n)$$

$a_n-b_n\leqq 0$ であるからこれは $\leqq(a-a_n)-(b-b_n)\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<2\delta$ となる．これは $a-b=2\delta$ としたことに矛盾する．　　(証終)

注意　この定理において，すべての n について $a_n<b_n$ であるとしても $a<b$ ということはいえない．たとえば $a_n=\frac{n-1}{n}$, $b_n=\frac{n+1}{n}$ とすれば $a_n<b_n$ であって，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$.

定理 1.6.　$s_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ とおくと，$a_n\to a$ ならば $s_n\to a$.

(証明)　$s_n-a=\frac{1}{n}\{(a_1-a)+\cdots\cdots+(a_n-a)\}$.

$a_n\to a$ ゆえ，すべての n について $|a_n|<M$, $|a|<M$ となる正数 M がある．ゆえに $|a_n-a|<2M$. $n=1,2,3,\cdots$ 任意の正数 ε に対し N を十分大きくとって

$$n>N\text{ のとき }|a_n-a|<\varepsilon\qquad(1.16)$$

となるようにする．このとき

$$|s_n-a|=\left|\frac{1}{n}\{(a_1+a)+\cdots\cdots+(a_N-a)+(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)\}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{n}\{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|\}+\frac{1}{n}\{|a_{N+1}-a|+\cdots+|a_n-a|\}$$

$$\leqq\frac{1}{n}\cdot 2NM+\frac{n-N}{n}\varepsilon.$$

N を (1.16) が成立つように固定しておいて n を大きくし，$\dfrac{2NM}{n}<\varepsilon$ となるようにすると，

$$|s_n-a|<\varepsilon+\frac{n-N}{n}\varepsilon<2\varepsilon.$$

よって $s_n\to a$． (証終)

例 1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$ を求めてみよう．

$A_n=\log(n^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}\log n$ とおく*．$n=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdots\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{1}$ であるから，$a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$とおけば $\log n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ よって $A_n=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_{n-1})=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}\times(a_1+\cdots+a_{n-1})$．明らかに $a_n\to 0$ であるから定理 1.6 により $A_n\to 0$．ゆえに，$n^{\frac{1}{n}}\to 1$．

問 1.4. すべての n について $a_n\leqq c_n\leqq b_n$ であって，$a_n\to\alpha$, $b_n\to\alpha$ ならば $c_n\to\alpha$ であることを証明せよ．

問 1.5. 第 n 項がつぎの式で与えられる数列の極限値を求めよ．

(i) $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$． (ii) $\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}$

(iii) $\frac{1}{n}(\log n)^{\lambda}$, $\lambda>0$*．

§ 2. 数列の収束判定条件

2.1. 数列の単調性と有界性 すべての n について $a_n\leqq a_{n+1}$ が成立っている数列 $\{a_n\}$ を**単調増加**であるといい，$a_n\geqq a_{n+1}$ である数列を**単調減少**という．

とくに等号が決して成立たないとき，**狭義に単調**ということがある．

1 頁に記した数列

---

* 対数は常用対数としておく．

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\cdots\cdots\cdots\text{は単調減少}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\cdots\cdots\cdots\cdots\text{は単調増加}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{は単調ではない.}\ \cdots \quad (2.3)$$

$\{a_n\}$ が単調減少であればその各項の符号をかえてつくられる数列 $\{-a_n\}$ は単調増加である．したがって以下単調な数列について考えるときは，主として単調増加の場合のみを扱うことにする．

数列 $\{a_n\}$（単調とかぎらない）において，すべての n について $a_n<M$ が成立つような定数 M があるとき，$\{a_n\}$ は**上に有界**であるといい，M をその**上界**という．すべての n について $a_n>L$ が成立つ定数 L があれば**下に有界**であるといい，L をその**下界**という．$\{a_n\}$ が上にも下にも有界（すなわち，絶対値数列 $\{|a_n|\}$ が上に有界）であるとき，単に**有界**であるという．

ある数列に対し，上界や下界はあるとすれば無数にある．たとえば M が $\{a_n\}$ の上界ならば，$M'>M$ な定数 M' はすべてやはり上界である．

数列 (2.1) は有界で，上界下界としてはたとえば 3,1 などがある．(2.2) は下に有界（0は一つの下界）であるが上に有界ではない． $\{(-2)^n\}$ は上にも下にも有界でない．

$\{a_n\}$ が下に有界なら，$\{-a_n\}$ は上に有界である．さてわれわれは，つぎの定理をこれからの議論の出発点としよう．

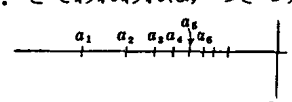

図6

定理 2.1.　上に有界な単調増加数列は収束する．

この定理の成立つことは図6から直観的に認められるものとして承認しよう．実際われわれは，実数は有限または無限小数であらわされ，逆に無限小数は一つの実数をあらわしているものと考えているが，これは上に有界な有理数（有限小数）の単調増加列は収束して，その極限として一つの実数が定義されるとしているわけである．

たとえば単調増加列 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, … によって $\sqrt{2}$ なる実数が定められる．また $a>0$ として $a^{\sqrt{2}}$ なる記号の意味を考えてみられるがよい．それはもはや，“a を $\sqrt{2}$ 回掛け合わせた” ということではないであろう．

定理 2.2.　上に有界でない単調増加数列は正の無限大に発散する．

（証明）$\{a_n\}$ が上に有界でなければ，いくら大きな正数 G を与えても，$a_N>G$ となるような a_N がある．単調増加であるから $n>N$ では $a_n \geqq a_N > G$. これ