经 济 数 学 基 础 之 二

线性代数

XIANXING DAISHU

上海高校《经济数学基础》编写组

立信会计出版社
LIXIN KUAIJI CHUBANSHE

经济数学基础之

线性代数

XIANXING DAISHU

上海高校《经济数学基础》编写组

立信会计出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/上海高校《经济数学基础》编写组编著.
—上海：立信会计出版社，2001.2
(经济数学基础)
ISBN 7-5429-0835-9

Ⅰ.线… Ⅱ.上 Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第03726号

出版发行	立信会计出版社
经　　销	各地新华书店
电　　话	(021)64695050×215
	(021)64391885(传真)
	(021)64388409
地　　址	上海市中山西路2230号
邮　　编	200233
E-mail	*lxaph@sh163c.sta.net.cn*
出 版 人	陈惠丽

印　　刷	立信会计常熟市印刷联营厂
开　　本	850×1168毫米　1/32
印　　张	5.5
插　　页	2
字　　数	127千字
版　　次	2001年2月第1版
印　　次	2001年2月第1次
印　　数	6 000
书　　号	ISBN 7-5429-0835-9/F·0770
定　　价	10.80元

如有印订差错　请与本社联系

《经济数学基础》编写组

顾　　问　胡启迪（上海教育考试院院长、教授）

总 主 编　朱弘毅（上海冶金高等专科学校）

副总主编

赵斯泓（立信会计高等专科学校）　张福康（东海职业技术学院）

李树冬（上海商业职业技术学院）　桂胜华（上海第二工业大学）

居环龙（上海化工高等专科学校）　车荣强（上海金融高等专科学校）

龚秀芳（上海师范大学）　施国锋（上海旅游高等专科学校）

钱　锦（上海海关高等专科学校）

编委（按姓氏笔画排列）

车荣强　朱弘毅　刘志石　孙华明　吴　珞

李树冬　余　敏　沈　昕　居环龙　周伟良

张福康　赵斯泓　施国锋　费伟劲　桂胜华

钱　锦　黄玉洁　龚秀芳　戴宏图

主审　李重华（上海交通大学教授、东海学院副院长）

审稿组（按姓氏笔画排列）

李重华（上海交通大学）　罗爱芳（上海建设职工大学）

邱慈江（上海应用技术学院）　姚力民（上海商业职业技术学院）

俞国胜（上海大学）　冯珍珍（上海第二工业大学）

第二册《线性代数》

主　　编　居环龙　施国锋

副主编　沈　昕　余　敏

序

相当时间以来，经济数学基础被列为我国高等院校经济类和管理类专业的基础课，受到各院校的普遍重视。多年的实践，在全国各地已形成一些相应的教材。需指出的是，在近两年及可以预料的第十个五年计划之内，高等教育规模呈扩招的形势，其中特别要积极发展高等职业技术教育，以适应新世纪经济发展对人才的需求。面对高等教育中高职与高专这样一个特殊的学习群体，编写一套有针对性的教材，成为许多人的愿望。有幸在上海市教育委员会领导和组织下，由上海市高职与高专院校联合组成了《上海高校〈经济数学基础〉编写组》，编写了这套《经济数学基础》教材。该套教材由《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三册组成，可为大专层次的经济类和管理类专业或相近专业的教学选用。

据我了解，本套教材的编写者都是一些有丰富专科教学实践经验的数学教师；他们长期工作在上海市高等专科学校，熟悉学生，掌握教学规律。在这套教材的编写过程中，又进行了广泛的调查研究和深入的切磋讨论，紧扣高职与高专的培养目标，把握“以应用为目的，以必需够用为度”的编写原则，认真细致地做好教材编写工作。

本套教材力图体现高职高专特色和经济管理专业特点，因此在内容的选取和手段的处理上，能调节好数学推理训练与运算技能培养的尺度，无论从概念的引入还是例题与习题的选择上，都可看出编写者是花了力气的。另外教材的语言力求通俗精炼，有利于启发式教学，有利于学生自学。

当大家研读手中的教材时，世界已处于新世纪坐标的起点上。面对新世纪，我们必须在全面提高教育质量上下功夫，特别是在全面推进“以德育为核心，以创新精神和实践能力为重点”的素质教育工程中作贡献。以此为标准，我们的教材还必须向前发展，且在实践中完善。因此希望使用本套教材的各院校，能结合教学实际，注入更新的功能，譬如随着教学内容和课程体系改革的深入，不断地融入计算机和应用软件的使用，开拓经济数学基础的新领域，以适应信息化社会中对应用型人才培养的要求。

为了表示一个老数学工作者对新世纪数学教学的期盼，谨献此序。

胡启迪

于 2000 年岁尾

（上海市教育考试院院长，教授）

前　言

为适应高职高专教育的发展，在上海市教委的组织和领导下，由上海市高职高专院校联合组成上海高校《经济数学基础》编写组，为了达到高职高专的培养目标，培养德、智、体、美等方面全面发展的高等技术应用性人才，而为高职高专经济类和管理类专业编写了一套具有高职高专特色的教材。

《经济数学基础》由朱弘毅任总主编，共分三册。第一册《微积分》，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理、导数应用、二元函数微积分、微分方程与级数；第二册《线性代数》，内容包括行列式、矩阵、向量及线性相关性、线性方程组、投入产出模型、线性规划问题；第三册《概率论与数理统计》，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二元随机变量、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、正交试验设计。书中注有“*”号的内容供不同层次高职选用。

这套教材，是按照“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，参照高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》，结合数学教学改革的实际经验编写的。

这套教材注意从实际问题中引入概念；注意把握好理论推导的深度；注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养；贯彻理论联系实际和启发式教学原则；深入浅出，通俗易懂，便于教师讲授和读者自学。书中每节后面配有习题，每章后面配有复习题。

《经济数学基础》由上海交通大学教授、东海职业技术学院副院长李重华主审，参加审稿的还有：邱慈江、冯珍珍、姚力民、俞国胜、罗爱芳。他们认真审阅原稿，提出了许多宝贵的意见。本教材在编写和出版过程中得到了上海教育考试院院长胡启迪教授、上海市教委高等教育办公室徐国良副主任、立信会计出版社孙时平总编辑、蔡莉萍编辑、王征编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

在编写过程中，因作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同仁和读者不吝指正。

朱弘毅

2000 年 11 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的基本工具之一。本章首先引入行列式的定义，然后讨论行列式的基本性质与计算方法，最后给出解线性方程组的克莱姆法则。

第一节　二阶行列式与三阶行列式

用消元法解两个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

由此引进二阶行列式概念。

定义 1　用 2^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为行列式的元素，横排称行，竖排称列。

由定义 1，线性方程组的解可以写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}。$$

【例 1】 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=9 \\ x_1+7x_2=-4 \end{cases}$$

解　因为$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=2\times7-3\times1=11\neq0$

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}=9\times7-3\times(-4)=75$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-9\times1=-17$$

所以线性方程组的解为

$$x_1=\frac{75}{11}, x_2=-\frac{17}{11}$$

类似地，讨论三个未知数线性方程组的求解问题，可引入三阶行列式。

定义 2　用 3^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示数值

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}2)$$

根据(1-1)式,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1\text{-}3)$$

对于(1-3)式三阶行列式的值可按如下的对角线法则来记忆:图 1-1 中凡实线所联三个元素的积相加,减去凡虚线所联三个元素的积,它们的代数和就是三阶行列式的值。

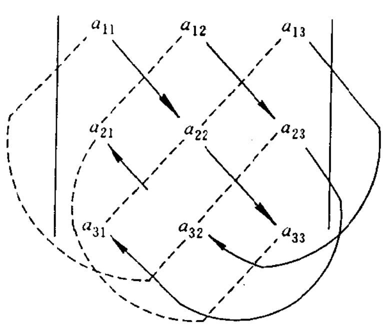

图 1-1

【例 2】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式定义,即公式(1-2),得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)\times\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\times(-1-3)-2\times(-5-6)-(-5+2) \\ &= 13\end{aligned}$$

[例 2]我们也可以按公式(1-3)来计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3\times(-1)\times1+2\times3\times2 \\ &\quad +(-1)\times(-5)\times1-(-1)\times(-1)\times2 \\ &\quad -2\times(-5)\times1-3\times3\times1 \\ &= -3+12+5-2-(-10)-9=13\end{aligned}$$

习 题 1-1

1. 计算下列行列式的值。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

2. 用行列式解下列线性方程组。

(1) $\begin{cases}2x_1+5x_2=1\\3x_1+7x_2=2\end{cases}$　　　(2) $\begin{cases}x_1+x_2=-3\\5x_1-4x_2=12\end{cases}$

第二节　n 阶行列式

我们来分析一下三阶行列式的定义式(1-2),即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

首先,上式右端三项,是三阶行列式 D 中第一行的三个元素 a_{11}、a_{12}、a_{13}分别乘上三个二阶行列式,而所乘的二阶行列式是 D 中划去该元素所在的第一行与第 j 列元素后余下的元素所组成,$j=1,2,3$。

其次,每一项之前都要乘一个$(-1)^{1+j}$,1 和 j 正好是元素 a_{1j} 的行标和列标。

按照这一规律,我们可用三阶行列式定义四阶行列式。以此类推,在已定义了 $n-1$ 阶行列式之后,便可得 n 阶行列式的定义。

定义 1　用 n^2 个数组成的记号

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

表示数值