萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

三角法
三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

商務印書館發行

三角法
三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

算學小叢書

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

王雲五主編
萬有文庫
第一集一千種

三角法—三角函數

林鶴一著
駱師曾譯

發行兼印刷者 上海寶山路 商務印書館
發行所 上海及各埠 商務印書館

中華民國十九年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

TRIGONOMETRIC FUNCTION
By
HAYASHI
Translated by
LO SHIH TSENG
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

B九二分

原　序

三角法爲算學理論之基礎，其應用特於測量術爲不可少，此盡人而知之者也，無此則算學之理論及應用，皆不得發展．且中等教育課之，可爲代數學與幾何學之連鎖，而總括此等之智識，是則三角法所以爲特重課程之一也．又於函數思想之養成上，決不可輕視．唯初學者在未領會其運用之妙以前，終感其極複雜而不甚了了．本篇爲三角法之入門，故亦以此爲患，特注意而敍述之．據此則此法之基本概念，即可十分了解，而此法亦覺談之甚易也．

大正四年十二月

林　鶴　一

目　　次

第一章　測角法 1

1. 三角法 1
2. 量之測定 1
3. 角及其測度 2
4. 六十分法(英國法或實用的測角法) 3
*5. 百分法(法國法) 4
*6. 六十分法與百分法之關係 6
7. 弧度法(理論的測角法) 8
8. 弧度法與六十分法之關係... 9
問題 I 11

第二章　銳角之三角函數 ....

9. 三角比之定義 14
10. 函數 15
11. 一定角之三角函數 17
12. 三角函數之幾何學的表示... 17
13. 三角函數所取之值之限界... 18
14. 角之變化與其函數值變化之關係 19
問題 II 21
15. 同角之三角函數之關係 22
16. 以三角函數之一表他三角函數... 24
問題 III 28

第三章 恆等式之證明……………………………… 31

17. 由兩邊中之複雜者誘導爲簡單之方法 … … … 31

問題 IV … … … … … … … … … 32

兩邊變爲同一式之方法 … … … … … … 33

問題 V … … … … … … … … … 34

由兩邊之差爲零而證明之方法… … … … … 34

問題 VI … … … … … … … … … 35

由已知之恆等式而誘導之方法… … … … … 35

認原題之恆等式爲十分眞確而考究其條件之方法 … 36

問題 VII … … … … … … … … … 38

18. 消去法 … … … … … … … … … 39

問題 VIII… … … … … … … … … 41

第四章 特別角之三角函數及三角函數之變化 …………………………………… 43

19. 餘角之三角函數 … … … … … … … 43

20. 45° 之三角函數 … … … … … … … 44

21. 30° 及 60° 之三角函數 … … … … … … 44

*22. 18°, 36°, 54°, 72° 之三角函數 … … … … 45

*23. $A<45^\circ$時 $\sin 2A=2\sin A\cos A$, $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$, $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ 之幾何學的證明 … … … 47

*24. 15° 及 75° 之三角函數 … … … … … … 49

問題 IX … … … … … … … … … 50

25. 無限大及無限小 … … … … … … … 52

26. 0° 及 90° 之三角函數 … … … … … … 53

27. 三角函數之變化 ... 54
問題 X ... 55
28. 三角方程式 ... 56
問題 XI ... 58

第五章 一般角之三角函數 ... 60

29. 直線之正負 ... 60
30. 象限 ... 61
31. 直線座標 ... 61
問題 XII ... 62
32. 角之正負 ... 63
*33. 極座標 ... 63
34. 一般角 ... 64
問題 XIII ... 65
35. 任意角之三角函數 ... 66
36. 三角函數之符號 ... 68
問題 XIV ... 70
37. 任意角之三角函數之關係 ... 71
問題 XV ... 73
38. 二角 θ, $-\theta$ 之三角函數之關係 ... 74
問題 XVI ... 76
39. 餘角之擴張定義 ... 76
40. 互為餘角之二角 θ, $90°-\theta$, 其三角函數之關係 ... 77
41. 二角 θ, $90°+\theta$ 之三角函數之關係 ... 79
42. 補角之擴張定義 ... 80
43. 互為補角之二角 θ, $180°-\theta$, 其三角函數之關係 ... 80

44. 二角 θ, $180°+\theta$ 之三角函數之關係 81
45. 二角 θ, $n\,360°\pm\theta$ 之三角函數之關係 83
*46. 二角 θ, $n.180°\pm\theta$ 之三角函數之關係 83
47. 角之化法 85
問題 XVII 86

第六章 三角函數之變化 89

49. 正弦函數之變化 89
50. 餘弦函數之變化 91
51. 正切函數之變化 93
52. 餘切函數之變化 96
53. 正割函數之變化 98
54. 餘割函數之變化 100
問題 XVIII 014

第七章 三角函數之曲線圖示 106

55. 函數之曲線圖示 106
56. 正弦曲線 108
57. 餘弦曲線 109
58. 正切曲線 109
59. 餘切曲線 110
60. 正割曲線 110
61. 餘割曲線 111
62. 應用二例 111
問題 XIX... 114

答及解法指針 115

三角法—三角函數

第一章

測角法

1. 三角法. 三角法 (trigonometry) 一語, 卽由希臘語所謂「測三角形」(trigonon 三角形＋metria 測定) 之意義而來, 故測三角形之邊, 角及面積等, 爲其本來之目的, 邇來其應用之範圍擴大, 現今凡關於角之數學之部份, 皆網羅在內, 無純正數學與應用數學之別, 而一般爲至高等數學極要用之一分科也.

於平面上論三角形, 稱爲**平面三角法**, 於球面上論三角形 (球面三角形之定義及簡單性質, 當於立體幾何學學之), 謂之**球面三角法**.

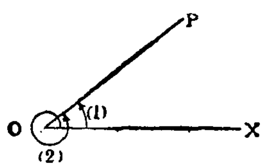
本書專論平面三角法.

2. 量之測定.

某量 A, 以與其同種類之他一定量 B 測之, 而求 A 與 B 之比, 如此者稱 B 爲**單位**, 其比謂之 B 爲單位時 A 之**數值**或**測度**, 例如某

物長 5 尺, 以 1 尺爲單位, 則測度爲 5. 若同長之 5 尺, 以 50 寸表之, 則單位爲 1 寸, 測度爲 50 是. 卽單位變更, 測度亦隨之而變動也.

3. 角及其測定. 在初等幾何學所謂角者, 通例乃依二邊相互之位置而定, 以表小於平角唯一之劣角也. 然在三角法所謂角者, 可視爲固定其任何一邊(是謂**首線**), 而他邊於其頂點(是謂**極**)之周圍, 由首線之位置, 依與時計針之迴轉方向相反對之方向(**反時針方向**) 迴轉, 達於自己之位置而止 (此迴轉之邊曰**動徑**), 由此迴轉之量以測定其角.



如左圖, OX, OP 爲由 O 引出之無限半直線, O 爲極, OX 爲首線, OP 爲動徑, 而 OX 通例依水平由 O 向右方取之.

今設 $\angle XOP$ 爲幾何學的角, 此不過單表如 (1) 之最小角, 若如上述迴轉之結果, 卽三角法的角, 則 $\angle XOP$ 爲 (2), 如下.

1 周角 $+\angle XOP$

又同樣可視爲 2 周角 $+\angle XOP$

…………………

n 周角 $+\angle XOP$

由是同一幾何學的圖形，可以表無限多之三角法的角，是則三角法的角之大無限制，又依動徑之某位置所表之角，亦可解釋爲經幾周角而達於其位置者也。

測三角法的角，如以直角爲單位，則不便之處頗多，因此以小於直角之角爲單位，甚覺便利。在三角法中，由其所採之單位，通常用下列三種之測角法。

I.　六十分法。

II.　百分法。

III.　弧度法。

4. 六十分法（英國法或實用的測角法）

1 直角之 $\frac{1}{90}$ 曰 1 **度**，1 度之 $\frac{1}{60}$ 曰 1 **分**，1 分之 $\frac{1}{60}$ 曰 1 **秒**，秒以下通例以秒之小數或分數表之，而用此等單位，即可呼某角，例如 38 度 25 分 30 秒，可表以如下之記法。

$$38° \quad 25° \quad 30''.$$

今用此記法表明度分秒之關係如下

$$1 \text{ 直角} = 90°$$

$$1° = 60'$$

$$1' = 60''.$$

如此各單位皆用六十進法，是謂**六十分法**，亦稱英國法，主於實用上之測角用之。

例 1. 0.254 直角，試以六十分法表之。

解. 0.254 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 22^\circ.86 \\ 60 \\ \hline 51'.6 \\ 60 \\ \hline 36'' \end{array}$$

答 22° 51′ 36.″

例 2. 18° 29′ 57″, 試以直角之小數表之.

解.
$$\begin{array}{r|l} 60 & 57'' \\ 60 & 29'.95 \\ 90 & 18^\circ.4991\dot{6} \\ & 0.205546\dot{2}9\dot{6} \text{ 直角} \end{array}$$

答 $0.205546\dot{2}9\dot{6}$ 直角.

例 3. 15° 3′ 12″, 試以直角之分數表之.

解. $15^\circ\ 3'\ 12''=15^\circ\ 3'\frac{12}{60}$

$$=15^\circ\frac{16'}{5}$$

$$=15^\circ\ \frac{16}{5\times 60}$$

$$=\frac{1129}{75\times 90}\text{ 直角}$$

$$=\frac{1129}{6750}\text{ 直角.}$$ 答

*5. 百分法(法國法).

1 直角之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **度** (grade), 1 度之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **分**, 1 分之 $\frac{1}{100}$ 曰 1 **秒**, 而用此等單位卽可呼某角. 例如 42 度 68分 82秒, 可表以下之記法.

$$42^g\ \ 68^{\backprime}\ \ 82^{\backprime\backprime}.$$

今以此記法表示各單位之相互關係

$$1\ \text{直角}=100^g$$

$$1^g=100^{\grave{}}$$

$$1^{\grave{}}=100^{\grave{}\grave{}}$$

如此各單位皆用百進法，是謂**百分法**，又名**法國法**．因此方法用百進法，故以此單位與他種單位換算頗易．

例如

$$42^g\quad 68^{\grave{}}\quad 82^{\grave{}\grave{}}=42^g\ 68^{\grave{}}.82^{\grave{}\grave{}}$$
$$=42^g.6882$$
$$=0.426882\quad\text{直角}.$$

$$0.02,05,07\ \text{直角}=2^g.05,07$$
$$=2^g\quad 5^{\grave{}}\quad .07$$
$$=2^g\quad 5^{\grave{}}\quad 7^{\grave{}\grave{}}.$$

注意 1. 百分法者，在第十九世紀之初，法蘭西革命之後，始於法國創造，且比六十分法有種種便利，似大有進步也明矣．唯六十分法之創設，其時代既較百分法爲極古，因此而世上用之者甚廣，凡關於角之測法，殆無不以此表之，既如此，欲將書中之六十分法，悉依百分法換算，豈非一大難關乎，故百分法，今惟創造者之法國用之，其餘則依然襲蹈舊慣，遂至於今日．

注意 2. 分，秒之語，有用於六十分法，百分法及時間之三種．因欲防混雜之故，於六十分法，用記號 $^\circ$, $'$, $''$, 於百分法，用 g, $\grave{}$, $\grave{}\grave{}$, 於時間用 h, m, s. 例如 10時 25分 10秒 記爲 $10^h\ 25^m\ 10^s$. 時之記號，係 John Herschel 所創用．又度之一語，用於角及溫度，且其記號亦全然相同，此唯於前後之文意識別之，庶可免實際之混雜．

譯註. 以後凡指百分法之度數，概稱百分度，若單言度者，則皆指六十分法之度數.

*6. 六十分法與百分法之關係.

某角依六十分法爲 D 度，依百分法爲 G 度，則

$$D^\circ=\frac{D}{90}\text{ 直角},$$

$$G^g=\frac{G}{100}\text{ 直角},$$

由是

$$\frac{D}{90}=\frac{G}{100}. \tag{1}$$

據此卽可互相換算.

例 1. 115°，試以百分度表之.

解. $G=\frac{100}{90}D=\frac{10}{9}\times 115=127\frac{7}{9}$.　　答 $127^g\frac{7}{9}$.

例 2. 228^g，試以度數表之.

解. $D=\frac{90}{100}G=\frac{9}{10}\times 228=205.2$.　　答 $205.^\circ 2$.

次設在六十分法爲 m' 之角，在百分法爲 μ'，卽 $\frac{m}{60\times 90}$ 直角及 $\frac{u}{100\times 100}$ 直角，故

$$\frac{m}{60\times 90}=\frac{\mu}{100\times 100},$$

或

$$\frac{m}{27}=\frac{\mu}{50}. \tag{2}$$

次設在六十分法爲 s'' 之角，在百分法爲 $\sigma^{\backprime\backprime}$，則雙方各以直角表之，與上同樣，而得次之關係式.

$$\frac{S}{60\times60\times90}=\frac{\sigma}{100\times100\times100},$$

或
$$\frac{S}{81}=\frac{\sigma}{250}. \tag{3}$$

由以上求得 (1), (2), (3) 之三結果，而得六十分法與百分法相互之換算.

例 1. 試將 $21^\circ\,36'\,17''.1$ 換算爲百分法.

解. 由 (1), $21^\circ = 23^g.\dot{3} = 23^g\,33^\backprime\,33^{\backprime\backprime}.\dot{3}$

由 (2), $36' = 66^\backprime.\dot{6} = 66^\backprime\,66^{\backprime\backprime}.\dot{6}$

由 (3), $\underline{17''.1 = 52^{\backprime\backprime}.\dot{7} = 52^{\backprime\backprime}.\dot{7}}$

$\therefore\ 21^\circ\,36'\,17''.1 = 24^g\,52^{\backprime\backprime}.\dot{7}$　答.

例 2. 試將 $24^g\,52^{\backprime\backprime}\frac{7}{9}$ 換算爲六十分法.

解. 由 (1), $24^g = 21^\circ.6 = 21^\circ\,36'$

$\underline{52''.\dot{7} = 17''.1}$

$\therefore\ 24^g\,52^{\backprime\backprime}.\dot{7} = 21^\circ\,36'17''.1$

別法. 六十分法換算爲百分法，只須先將六十分法化爲直角之單名數，然後將其結果換算爲百分法可矣. 百分法換算爲六十分法，亦全與此同樣.

例 1. 115°，試以百分度表之.

解. $115^\circ = \frac{115}{90}$ 直角 $= 1.27\frac{7}{9}$ 直角 $= 127\frac{7^g}{9}$.　答.

例 2. $63^\circ\ 14'\ 51''$ 試以百分法表之.

解.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 51'' \\ \hline 60 & 14'.85 \\ \hline 90 & 63^\circ.2475 \\ \hline & 0.70,27,50 \end{array}$$

0.70,27,50 直角 $=70^g\ 27^{\backprime}\ 50^{\backprime\backprime}$. 答.

例 3. 228^g 試以度數表之.

解. $228^g = 2.28$ 直角

$= 90^\circ \times 2.28$

$= 205.2^\circ$. 答.

例 4. $94^g\ 23^{\backprime}\ 87^{\backprime\backprime}$ 試以六十分法表之.

解. $94^g\ 23^{\backprime}\ 87^{\backprime\backprime} = 0.942387$ 直角

$$\begin{array}{r} 90 \\ \hline 84^\circ.81483 \\ 60 \\ \hline 48'.8898 \\ 60 \\ \hline 53''.388 \end{array}$$

答 $84^\circ\ 48'\ 53.388''$.

7. 弧度法(理論的測角法).

於一圓內, 截一與半徑等長之弧. 立於此弧上之中心角, 謂之 1 半徑度 (Radian).

由幾何學, 已知圓周與其直徑之比或半圓周與半徑之比, 在任何圓皆爲一定不易. 此一定不易之定數, 乃一無理數, 是謂圓周率, 通例以希臘文字 π (派愛) 表之. π 爲歷史的有名之數, 今以小數二十位記之如下.

$$\pi = 3.14159265358979323846\ldots\ldots\ldots$$