高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

工　程　力　学

运动学和动力学

武汉水利电力学院 编

高等教育出版社

内容简介

本书是根据一九八一年十二月教育部召开的高等工业学校函授教育工作会议审订的《工程力学函授教学大纲》(草案)(电力、电子、冶金、地质、化工、轻纺等类专业试用)的要求编写的。

全书分静力学、运动学和动力学、材料力学三册出版。本册为运动学和动力学，内容包括：点的运动、刚体的基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动、质点运动的微分方程、动量定理、动量矩定理、动能定理、动静法、虚位移原理等。每章有学习指导，章末有小结、思考题和习题，并附有习题答案。

本书可作为高等工业学校电力、电子、冶金、地质、化工、轻纺等类专业工程力学课程的函授教材，兼作高等教育自学用书，也可供其它专业和有关工程技术人员参考。

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)
工程力学
(运动学和动力学)
武汉水利电力学院 编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
房山南召 印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 12.75 字数 308,000
1985年4月第1版 1985年10月第1次印刷
印数 00,001—6,740
书号 15010·0676 定价 2.60 元

前　　言

本书是根据一九八一年十二月教育部召开的高等工业学校函授教育工作会议审订的《工程力学函授教学大纲》(草案)的要求编写的，适用于电力、电子、冶金、地质、化工、轻纺等类专业。

《工程力学》分为静力学、运动学和动力学、材料力学，共三册，分别出版，各校可根据专业要求选用。书中标有“*”号的节次为加深加宽内容，可按照教学需要选学或完全不用。

本书在编写过程中，为了便于自学，力求讲述清楚，并且在阐明基本概念和基本理论的基础上，结合工程实际列举了较多的例题，以帮助读者理解概念，掌握理论，提高分析问题和解决问题的能力。同时考虑到工程力学与物理学的衔接，本书适当提高了学习的起点，减少了不必要的重复。此外，本书各章写有学习指导、小结、思考题和习题；习题并附有答案。

本书一律采用国际单位制，考虑到目前的实际情况，本书在运动学和动力学、材料力学两册书末附有国际单位制与工程单位制的单位换算表，供读者参考。

本书作为高等学校电力、电子、冶金、地质、化工、轻纺等类专业的函授教材，兼作高等教育自学用书，也可供其它专业和有关工程技术人员参考。

本书初稿由武汉水利电力学院理论力学教研室和建筑力学教研室集体讨论编写，经过试用，在广泛征求函授辅导站师生意见的基础上进行了修订。参加本书静力学、运动学和动力学编写工作的有：汪厚礼、胡性侃、黄汉权、李廷孝、尤书平和周巨伯同志；参加本书材料力学编写工作的有：王文安、刘翠莲和邓训同志。全书统

稿工作，静力学、运动学和动力学由周巨伯同志负责，材料力学由王文安同志负责。

参加本书审稿的有：天津大学李骊、苏翼林，东北工学院刘思汉、于绶章，华东化工学院陈维新、陆钟瑞、贾宝范，华中工学院余天庆、李伯谅、俞诗玲、黄炳粱同志。审稿的同志对本书提出了不少很好的意见，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

编　　者

一九八四年十二月

目　录

运 动 学

静力学研究物体在力系作用下的平衡条件。如若作用在物体上的力系不平衡，物体便要改变其原有的静止状态或运动状态。运动学和动力学就是研究物体运动变化规律的科学。运动学只从几何学的角度讨论物体的运动，而不涉及物体运动的变化与作用于其上的力和物体的质量等物理因素之间的关系。

学习运动学的目的，一方面为学习动力学打下必要的基础，同时也为直接解决工程技术中的有关问题提供理论依据。例如，在机械工程中，各种机械由原动力带动后，通过各种零部件的运动传递，使某一零部件按照需要的规律运动。所以，在设计这类传动机械时，就要应用运动学的知识对机构进行运动分析，使其完成一定的动作，以达到预期的要求。

运动是指物体在空间的位置随时间的变化。一切运动都在空间和时间之中进行，空间和时间与运动是不可分割的，它们是物质存在的形式。

物体在空间的位置只能相对地描述。因此，在研究某一物体的某一具体运动时，必须指明是相对于哪一个物体的运动。这个选作为参考的物体称为参考体。为了确定运动物体的位置而任意选取的并固结在参考体上的坐标系称为参考坐标系或参考系。显然，同一物体对于不同参考系的运动是不相同的。例如，输电线塔相对于地球是静止的，相对于太阳就不是静止的。又如，在行驶中的火车车厢内走动的旅客，相对于车厢的运动与相对于地球的运动是完全不同的。运动物体的这一特性，称为运动的相对性。在一

般工程问题中，通常将固结在地球上的坐标系作为参考系。

研究物体运动变化的规律时，经常要用到"瞬时"和"时间间隔"这样两个有关时间的概念。瞬时是指物体运动过程中的某一时刻。时间间隔则是指两个瞬时之间的一段时间。开始计算时间的那一时刻叫做初瞬时，从初瞬时开始，经过时间 t 以后的那一时刻叫做瞬时 t。从瞬时 t_1 到瞬时 t_2 的时间间隔是 $\Delta t = t_2 - t_1$。

应该指出的是，虽然空间和时间与物质的运动是不可分割的，而且相对论已经证明了空间和时间的量度依赖于物体运动的速度。但是，这种依赖关系在数量上的反映，只有当物体运动的速度接近于光速时才是明显的。而古典力学所研究的问题，特别是一般工程问题中，物体运动的速度远小于光速，在这种情况下，空间和时间对于物体运动的依赖关系在数量上的反映可以忽略不计。因此，在古典力学的范畴内，空间和时间被认为是独立的。

由于运动学是从几何学方面来研究物体的运动，而不考虑物体的质量，因而可以把所研究的物体看成是单纯的几何形体，只考虑其形状和尺寸。如果在所研究的问题中，物体的形状和尺寸的变化不起主要作用，就可以把物体看成是一个刚体；而当物体的形状和尺寸对于所研究的问题不成为主要因素时，物体又可看成是一个几何点。一个物体究竟应当看作是一个点还是看作为刚体抑或变形体，完全决定于所研究问题的性质，而不决定于物体本身的形状和尺寸。例如一辆汽车在运行时，虽然它的尺寸不小，而且它各部分的运动情况也不相同，如果我们只研究汽车的整体运动规律，比如分析汽车在启动或制动过程中的速度和加速度等，就可以忽略汽车的形状和尺寸，将它看作是一个点。有些物体，例如仪表上的零件，虽然它的尺寸不大，但在研究零件的转动时，就必须将它看成是一个物体或刚体，而不能看成是一个点。有些物体，根据所讨论的问题的不同性质，有时可以看成为一个点，有时又必须看

成是一个刚体。如沿轨道滚动的车轮，在分析轮心运行的速度和加速度时，可以看作是一个点，而在分析轮子绕轴转动和轮子上各点的运动时，就必须看作是一个刚体。

点和刚体是运动学中的两种力学模型，因而运动学的内容分为点的运动学和刚体的运动学两部分。刚体运动的分析是以点的运动学知识为基础的，所以，首先要研究点的运动。

第一章　点的运动

学习指导

本章研究点的运动，即讨论点的运动方程、运动轨迹、速度和加速度。

学习本章的目的是：直接服务于生产、科研中有关点的运动的课题；为运动学的后继章节作理论准备；为动力学中有关质点的部分提供运动学知识。

通过本章的学习，要求：

1．理解点的运动要素——点的位置、速度和加速度——的物理意义以及它们之间的关系。

2．能够根据已知条件确定点的位置与时间的关系，即建立点的运动方程。

3．会由点的运动方程求点的轨迹、速度方程和加速度方程，并能确定任一瞬时点的位置、速度和加速度。

本章介绍了三种描述点的运动的方法：矢量法、直角坐标法和自然法。在矢量法一节中，给出了点的位置矢、速度和加速度的定义以及它们之间的关系。学习时应注意位置矢、速度和加速度都是矢量，符合矢量运算法则；它们之间的关系是矢量之间的关系，对这一点认识不清，会带来概念上的混乱和计算上的错误。矢量法一般用于理论推导，在具体解算问题时通常用直角坐标法和自然法。直角坐标法和自然法都是由矢量法推演而形成的。直角坐标法是本章的重点，它的理论部分较为简单，读者应从该节的大量

例题中了解并掌握由某些运动要素求另一些运动要素的方法，特别是根据已知条件建立运动方程，求轨迹、速度和加速度的一般步骤。在自然法中，切向加速度和法向加速度的概念及其公式推证，对初学者有一定的难度，学习时应予以特别注意；这一部分既是重点又是难点。

描述点的运动还有其它的方法，诸如极坐标法、柱坐标法、球坐标法等，读者可根据需要阅读有关的书籍。

本章的某些内容，在物理学中已有论述，读者应力求加深对基本概念的理解，着重于提高解决工程实际问题的能力。

§1-1 点的运动的矢量表示法

描述点的运动有多种方法，这一节介绍矢量表示法。

1. 点的运动方程

动点在空间作曲线运动时，如图1-1所示，为了确定它在任一瞬时 t 的位置 M，可在该空间任选一个固定点 O，从点 O 向动点作矢量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 称为动点对于点 O 的矢径或位置矢。矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向可以唯一地确定点的位置，不同的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对应于点的不同位置。这种表示点的位置的方法称为矢量法。当点运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向随着时间 t 而变化，是自变量时间 t 的单值连续矢函数，即

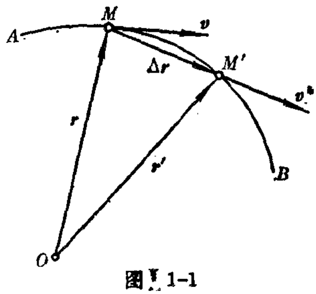

图1-1

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

这就是以矢量表示的点的运动方程。

在运动过程中，矢径 $\boldsymbol{r}$ 不断改变，矢径端点在空间所描绘的曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 称为矢端曲线，也就是点的轨迹，又称为路径。

2. 点的速度

在图 1-1 中，设动点沿轨迹 $\overset{\frown}{AB}$ 作曲线运动，在瞬时 t，点位于点 M，矢径为 $\boldsymbol{r}$；经过时间 Δt 后，即在瞬时 $t+\Delta t$，点位于点 M'，矢径为 $\boldsymbol{r}'$。在 Δt 时间内点的矢径的变化量为 $\Delta\boldsymbol{r}=\overline{MM'}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 称为点在 Δt 时间内的位移，它是矢量。

如果 Δt 取得很小，位移 $\overline{MM'}$ 和弧 $\overset{\frown}{MM'}$ 很接近，点沿曲线 $\overset{\frown}{MM'}$ 的运动可以近似地看成是沿直线 $\overline{MM'}$ 的运动。由物理学知道，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与相应的时间间隔 Δt 的比值 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 就是点在 Δt 时间内的平均速度，以 $\boldsymbol{v}^*$ 表示，则

$$\boldsymbol{v}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-2}$$

平均速度是矢量，它的大小等于位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 除以时间 Δt，方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同。平均速度近似地表示动点在 Δt 时间内运动的快慢和方向。

当 Δt 趋近于零时，平均速度 $\boldsymbol{v}^*\left(\text{即比值}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right)$ 的极限值就是点在瞬时 t 的速度，以 $\boldsymbol{v}$ 表示，则

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}^* \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1-3}$$

即点的速度等于它的矢径对时间的一阶导数。由矢量导数的性质知道，速度是矢量，它的大小是 $\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，它的方向就是当 Δt 趋近于零时位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向，即沿点的运动轨迹在点所在位置的切线并指向点前进的方向，速度 $\boldsymbol{v}$ 表示点在瞬时 t 运动的快慢和方向。

速度的量纲是 $[v]=\left[\dfrac{\text{长度}}{\text{时间}}\right]=[L][T]^{-1}$，速度的单位是：

米/秒(m/s)、厘米/秒(cm/s)或千米/小时(km/h)。

3. 点的加速度

动点作曲线运动时，它的速度的大小和方向一般是随时间而变化的，加速度就是速度对时间的变化率，它反映了速度的大小和方向随时间变化的程度。

在瞬时 t，点在点M，如图 1-2所示，速度为 $\boldsymbol{v}$；在瞬时 $t+\Delta t$，点在点 M'，速度为 $\boldsymbol{v}'$。为了确定点的速度在 Δt 时间内的变化量 $\Delta\boldsymbol{v}$、可将速度 $\boldsymbol{v}'$ 平行搬移到点 M，再以速度矢 $\boldsymbol{v}$ 为一边，以 $\boldsymbol{v}'$ 为另一边，作速度三角形，则得第三边 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$。$\Delta\boldsymbol{v}$ 与相应时间间隔 Δt 的比值$\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$就是动点在 Δt 时间内的平均加速度，以 $\boldsymbol{a}^*$ 表示，则

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-4}$$

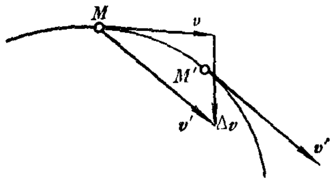

图 1-2

平均加速度表示在 Δt 时间内点的速度的平均变化率。

当 Δt 趋近于零时，平均加速度 $\boldsymbol{a}^*$$\left(即比值\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\right)$的极限值就是点在瞬时 t 的加速度，以 $\boldsymbol{a}$ 表示，则

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1-5}$$

即点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数，或等于它的矢径对时间的二阶导数。

由矢量导数的性质可知，加速度是矢量，它的大小是$\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$，它的方向与 Δt 趋近于零时 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向一致。

加速度的量纲是$[a]=\left[\dfrac{长度}{时间^2}\right]=[L][T]^{-2}$，加速度的单位是：

米/秒^2(m/s^2)、厘米/秒^2(cm/s^2)或千米/小时^2(km/h^2)。

以矢量表示法表示点的运动，简明、直接，最便于公式的推导。但在具体建立动点的运动方程，并计算其速度和加速度时，常采用直角坐标表示法或自然表示法等。

§1-2 点的运动的直角坐标表示法

1. 点的运动方程

过空间任一点O选取一直角坐标系$Oxyz$，点在任一瞬时t的位置，可用三个直角坐标x、y、z确定，如图1-3所示。这种确定点的位置的方法称为直角坐标法。点运动时，坐标x、y、z都随时间而变化，是自变量t的单值连续函数，即：

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

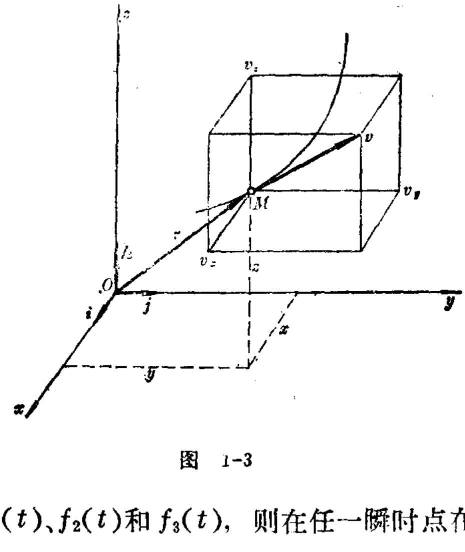

图 1-3

若已知函数$f_1(t)$、$f_2(t)$和$f_3(t)$，则在任一瞬时点在空间的位置就可以完全确定，因而点的运动情况也就可以完全确定了。式(1-6)

称为以直角坐标表示的点的运动方程。

运动方程能决定点的运动情况，因而也就能决定点的轨迹。事实上，式(1-6)本身就是以时间 t 为参数的点的轨迹参数方程。从式(1-6)的三个方程中消去时间 t，可得到两个柱面方程：

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y)=0 \\ F_2(y, z)=0 \end{array}\right\} \tag{1-7}$$

这两个柱面的母线分别平行于 z 轴和 x 轴，它们的交线就是点的轨迹，如图 1-4 所示。式(1-7)称为点的轨迹方程。

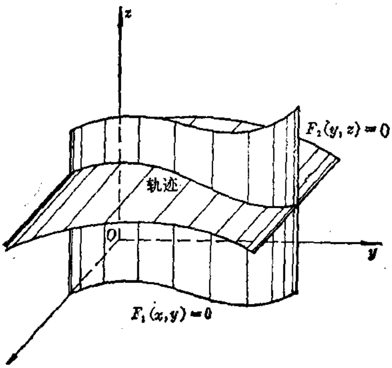

图 1-4

2. 点的速度

在图 1-3 中，过点 O 作点的矢径 $\boldsymbol{r}$，坐标 x、y、z 就是 $\boldsymbol{r}$ 在相应坐标轴上的投影。以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿各相应坐标轴正向的单位矢量，则有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

这就是矢径 $\boldsymbol{r}$ 沿直角坐标轴的分解式。将式(1-8) 代入式(1-3)，并注意到单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是常矢量，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{1-9}$$

如果将速度 $\boldsymbol{v}$ 写成沿直角坐标轴的分解式(参看图 1-3)，则有