近 世 代 数

（修订新版）

熊 全 淹 编著

武 汉 大 学 出 版 社
一九八四年 武汉

内 容 提 要

本书系统地介绍近世代数的基本理论．全书共七章，前三章介绍群、环、体的一般基础理论，后四章则再作进一步的论述．每书后附有习题，每章后列有参考文献．书末附有习题解答，供读者参考．

本书叙述由浅入深，推理详尽，便于阅读，可作为高等院校数学系大学生和研究生近世代数课教材或教学参考书，也可供广大教师和数学工作者参考．

近 世 代 数

（修订新版）

熊全淹 编著

*

武汉大学出版社出版

（武昌珞珈山）

湖北省新华书店发行　　湖北省黄冈县新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32开本 12印张 290千字

印数1—12000

1963年10月第1版 1978年8月第2版

1984年6月修订新1版 1984年6月第1次印刷

统一书号：13279·10　　定价：1.85元

目　录

第一章

基本概念

这章简单地介绍集合、映射、分类等基本概念，并且解释记号 $\in$，$\subset$，$\supset$，$\cap$，$\cup$，$\{\cdots\}$ 等的意义，作为以后各章的准备。

§1.1 集　　合

数学中讨论的对象，如代数中的数、矩阵，几何中的点、直线等，我们现在统统叫做**元素**，有时就简单地叫做**元**．若干个(有穷个或无穷多个)元的集体，叫做**集合**，或简单地叫做**集**．

我们要知道一个集，必定要知道其中所有的元，也就是说，我们对于任意一个元，要能够判别它是否在这个集中．譬如，所有整数形成一个集，因为我们随便拿一个数来，都可以判别它是否是整数，这个集又叫做**整数集**，我们用 Z 来表示．

一个集都有自己的特性，譬如，整数集中任意元，都有整数这个特性．平面上所有点组成的集与平面上所有圆组成的集都各有各的特性．因此，对于一个集，我们可以用它的特性来判别任意元是否在它里面．

任意一个元 a，如果它有集合 M 的特性，也就是说，它是 M 中元时，我们就用记号

$$a\in M$$

来表示．如果它没有集合 M 的特性，也就是说，它不是 M 中元时，我们就用

$$a \in M$$

来表示. 有时, a 在 M 中我们也说 a 属于 M, 或者说 M 包含 a. 同样, a 不在 M 中我们也说 a 不属于 M, 或者说 M 不包含 a. 一个集所包含的元假如是有穷个, 就叫做**有穷集**, 否则就叫做**无穷集**. 一个集所包含的元的个数, 叫做这集的**元数**或**浓度**. 有穷集的元数当然是正整数.

集合可以用列举其中所有元来表示, 譬如, 整数集 Z 可以写成

$$Z=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\},$$

或

$$Z=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

一般, 假如 M 含元 $a, b, c, \cdots$, 我们就用记号表为

$$M=\{a, b, c, \cdots\}.$$

通常一个集都含有一个以上的元, 但是当它只含一个元时, 这个集就与它所含的那唯一个元常常不加区别. 为了叙述方便, 我们更假定不包含任何元的也成为一个集, 叫做**空集**, 它的元数是零. 譬如, 大于 1 而小于 2 的整数集合就是空集.

假如集合 N 中所有元都是集合 M 中元, 也就是说, N 是 M 的一部分, 或者说, 任意一个元, 如果它有 N 的特性, 它一定也有 M 的特性, 那末 N 就叫做 M 的**子集**, M 又叫做 N 的**包含集**. 我们用记号 $N \subseteq M$ 或 $M \supseteq N$ 表示. 子集与包含集的关系可以用图形(图 1.1)来说明.

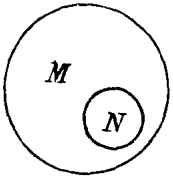

图 1.1

有穷集的子集是有穷集, 无穷集的包含集又是无穷集.

为了方便, 我们假定任意集都包含空集. 再从 $A \subseteq B$ 及 $B \subseteq C$, 我们就得到 $A \subseteq C$.

假如 M 中所有元都属于 N, 同时 N 中所有元又都属于 M, 即

$$M\subseteq N,\quad N\subseteq M,$$

也就是说，M 与 N 的特性完全相同时，我们就说 M 与 N 相等，用记号

$$M=N$$

表示. 假如 $N\subseteq M$，但 M，N 不相等，那末 N 就叫做 M 的**真子集**，M 叫做 N 的**真包含集**，用记号

$$N\subset M \text{ 或 } M\supset N$$

表示，这时 N 中所有元都属于 M，但 M 中至少有一个元不属于 N.

上面，我们介绍了集合的基本概念，现在介绍它的三个结合法.

定义 1 假如 M，N 是两个集，那末属于 M 同时又不属于 N 的所有元形成的集 D，叫做 M 与 N 的**差集**，用记号

$$D=M-N$$

表示.

显然，D 是 M 的子集. 关于差集的概念，我们可以用图形(图 1.2)来说明.

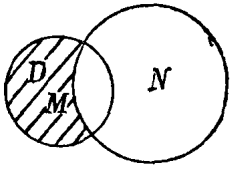

图 1.2

定义 2 假如 M，N 是两个集，那末属于 M 同时又属于 N 的所有元形成的集 P，叫做 M 与 N 的**交集**，用记号

$$P=M\cap N$$

表示.

于是 P 是 M，N 的子集，并且任何集只要它同时是 M，N 的子集，它一定是 P 的子集，因此 P 是包含在 M，N 中的**最大集**. 关于交集的概念，我们可以用图形(图 1.3)来说明.

定义 3 假如 M，N 是两个集，那末属于 M 或者属于 N 的

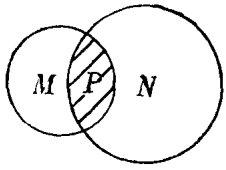

图 1.3

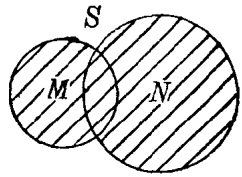

图 1.4

所有元形成的集 S, 叫做 M 与 N 的**并集**, 用记号

$$S=M\cup N$$

表示.

于是 S 是 M, N 的包含集, 并且任何集只要它同时是 M, N 的包含集, 它一定也是 S 的包含集, 因此 S 是包含 M, N 的**最小集**. 关于并集的概念, 我们可以用图形(图 1.4)来说明.

由定义, 我们容易得知 $N\cap(M-N)$ 是空集, 又

$$'=(M\cap N)\cup(M-N).$$

假如 A, B, C 是三个集, 显然

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

下面是关于交集与并集的两个分配律.

定理 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证明 首先因为 $B\subseteq B\cup C$, 所以 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$. 同样我们有 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$, 因此

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

再假如 $a\in A\cap(B\cup C)$, 那末 $a\in A$, $a\in B\cup C$, 于是 $a\in B$ 或 $a\in C$. 从前者言, $a\in A\cap B$; 从后者言, $a\in A\cap C$. 因此 $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

这就是说

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

所以定理成立.

同样我们有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

为了区别，由元组成的集，叫做第一层集，把第一层集当作元组成的集，叫做第二层集．第二层集又常叫做系．

若干个集的交集与并集可以按两个集的情形同样定义．假定 L 是由集 $A, B, C, \cdots$ 组成的系，我们用

$$A\cap B\cap C\cap\cdots$$

表示 L 的交集，用

$$A\cup B\cup C\cup\cdots$$

表示 L 的并集．要注意的是 L 虽然是第二层集，但它的交集、并集却都是第一层集．

习 题 1.1

1. 任意两个集是否都有交集与并集？
2. 假定 $A\subseteq B$，那末 $A\cup B=$？ $A\cap B=$？
3. 假定 A, B, C 是三个集，试证
   (i) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；
   (ii) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.
4. 假定 A, B, C 是三个集，如果它们的乘法规定是

$$AB=(A\cup B)-(A\cap B),$$

试证

$$(AB)C=A(BC).$$

5. 假定 M 是元数为 n 的有穷集，L 是 M 的所有子集组成的系，试证 L 的元数是 2^n.

§1.2 映射、分类

我们知道，近世代数中集合的元是抽象的，因此，两个集合如何进行比较是一个重要问题．映射这个概念主要用途之一就是用

来解决这个问题，它是近世代数中最基本的工具.

下面是一些最基本概念.

对于集 M 中每一个元 a，如果根据某种规则，我们可以使它与集 N 中唯一个元对应，那末这对应叫做 M 射到 N 的映射，那个与 a 对应的元，叫做 a 的象，a 又叫做它的象的象源. 这时 M 中任意元在 N 中都有象，但 N 中任意元在 M 中不一定都有象源. 如果 N 中元在 M 中不都有象源，那末这映射叫做 M 射到 N 内的映射. 如果 N 中任意元在 M 中都有象源，那末这映射叫做 M 射到 N 上的映射.

假如 M 射到 N 的映射用 σ 来表示，那末 a 的象，我们就用 $\sigma(a)$ 来表示，有时这映射又表为 $a\to\sigma(a)$. 映射这个概念与数学分析中函数的概念一致，因此 $\sigma(a)$ 又常叫做 a 的函数.

显然，M 射到 N 内的映射就是 M 射到 N 中某一个集上的映射. 譬如在整数集 Z 中，根据自乘这个规则，把任意整数 a 与它的自乘 a^2 对应，即 $a\to a^2$，那末这对应是 Z 射到自己内的映射，也是 Z 射到由所有整数平方组成集上的映射.

我们知道，对于映射 σ，象源 a 固然只有唯一的象 $\sigma(a)$，但是象 $\sigma(a)$ 就不一定只有一个象源 a，它可能有一个以上的象源. 任意象只有一个象源的映射，又叫做**一对一的映射**；不是一对一的映射，又叫做**多对一的映射**. 假如 σ 是 M 射到 N 的映射，B 是 N 的子集，A 是 M 中所有这样元组成的集，它们的象都在 B 中，那末 A 叫做 B 对于映射 σ 的**完全象源**.

M 射到 N 的映射 σ，当 $a_1\neq a_2$ 时，$\sigma(a_1)\neq\sigma(a_2)$，也就是说，当 $\sigma(a_1)=\sigma(a_2)$ 时，$a_1=a_2$，那末 σ 就是一对一的映射.

集合 M 射到 N 上的一对一的映射 σ 又叫做**可逆映射**，用记号

$$a\leftrightarrow\sigma(a)$$

表示. 这时 N 中元 b 的象源用 $\sigma^{-1}(b)$ 来表示. 显然 $b\to\sigma^{-1}(b)$ 是 N 射到 M 上的映射, 我们叫它做 σ 的**逆映射**, 用记号 σ^{-1} 表示. 因此, 任意可逆映射都有唯一个逆映射, 这逆映射也是可逆映射. 假如 σ 是可逆映射, 那末它的逆映射 σ^{-1} 的逆映射就是 σ, 这就是说

$$(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma.$$

譬如, 在整数集 Z 中, 我们把偶数与 0 对应, 奇数与 1 对应, 这样就得到 Z 射到集合 $\{0, 1\}$ 上的映射, 这映射是多对一的, 0 的完全象源是所有偶数, 1 的完全象源是所有奇数, 它们都没有唯一的象源. 假如我们把整数 n 与 $2n$ 对应, 即 $n\to 2n$, 那就得到 Z 射到偶数集上的映射, 这映射是一对一的, 因此它是可逆映射, 它的逆映射就是 $2n\to n$.

假如有一个一对一的映射把两个集 M、N 中的一个, 譬如说 M, 射到另一个 N 上, 那末这两个集就叫做**有相等的浓度**, 或**元数**. 显然 Z 与偶数集有相等的浓度, 因此一个集的浓度也可以与它的真子集的浓度相等, 这是无穷集的一个重要性质. 任意有穷集是没有这个性质的. 与正整数集或它的子集有相等浓度的集, 叫做**可数集**. 一个集如果不是可数集, 就叫做**不可数集**. 任一可数集中元可以用正整数做标号来排列, 于是任意可数集 M 可以写成

$$M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

有穷集是可数集, 正整数集是可数集, 整数集 Z 也是可数集. 再可数个可数集的并集又是可数集, 因此有理数集是可数集.

假定 $M=N$, 那末 M 射到 N 的映射, 就叫做 M **射到自己的映射**, M 射到 N 上(内)的映射, 就叫做 M **射到自己上(内)的映射**. M 射到自己上的一对一的映射即 M 的可逆映射, 有时又叫做 M **的变换**. 对于 M 中任意元使自身与它对应, 也就是说, 不使

M 中任意元变动，是 M 射到自己上的一对一的映射，叫做 M 的**恒等映射**，用 I 表示，即 $I(a)=a$. 很多重要的映射都是射到自己上的映射；譬如，平面上的旋转就可以看成为平面上的点集射到自己上的映射. 要注意的是 M 射到自己内的映射有时是一对一的，而 M 射到自己上的映射却有时是多对一的. 譬如，$n\to 2n$ 就是 Z 射到自己内的一对一的映射，$2n\to n$，$2n+1\to 2n+1$ 是 Z 射到自己上的多对一的映射.

假如 σ_1、σ_2 都是 M 射到 N 的映射，如果对于 M 中任意元 a，$\sigma_1(a)=\sigma_2(a)$，我们就说这两个映射相等，用记号 $\sigma_1=\sigma_2$ 表示. 假如 σ 是 A 射到 B 的映射，τ 是 B 射到 C 的映射，$\sigma(a)=b$，$\tau(b)=c$，即 $a\to b$，$b\to c$，我们容易证明，对应 $a\to c$ 就是 A 射到 C 的映射，叫做映射 τ，σ 的积，用记号 $\tau\sigma$ 表示，即

$$\tau\sigma(a)=\tau(\sigma(a)).$$

这就是说，$\tau\sigma$ 是先施行 σ，后施行 τ 得到的映射.

要注意的是，同一个集的任意两个映射的积是存在的，但一般对于不同集的两个映射不一定有积，假如有积，其积也不只一个. 譬如 σ 是 M 射到 N 的映射，τ 是 N 射到 M 的映射，这时，$\tau\sigma$，$\sigma\tau$ 都有意义，但前者是 M 射到自己的映射，而后者则是 N 射到自己的映射，两者显然不一致. 即令 $M=N$，一般 $\tau\sigma$ 与 $\sigma\tau$ 也不一定相等，即 $\tau\sigma\neq\sigma\tau$，也就是说，映射的乘法不适合交换律. 象这样的例子，我们在几何上是常见的. 再假如 σ 是可逆映射，那末 $\sigma^{-1}\sigma(a)=a$，因此 $\sigma^{-1}\sigma=I$，这就是说，$\sigma^{-1}\sigma$ 是恒等映射. 同样，$\sigma\sigma^{-1}$ 也是恒等映射. 再假如 σ，τ 都是可逆映射，那末 $\tau\sigma$，$\sigma\tau$ 又都是可逆映射. 显然 $\sigma^{-1}\tau^{-1}$，$\tau^{-1}\sigma^{-1}$ 就分别是它们的逆映射.

假定对于集 M 中任意两元 a，b，根据某个规则，我们可以把 a，b 与某集中唯一个元 c 对应，那末这对应，我们叫做 M 的**结合法**，有时又叫做 M 的**代数运算**. 这时我们又常常说，根据这结合

法，可以把 a, b 结合得到元 c，因此我们又说 M 有一个结合法. 譬如，对于整数集 Z 中任意两数 a, b，我们命 $a+b$ 与它们对应，那末这对应就是 Z 的结合法，它就是普通的加法. 同样，对于 a, b，我们命 $a\cdot b$ 与它们对应，这对应也是 Z 的结合法，它就是普通的乘法.

一个集，假如它具有适合某些法则的结合法，或代数运算，就叫做**代数系**. 象上面所示，整数集 Z 是代数系，因为它的加法，乘法两个结合法适合交换律、结合律、分配律等法则. 近世代数的目的就是讨论某些基本代数系关于结合法的性质，也就是代数性质. 因此可以说，近世代数是研究某些基本代数系的理论学科.

上面我们介绍了映射，现在再来介绍分类这个概念.

我们知道，通常我们把两个元看成为一个元，或者说两个元相等，所用的等号"="这个记号适合下面三个律：

1° 自反律：$a=a$;

2° 对称律：假如 $a=b$，那就 $b=a$;

3° 传递律：假如 $a=b$，$b=c$，那就 $a=c$.

并且引用等号时也只是引用了这三个律，但是适合这三个律的关系还有很多. 一般来说，我们有：

定义 假如对于一个集中元，规定了一个关系 $\sim$，并且可以判别其中每对元 a, b 是否有这关系 $a\sim b$；再这关系还适合自反，对称，传递三个律，即

1° $a\sim a$,

2° 假如 $a\sim b$，那就 $b\sim a$,

3° 假如 $a\sim b$，$b\sim c$，那就 $a\sim c$.

那末这关系，叫做这集的**等价关系**.

譬如，初等几何中的三角形全等、相似都是三角形间的等价关系，但是整数集中不相等，或者大于、小于等关系都不是等价关

系. 又如在有穷集 $M=\{1, 2, 4, 6, 10\}$ 中,假定两个数的和能够用4整除这个关系是 $\sim$, 即当 $4|(a+b)$ 时 $a\sim b$, 显然对称律成立. 再我们不难证明传递律也成立,但自反律不成立,因此这关系不是 M 的等价关系[1].

在一个集中, 根据某种关系或者用某个观点把某些元看成相等或同类,把某些元看成不相等或不同类,叫做**分类**. 下面是分类与等价关系之间的一个重要性质.

定理 假如集 M 有一个等价关系,所有与其中一个元等价的元形成的集, 叫做一类, 那末 M 就能够分成为若干个这样没有公共元的类而无剩余. 反过来,假如 M 能够分成若干个没有公共元的集而无剩余,这种集我们叫它做**类**,那末元素在同一类这个关系就是等价关系.

证明 定理的后半段我们容易知其成立,因此,我们只要证明前半段就行了.

假定集 K_a 是 M 中所有与元 a 等价的元形成的类, 那末类 K_a 中包含的元是相互等价的, 这是因为从 $a\sim b$, $a\sim c$, 根据对称律, 传递律就得到 $b\sim c$. 显然 M 中任意元必定属于这样的某一类,因此 M 可以分成这样的类而无剩余.

假如我们能够证明任意这样的两类不是相等就是没有一个公共元, 那末 M 中任意一元只能在唯一类, 因此定理的前半段就告成立.

假定两类 K_a, K_b 有一个公共元 c, 那末 $a\sim c$, $b\sim c$, 因此 $b\sim a$. 如果元 $x\in K_a$, 因为 $a\sim x$, 所以 $b\sim x$, 于是 $x\in K_b$. 因此 $K_a\subseteq K_b$. 同样,我们可以证明 $K_b\subseteq K_a$, 所以 $K_a=K_b$. 这就是说, 任意两类如果不相等, 那末它们就没有一个公共元, 于是定理的前半段成立,因此定理得证.

于是我们得知一个集, 如果有一个等价关系, 它就有一种分

类．反过来，如果它有一种分类，它就有一个等价关系．

假如 n 是正整数，在整数集 Z 中，两数 a，b 的差 $a-b$ 如果能够用 n 整除，即 $n|(a-b)$ 时，叫做 a 与 b 关于模 n 同余，用记号

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n) \quad 或 \quad a\equiv b(n)$$

表示，有时又简写成 $a\equiv b$．显然 $a\equiv a$，并且我们容易证明：假如 $a\equiv b$，那末 $b\equiv a$．再假如 $a\equiv b$，$b\equiv c$，那末 $a\equiv c$，所以它是等价关系．于是对这个关系，整数集 Z 有一个分类，a 所在的类是所有形如 $a+kn$（k 是任意整数）的数形成的集，叫做 a 关于 n 的**同余类**，我们用 $\bar{a}$ 表示，因此 Z 可以分成为 n 个类

$$\bar{0},\ \bar{1},\ \cdots,\ \overline{n-1}.$$

这是因为关于模 n，任意一整数必定与 0，1，…，$n-1$ 中某一数同余，并且 0，1，…，$n-1$ 中任意两数都不同余．当 $n=1$ 时，整个 Z 成为一类，当 $n=2$ 时，Z 就分成为两类，一类是所有偶数形成的偶数类，一类是所有奇数形成的奇数类．任意元只与自身同余，并且相异的元都不同余的同余叫做**零同余**．因此 Z 自身可以看成是根据零同余的分类，它的每个同余类只有一个元．

上面是为了叙述方便，假定 $n>0$，其实 $n<0$ 时也是同样成立的，这时整数集 Z 可以分成 $|n|$ 个同余类．

习 题 1.2

1．假如 $a\equiv b(n)$，$c\equiv d(n)$，那末

$$a+c\equiv b+d(n),\quad a-c\equiv b-d(n),$$
$$ma\equiv mb(n),\ ac\equiv bd(n).$$

2．试就 $n=-5$ 时，把整数集 Z 分类．

3．假如 σ 是 A 射到 B 上的映射，τ 是 B 射到 A 上的映射，如果 $\sigma\tau=I$，那末 σ 是 τ 的逆映射．

4．假如 σ 是 M 射到 N 上的映射，A，B 分别是 M，N 的子集，试证 $\sigma(A)$ 的完全象源含包 A，而 B 的完全象源的象就是 B．

5. 有人说从对称律和传递律可以推出自反律，因此自反律可以不要，他的理由是从 $a\sim b$，由对称律得 $b\sim a$，再由传递律便得 $a\sim a$，你的意见如何？

6. 等价三个律可以改成为(1)$a\sim a$，(2)如果 $a\sim b$，$a\sim c$，那末 $b\sim c$. 为什么？

§1.3 自然数、数学归纳法

依照发展的过程来讲，人类首先知道的数是正整数，也就是自然数

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

它们形成的正整数集又叫做**自然数集**. 在这节我们不叙述以它的基本性质为特征的公理[2]，只叙述它的一些基本性质，目的在介绍数学归纳法的证法和定义，以备以后引用.

一个集，假如有一个叫做某元在某元前面的顺序关系，元 a 在元 b 前面，我们就说 a 小于 b，或者 b 大于 a，用记号 $a<b$ 或 $b>a$ 来表示，如果这关系又满足下面两个条件：

1° 对于任意两元 a，b，下面的关系必定有一而且只有一成立：

$$a=b,\ a<b,\ b<a;$$

2° 对于三元 a，b，c，从 $a<b$，$b<c$，就有 $a<c$，

那末这集就叫做**有序集**. 空集认为是有序集. 自然数集依数大小的顺序是有序集，这性质有时又叫做**自然数的有序性**.

再自然数集是无穷集，即它的元数不是自然数. 假如其中数依大小的顺序排，那末在任意一数的后面还有数.

下面是自然数集的另一基本性质，这性质有时又叫做**自然数的最小性**.

定理 1 在自然数集的任一非空子集 M 中，必定有一个最小数，也就是说，在集 M 中有不大于其他任意数的数.

证明 因为 M 非空，所以在 M 中可以取一数 n，显然，M 中所有不大于 n 的数形成的非空集 $N\subseteq M$. 如果 N 中有最小数，那末这最小数就是 M 的最小数，但从 1 到 n 只有 n 个自然数，于是 N 中所含的数最多只有 n 个，所以 N 有最小数，因此定理成立.

根据这性质，我们可以推得下面重要定理，它是数学归纳法原理的依据.

定理 2 假定 M 是由自然数形成的集，如果它含有 1，并且当它含有数 $n-1$ 时，也含有数 n，那末它含所有的自然数，即 M 是自然数集.

证明 假定 N 是所有不属于 M 的自然数形成的集，如果它是空集，那末定理就成立. 假定 N 非空，由上面的定理得知 N 中必定有一个最小数 c，因为 $c\in M$，$1\in N$；所以 $c\neq 1$，因此 $c-1$ 是自然数. 但 c 是 N 中最小数，所以 $c-1\in M$，于是由假设，$c\in M$. 这与上面的假设矛盾. 因此 N 是空集，也就是说，所有自然数都在 M 中，所以定理得证.

于是我们得知，为了要证明一个命题对于所有自然数都是真实的，我们只要证明两件事，首先证明它对于 1 是真实的，再假定这命题对于自然数 $n-1$ 是真实的时，进而证明它对于自然数 n 也是真实的就行了. 这就是普通所谓的数学归纳法. 此外，数学归纳法还有下面另一形式.

为了要证明一个命题对于所有的自然数都是真实的，我们只要证明它对于 1 是真实的，并且假定它对于所有小于 n 的自然数都是真实的时，再证明它对于自然数 n 也是真实的就行了. 这形式在应用上有时比上面的方便.

譬如，任意一笔大于 7 元的整数付款可以用 3 元及 5 元票面的钞票支付，这一事实可以用数学归纳法验证如下：显然，8 元的付款可以用一张 3 元及一张 5 元的钞票支付，9 元的付款可以用