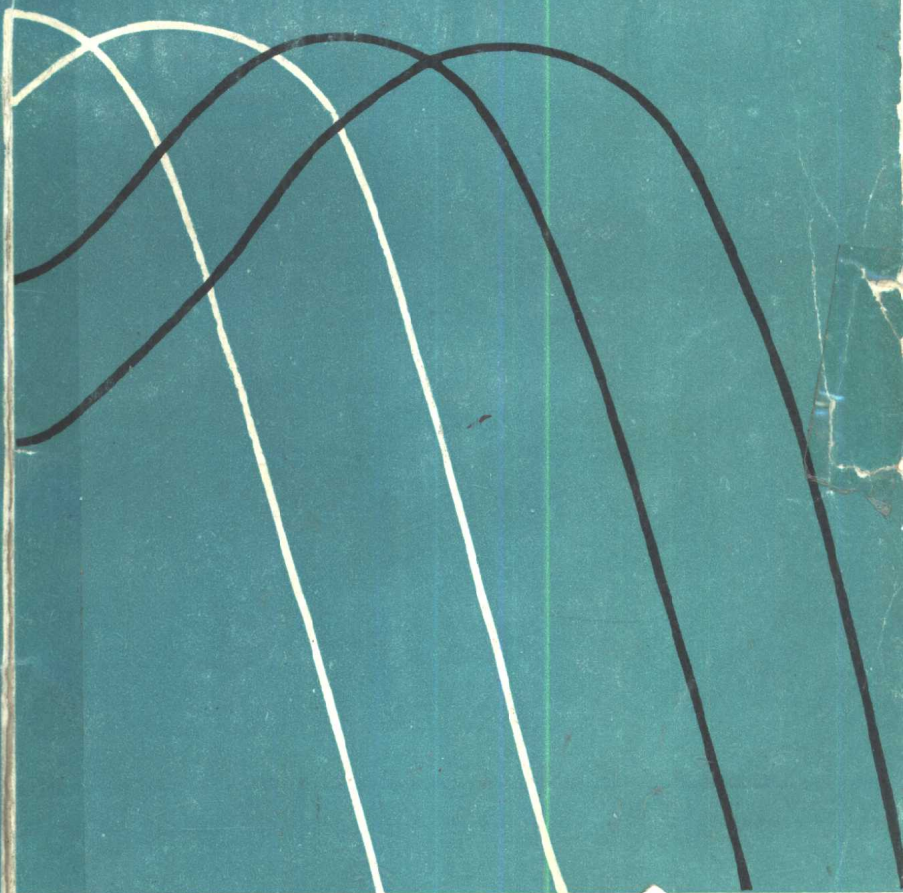


高等数学习题集

GAO DENG SHU
XUE XI TI JI



中南工业大学出版社

高等学校教学参考书

高等数学习题集

彭亦愚 李云甫 蒋仁雁 张润贞 张克训 编

吕 德 审校

中南工业大学出版社

423092

高等学校教学参考书

高等数学学习题集

彭亦愚 等编

责任编辑：王嘉新

*

中南工业大学出版社出版发行

中南工业大学出版社印刷厂印装

湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092 1/32 印张：10.25 字数：239千字

1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷

印数：00001—12000

*

ISBN 7-81020-175-1/O·027

定价：2.70 元

前 言

本习题集系参照高等工业学校高等数学课程教学基本要求编写而成的，作为高等工业学校学生学习高等数学课程的教学用书。书中收集了为强化基本概念、基本理论和基本运算技能训练所设的典型习题，也吸取近几年来硕士研究生高等数学入学考试部分试题，以培养学生解答综合题的能力。

全书分习题、答案两部分，共有习题1190个。

参加本书编写的有彭亦愚、李云甫、蒋仁雁、张润贞、张克训。由吕德审校。

限于编者水平，加之编写时间仓促，不妥之处与错误一定不少，殷切期待使用本书的老师与读者们批评指正。

编 者

1988年5月

目 录

第一章 函数·极限·连续	(1)
函数.....	(1)
数列的极限.....	(10)
函数的极限.....	(12)
极限的求法.....	(14)
函数的连续性.....	(20)
一致连续性.....	(25)
杂题.....	(26)
第二章 导数与微分	(33)
导数概念.....	(33)
函数四则运算方程的导数.....	(35)
复合函数求导.....	(38)
高阶导数.....	(42)
隐函数、参变量方程的导数.....	(43)
杂题.....	(46)
微分及其应用.....	(48)
第三章 中值定理与导数应用	(50)
中值定理.....	(50)
罗必塔法则.....	(52)

泰勒公式	(54)
函数的单调性与极值	(55)
曲线的凹凸、函数作图	(57)
杂题	(59)
第四章 不定积分	(63)
不定积分概念与性质	(63)
简单不定积分	(64)
换元积分法	(65)
分部积分法	(68)
有理函数的积分	(70)
三角函数有理式的积分	(71)
简单无理函数的积分	(72)
杂题	(73)
第五章 定积分	(75)
定积分概念	(75)
定积分的性质	(76)
上限(或下限)为变量的定积分	(78)
计算定积分(应用牛顿—莱布尼兹公式)	(79)
定积分的换元法	(81)
定积分的分部法	(82)
定积分的近似计算	(84)
广义积分	(85)
杂题	(86)
第六章 定积分应用	(92)
平面图形的面积	(92)
体积	(94)

平面曲线的弧长·····	(95)
定积分在力学与物理学上的应用·····	(96)
平均值·····	(97)
杂题·····	(98)
第七章 空间解析几何与向量代数 ·····	(101)
空间直角坐标·····	(101)
向量加法、减法、数乘向量·····	(102)
向量坐标·····	(103)
数量积、向量积、混合积·····	(105)
平面及其方程·····	(107)
空间直线及其方程·····	(110)
曲面及其方程·····	(114)
空间曲线及其方程·····	(115)
二次曲面·····	(117)
杂题·····	(118)
第八章 多元函数微分法及其应用 ·····	(122)
多元函数的基本概念·····	(122)
偏导数·····	(125)
全微分及其应用·····	(128)
多元复合函数求导法·····	(130)
隐函数求导法·····	(133)
偏导数的几何应用·····	(135)
方向导数、梯度·····	(138)
多元函数的极值·····	(140)
二元函数的泰勒公式·····	(142)
杂题·····	(142)

第九章 重积分	(146)
二重积分	(146)
二重积分的应用	(151)
三重积分	(152)
三重积分的应用	(155)
杂题	(156)
第十章 曲线积分与曲面积分	(158)
对弧长的曲线积分	(158)
对坐标的曲线积分	(159)
格林公式及其应用	(161)
曲线积分的应用	(163)
对面积的曲面积分	(164)
对坐标的曲面积分	(166)
高斯公式	(167)
通量与散度	(168)
斯托克斯公式	(169)
环流量与旋度	(170)
杂题	(171)
第十一章 无穷级数	(174)
常数项级数	(174)
幂级数	(182)
傅立叶级数	(185)
杂题	(188)
第十二章 微分方程	(194)
基本概念	(194)
一阶线性微分方程	(196)

全微分方程.....	(197)
杂题 (一)	(198)
特殊类型高阶微分方程.....	(200)
高阶线性微分方程.....	(201)
杂题 (二)	(204)
答案	(207)

第一章 函数 · 极限 · 连续

函 数

1.1 用区间表示变量 x 的变化范围:

- (1) $|x| < 4$;
- (2) $x^2 < 9$;
- (3) $|x| \geq 1$;
- (4) -2 的 $\frac{1}{2}$ 邻域;
- (5) a 的 ε 邻域。

1.2 解下列不等式, 并在数轴上画出解的位置:

- (1) $|x-1| < 3$;
- (2) $|x+1| > 2$;
- (3) $|x-1| < |x+1|$;
- (4) $|x-2| - |x| > 1$ 。

1.3 设点 M 是曲线 $y = x^2$ 上的动点 (图1—3), 问:

(1) 曲边三角形 ONM 的面积是否为 x 的函数?

(2) 弧长 $\widehat{OM}$ 是否为 x 的函数?

(3) 曲线在 M 点的切线倾角 α 是否为 x 的函数?

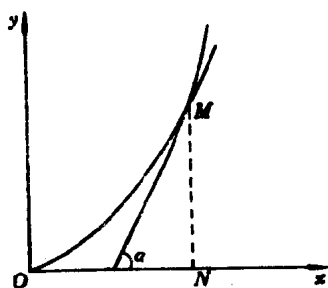


图1—5

1.4 指出下列方程中哪些表示函数关系？哪些不是函数关系？为什么？

(1) $x^2 + y = 1$;

(2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

(3) $y = a$ (常数)。

1.5 比较下列函数是否为同一函数？

(1) $y = \frac{x^2}{x}$ 与 $y = x$;

(2) $y = \sqrt{|x|}$ 与 $y = \sqrt{x}$;

(3) $y = x^2 + 1$ 与 $u = t^2 + 1$;

(4) $y = \sin x, (-\infty, +\infty)$ 与 $y = \sin x, (-\pi, \pi)$;

(5) $y = \lg x^2$ 与 $y = 2 \lg x$;

(6) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 与 $y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ 。

1.6 求下列各函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{5-2x} + \frac{1}{x}$;

(2) $y = \sqrt{1-|x|}$;

(3) $y = (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

(4) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y = \lg x + \frac{1}{\lg x}$;

(6) $y = \sqrt{\lg(x-5)}$;

$$(7) \quad y = \sqrt{x-3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$(8) \quad y = \sqrt[4]{6x^2+7x+2} + \arcsin \frac{2x}{1+x}.$$

1.7 设 $f(x) = x \cdot 2^x$, 求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ 。

1.8 设 $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$, 求 $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(a)+1$ 。

1.9 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(a)$ ($|a| < 1$)。

1.10 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 求 $f(2x)$, $f(x+1)$

及 $f(2x) + f(x+1)$ 的表达式, 并分别作出它们的图形。

1.11 设一正圆柱体内接于一高为 h 、底半径为 r 的正圆锥体内, 设圆柱体高为 x , 试把圆柱体的底半径 y 和体积 v 分别表示为 x 的函数。

1.12 设有半径为 R 的圆铁皮, 从中剪下中心角为 α 的圆扇形, 用这个扇形做成一个无底的圆锥体, 试把这圆锥体的体积 V 表示为 α 的函数。

1.13 长为 l 的弦, 两端分别固定在 O 、 A 处(图1—13), 在 c 点处 ($x=c$) 将弦提高 h 后, 整条弦呈图中形状(假定弦上各点处只沿与 OA 垂直的方向移动)。设 $P(x, y)$ 为拉伸

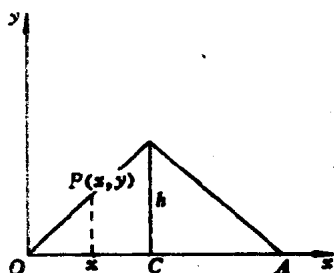


图 1—13

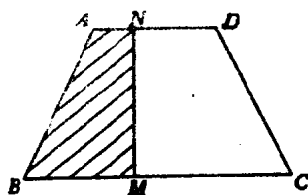


图 1—14

后弦上的任一点，试建立 y 与 x 之间的函数关系。

1.14 等腰梯形 $ABCD$ (图1—14)两底分别是 $AD = a$, $BC = b$ ($b > a$), 高为 h , 现引直线 MN 与两底垂直, 若设 $BM = x$ ($0 \leq x \leq b$), 试将梯形内位于直线 MN 左边的面积 S 表示为 x 的函数。

1.15 今有三个矩形, 其高分别为 3 米、2 米和 1 米, 而底皆为 1 米, 彼此相距 1 米放着 (图 1—15)。现直线 AB

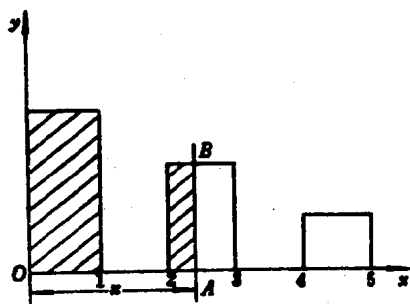


图1—15

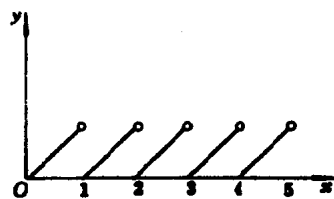


图1—17

平行于 oy 轴由左向右移动, A 点横坐标为 x , 试将 AB 左边矩形内阴影部分的面积表示为 x 的函数 ($-\infty < x < \infty$)。

1.16 底半径各为 3 米、2 米和 1 米, 高都是 5 米的三个圆柱体, 把大的放在最下面, 按大中小的次序迭起来, 成为一个阶梯圆柱体。试将这个阶梯圆柱体的横截面积 S 表示为阶梯圆柱体的高 h 的函数 $S(h)$ 。

1.17 在电子技术中, 经常会遇到如图 1—17 所示的锯齿波, 试写出函数 $y = y(x)$ 的分析表达式。

1.18 火车站收取行李费的规定如下: 当行李不超过 50 公斤时, 按基本费用计算, 从甲地到乙地每公斤收 0.15 元, 当超过 50 公斤时, 超重部分按每公斤 0.25 元收费。试求费用 y (元) 与重量 x (公斤) 之间的函数关系式, 并画出这函数的图形。

1.19 讨论下列函数在指定区间上的增减性:

(1) $y = x^2, (0 < x < +\infty)$;

(2) $y = \lg x, (0 < x < +\infty)$;

(3) $y = \cos x, (0 \leq x \leq \pi)$ 。

1.20 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \log_a \frac{1-x}{1+x}$;

(2) $f(x) = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$;

(3) $f(x) = \log_a (x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(4) $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$;

(5) $f(x) = \sin x + \cos x + 1$

1.21 证明:

- (1) 两个偶（奇）函数的和是偶（奇）函数；
- (2) 两个偶（奇）函数的积是偶函数；
- (3) 奇函数与偶函数的积为奇函数（函数不恒为零）；

(4) $\frac{1}{f(x)}$ 与 $f(x)$ 有相同的奇偶性 ($f(x) \neq 0$)。

1.22 证明：定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任何函数 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数的和，且表示式是唯一的。

1.23 下列函数哪些是周期函数？如果是，求出其周期：

- (1) $f(x) = \sin^2 x$;
- (2) $f(x) = |\cos x|$;
- (3) $f(x) = \sin x^2$;
- (4) $f(x) = x \cos x$;
- (5) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin \pi x$;
- (6) $f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$ 。

1.24 设 $F(x) = e^x$ ，证明：

- (1) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$;
- (2) $\frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y)$ 。

1.25 设 $G(x) = \ln x$ ，证明：当 $x > 0$ ， $y > 0$ 时，有

- (1) $G(x) + G(y) = G(xy)$;
- (2) $G(x) - G(y) = G\left(\frac{x}{y}\right)$ 。

1.26 如何从 $y = f(x)$ 的图形作 $y = f(x+b)$ 的图形？作出下列函数的图形：

$$(1) \quad y = \frac{1}{x-2};$$

$$(2) \quad y = \arcsin(x-1)。$$

1.27 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

$$(1) \quad y = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$(2) \quad y = \sin 2x,$$

$$(3) \quad y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$(4) \quad y = \sin x + \frac{1}{2},$$

$$(5) \quad y = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)。$$

1.28 作出下列函数的图形:

$$(1) \quad y = x + \frac{1}{x};$$

$$(2) \quad y = x + \sin x,$$

$$(3) \quad y = \sin x + \cos x。$$

1.29 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且在 $[-1, 1]$

上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ 作出 $y = f(x)$ 的图形。

1.30 下列复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

$$(1) \quad y = \cos^3(3x+1);$$

$$(2) \quad y = \sin \sqrt[3]{1-e^x};$$

$$(3) \quad y = 10^{(2x-1)^2};$$

$$(4) \quad y = \operatorname{Intg} x ;$$

$$(5) \quad y = \operatorname{arctg} [\operatorname{tg}(a^2 + x^2)]^2 .$$

1.31 设 $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$, 求 $\varphi[\psi(x)]$ 、 $\psi[\varphi(x)]$ 、 $\varphi[\varphi(x)]$ 、 $\psi[\psi(x)]$ 。

1.32 设 $f(x) = \frac{1}{1-x} (x \neq 1)$, 求 $f[f(x)]$ 、 $f\{f[f(x)]\}$ 。

1.33 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求

$$(1) \quad f(x^2) ;$$

$$(2) \quad f(\sin x) ;$$

$$(3) \quad f(x+a) \quad (a>0);$$

$$(4) \quad f(x+a) + f(x-a), \quad (a>0)$$

的定义域。

$$1.34 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x. \text{ 求 } f[g(x)] \text{ 和}$$

$g[f(x)]$ 。

1.35 设单位阶梯函数的定义是

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

求函数 $y = H(x) - H(x-1)$ 的表达式, 并作其图形。

$$1.36 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} x - \sin x, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases} \text{ 求 } f[f(x)] \text{ 的表达式。}$$

$$1.37 \quad \text{设 } f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x}. \text{ 求 } f[g(x)]、g[f(x)],$$

并求出它们的定义域。