全解应试精典系列丛书

创新版

高中数学

全解应试精典

主编 舒 朗

南京大学出版社

创新版全解应试精典系列丛书

高中数学全解应试精典

主编　舒　朗

南京大学出版社

内 容 简 介

随着中学数学改革全面深入的展开，近几年高中数学教材进入新旧交替的过渡阶段，高考的要求与命题模式也处于转变阶段。为了帮助高中学生在学习数学课程时更好地适应这种过渡与转变，我们根据近几年全日制普通高中数学教学的现实状况，兼顾高中二、三年级现行教材和已开始在高中一、二年级使用的新教材两方面的需要以及这两年高考的走向，按照"新世纪创新版全解精典系列丛书"编委会的统筹安排，编写了这本《高中数学全解应试精典》，希望以此为目前在校高中以及参加应试的学生在学习数学课程时加深理解并牢固掌握有关数学内容，提高分析问题解决问题和综合运用、创新的能力提供有效的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学全解应试精典/舒朗主编．—南京：南京大学出版社，2001.7
(创新版全解应试精典系列丛书)
ISBN 7-305-03726-5

Ⅰ．高… Ⅱ．舒… Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046426 号

丛 书 名　创新版全解应试精典系列丛书
书　　名　**高中数学全解应试精典**
主　　编　舒 朗
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025-3596923　025-3592317　传真 025-3303347
网　　址　http://www.njupress.com
电子函件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国新华书店
印　　刷　南京大众新科技印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 13　字数 346 千
版　　次　2001 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-305-03726-5/G·565
定　　价　全套六册总定价：96.00 元

创新版全解应试精典系列丛书

编　委　会

前言

为适应全国中考、高考改革和广大考生的需要，我们聘请了江苏、安徽、山东等地的著名重点中学的特级教师、高级教师、教育研究专家和高等师范院校的学科教育学专家，组织编写了这套《创新版全解应试精典系列丛书》。

该丛书根据教育部规定的现行教材的知识体系，紧扣课文基本知识点、重点和难点，运用典型例题进行示范引导，并把握关键的理论、命题作阐发讲解，目的使学生牢固地掌握基础知识，提高分析问题、解决问题和综合创新能力。同时，各册都附有中考或高考的模拟试卷及答案要点。《丛书》既具有同步辅导的功能，也具有应试功能，并且还带有一定的工具性。

本丛书分为中考和高考两个系列，共12本。初中有：《初中语文全解应试精典》、《初中数学全解应试精典》、《初中英语全解应试精典》、《初中物理全解应试精典》、《初中化学全解应试精典》、《中考优秀作文精典》；高中有：《高中语文全解应试精典》、《高中数学全解应试精典》、《高中英语全解应试精典》、《高中物理·化学·生物·信息技术全解应试精典》、《高中政治·历史·地理全解应试精典》、《高考优秀作文精典》。

本丛书既适合于初中或高中毕业生在中考或高考前冲刺阶段使用，也适合于广大中学生平时辅导练习使用。因此，它不仅为应届初、高中毕业生参加中考或高考带来有益的启迪和切实的帮助，而且也不失为广大在校的初中和高中学生的良师益友。

编委会

2001年4月

目录

第一篇 代 数

第二篇　立体几何

第三篇　平面解析几何

第一篇　代　数

第一章　函　数

本章内容分为三部分：一、集合的初步知识；二、函数的一般概念；三、几个具体的函数：幂函数、指数函数与对数函数.集合的初步知识是这一章的预备知识，而函数的概念是本章的核心，几个具体函数及其性质的讨论是函数概念的直接应用.

第一单元　集合的初步知识

【重点、难点提示】

这一单元的知识点有集合、子集、交集、并集及补集.集合的各个基本概念的涵义以及它们之间的相互联系和区别是这一单元学习的难点.在学习中要从实例出发，注意运用对比的方法，还要注意结合图形直观来理解这些抽象的概念和性质.

【重要概念、公式、定理阐释】

集合　是数学中最原始的概念之一，它可以表述为“一组对象的全体形成一个集合”集合中的对象叫做集合的元素，集合中的元素具有确定性、互异性以及无序性.

子集　对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$.若集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少存在一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记为 $A\subset B$.

等集　若集合 A 是集合 B 的子集，同时集合 B 也是集合 A 的子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称这两个集合相等，记为 $A=B$.

交集　一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

并集　一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

补集　已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 在集合 I 中的补集，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}$.

数集　自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$ 的关系是 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.另外，偶数集为 $\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$；奇数集为 $\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$ 或 $\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$.

常见的一些关系式　(1) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B$，$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\cup B=B$；(2) $\varnothing\subseteq(A\cap B)\subseteq A(\text{或 }B)\subseteq A\cup B$；(3) $A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$；(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$.

【典型例题解析】

例 1　设 $M=\{x\mid x^2+4x+3<0\}$，$N=\{x\mid 1<x+k<5\}$.(1) 当 $M\subset N$ 时，求 k 的取值范围；(2) 当 $M\cap N\neq\varnothing$ 时，求 k 的取值范围.

解法 1　由 $x^2+4x+3<0$ 得 $-3<x<-1$，

$\therefore M=\{x|-3<x<-1\}$.

同理 $N=\{x|1-k<x<5-k\}$.

(1) 当 $M\subset N$ 时，$\begin{cases}1-k\leqslant -3\\5-k\geqslant -1\end{cases}$ 得 $4\leqslant k\leqslant 6$;

(2) 当 $M\cap N\neq\varnothing$ 时，有如下四种情况满足条件：

① $M\subset N$，由(1)知 $4\leqslant k\leqslant 6$;

② 集合 N 的左端点 $1-k\in(-3,-1)$，即 $-3<1-k<-1$,

$\therefore 2<k<4$;

③ 集合 N 的右端点 $5-k\in(-3,-1)$，即 $-3<5-k<-1$,

$\therefore 6<k<8$;

④ $N\subseteq M$ 时，$\begin{cases}1-k\geqslant -3\\5-k\leqslant -1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k\leqslant 4\\k>6\end{cases}$ $\therefore k\in\varnothing$.

综上所述，满足 $M\cap N\neq\varnothing$ 的 k 的取值范围是 $4\leqslant k\leqslant 6$ 或 $2<k<4$ 或 $6<k<8$，即 $2<k<8$.

$\therefore k\in(2,8)$.

解法 2 (1)同解法 1

(2) 若 $M\cap N=\varnothing$，即 $1-k\geqslant -1$ 或 $5-k\leqslant -3$，$\therefore k\leqslant 2$ 或 $k\geqslant 8$，即 $k\in(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$. $\because M\cap N\neq\varnothing$ 的 k 的范围为上述集合的补集，故所求的 k 的范围为(2,8).

解析：先求出集合 M,N，再根据集合间的关系来解，解法 1 直接求解，解法 2 从反面求解.

例 2 设 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x^2+2x-3>0\}$，$C=\{x|x^2-3ax+2a^2<0\}$. 当 (1) $C\subseteq A\cap B$；(2) $C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，分别求实数 a 的取值范围.

解 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{x|x^2+2x-3>0\}=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$，$C=\{x|x^2-3ax+2a^2<0\}=\{x|(x-a)(x-2a)<0\}$. 当 $a>0$ 时，$C=\{x|a<x<2a\}$，当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，当 $a<0$ 时，$C=\{x|2a<x<a\}$

(1) $\therefore A\cap B=\{x|1<x<4\}$，若 $C\subseteq A\cap B$，则 $a>0$ 且 $\begin{cases}2a\leqslant 4\\a\geqslant 1\end{cases}$ 得 $1\leqslant a\leqslant 2$,

$a=0$　$C=\varnothing\subseteq A\cap B$ 成立，

$\therefore a=0$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2$.

(2) $\because \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{x|-3\leqslant x\leqslant -2\}$

$\therefore a<0$ 且 $\begin{cases}2a<-3\\a>-2\end{cases}$ 得 $-2<a<-\frac{3}{2}$

例 3 已知集合 $A=\{x|x^2+3x+2\geqslant 0\}$，$B=\{x|mx^2-4x+m-1>0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

解 $\because A\cup B=A$　$\therefore B\subseteq A$

又 $A\cap B=\varnothing$　$\therefore B=\varnothing$

即 $mx^2-4x+m-1\leqslant 0$ 对一切实数 x 恒成立.

$\therefore \begin{cases}m<0\\\Delta=(-4)^2-4m(m-1)\leqslant 0\end{cases}$

得 $m\leqslant\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

解析 (1) $A\cap B=B\Longleftrightarrow B\subseteq A$，$A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$ 是两个很重要的结论. 当 $A\subseteq B$ 时，注意不能忽视空集是任何集合的子集这一概念. (2) 当 $A\cap B=\varnothing$ 对 B 而言包括 $B\neq\varnothing$ 与 $B=\varnothing$ 两种情况. (3) 要善于把集合表示的意义用文字叙述或用数学式子表述.

例 4 已知集合 I 为全集，$M\subseteq I$，$N\subseteq I$，且 $M\subset N$，则下列集合中表示空集的是(　　)

A. $M\cap N$　　B. $\overline{M}\cap N$

C. $M\cap\overline{N}$　　D. $\overline{M}\cap\overline{N}$

解法 1 (特例法)

选 $I=\{1,2,3\}$，$N=\{1,2\}$，$M=\{1\}$ 检验 A、B、C、D 的正确性. 显然选 C.

解法 2 (文氏图法) 如图 1-1 选 C.

解析 比较两种解法，充分体现了数形结合的优越性.

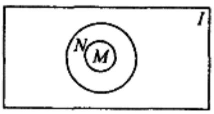

图 1-1

【单元测试】

一、选择题

1. 设集合 $M=\{2,3,a^2+1\}$，$N=\left\{a^2+a-4,2a+1,-\frac{13}{4}\right\}$，$M\cap N=\{2\}$，则 a 的可取值集合为(　　)

A. $\left\{-3,2,\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\{-3\}$

C. $\left\{\frac{1}{2},-3\right\}$　　D. $\{-3,2\}$

2. 设全集 $I=\{1,2,3,7,10\}$　$A=\{2,$

$\{a-5|,7\}$ $\overline{A}=\{1,10\}$，则 a 的值为(　　)

A. -2　　B. 8

C. -2 或 8　　D. 2 或 8

3. 集合 $M=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　)

A. $M=N$　　B. $M\supset N$

C. $M\subset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

4. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $\overline{A}\cap B$ 是(　　)

A. $\overline{A}$　　B. B

C. $\varnothing$　　D. $\{(2,3)\}$

5. 集合 $A=\{x\mid x^2+3x+2\leqslant0\}$，$B=\{x\mid mx^2-4mx=4,m\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=A$，则 m 的取值范围是(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $[-1,0)$

C. $(-1,0]$　　D. $[-1,0]$

二、填空题

1. $A=\{x\mid x^2-5x+4\leqslant0\}$　$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的范围是________.

2. 全集 $I=\{$不大于 6 的非负整数$\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{x\mid x^2-8x+12=0\}$，$C=\{x\mid |x|<5,x\in\mathbf{N}\}$，则(1) $A\cap\overline{C}=$________.(2) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C=$________.

3. $A=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=4-2|x|\}$，则 $A\cap B=$________.

4. $A=\{y\mid y=x^2+1\}$，$B=\{y\mid y=4-2|x|\}$，则 $A\cap B=$________.

5. 集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$，$B\cup\overline{A}=\mathbf{R}$，$B\cap\overline{A}=\{x\mid 0<x<1$ 或 $2<x<3\}$，$B=\{x\mid ax^2+x+c>0\}$则 $a=$________，$c=$________.

三、解答题

1. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+ax+2\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,0\leqslant x\leqslant2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的范围.

2. 设集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-6}<1\right.\right\}$，$B=\{x\mid\log_4(x+a)<1\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的范围.

3. 设集合 $A=\left\{x\left|\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},(a,x\in\mathbf{R})\right.\right\}$，$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0,(a,x\in\mathbf{R})\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的范围.

4. 设集合 $A=\{x\mid\log_x(5x^2-8x+3)>2\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-m^4+1\geqslant0\}$，且 $A\cap B=A$，求实数 a 的范围.

5. 设集合 $A=\{x\mid 2\log_{\frac{1}{2}}x-\log_2{}^2x\geqslant0\}$，$B=\{x\mid |x-a|<4,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subset B$，求 a 的范围.

第二单元　函数的一般概念

【重点、难点提示】

这一单元的知识点有 $|ax+b|<c$，$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式，一元二次不等式；映射，函数的概念；分数指数幂与根式；函数的单调性，函数的奇偶性；反函数，互为反函数的函数图像间的关系.这一单元的重点是函数的概念、函数的单调性和奇偶性及反函数的概念.

在学习函数的方法上，要概括、抽象函数知识的精神实质；在函数各类问题的解法中，要注意转化思想(包括数形转化、构造转化、换元转化等)和分类讨论思想的使用，还要注意变量的取值范围，更要注意参变量的取值范围对问题的影响.

【重要概念、公式、定理阐释】

映射　一般地，设 A、B 是两个集合，若按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A 与 B 以及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记为 $f:A\to B$；若 A 中的元素 a 通过映射 f 有 B 中的元素 b 与它对应，这时，b 称为元素 a 在 f 下的象，a 称为 b 的原象，对映射的理解要注意以下两个方面：(1) A 中每个元素都要有象(而 B 中每个元素不一定有原象)；(2) A 中每个元素的象必须唯

一.

函数 当 A、B 都是非空的数的集合,f 是从 A 到 B 的一个对应法则,那么从 A 到 B 上的映射 $f:A\to B$ 叫做从 A 到 B 上的函数,若 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

反函数 若确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射,那么这个映射的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上,自变量用 x 表示,函数用 y 表示,因此,通常把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在同一直角坐标系里关于直线 $y=x$ 对称. $f[f^{-1}(x)]=x$, ($x\in f(x)$ 的值域); $f^{-1}[f(x)]=x$, ($x\in f(x)$ 的定义域).

奇函数 一般地,如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么 $f(x)$ 叫做奇函数,奇函数的图像关于原点成中心对称.

偶函数 一般地,如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那么 $f(x)$ 叫做偶函数,偶函数的图像关于 y 轴成轴对称.

增函数 对于给定区间 D 上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间 D 的任意两个值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是递增的,并把这个函数叫做在区间 D 上的增函数.若函数 $f(x)$ 是区间 D 上的增函数,则函数 $f(x)$ 的图像在 D 上从左到右是上升的.

减函数 对于给定区间 D 上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间 D 的任意两个值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是递减的,并把这个函数叫做在区间 D 上的减函数.若函数 $f(x)$ 是区间 D 上的减函数,则函数 $f(x)$ 的图像在 D 上从左到右是下降的.

函数的单调性 如果函数 $f(x)$ 在某一区间 D 上是增函数或减函数,就称 $f(x)$ 在区间 D 上具有(严格)的单调性,这个函数也叫做在区间 D 上的单调函数,而区间 D 叫做这个函数的单调区间.

函数图像的对称性 (1)函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称的充要条件是 $f(x)=f(2a-x)$ 或 $f(a+x)=f(a-x)$ ($a\in\mathbf{R}$). (2) 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称的充要条件是 $f(x)=-f(2a-x)$ 或 $f(a+x)=-f(a-x)$ ($a\in\mathbf{R}$).

基本图像变换 已知函数 $f(x)$ 的图像,某些与 $f(x)$ 有关的函数图像可由下表得到:

表 1-1

求作图像的函数表达式与 $f(x)$ 的关系	由 $f(x)$ 的图像需经过的变换
$y=f(x)\pm b(b>0)$	沿 y 轴向$\frac{上}{下}$平移 b 个单位
$y=f(x\pm a)(a>0)$	沿 x 轴向$\frac{左}{右}$平移 a 个单位
$y=-f(x)$	作关于 x 轴的对称图像
$y=f(\lvert x\rvert)$	右不动,左右关于 y 轴对称
$y=\lvert f(x)\rvert$	上不动,下沿 x 轴翻折
$y=f^{-1}(x)$	作关于直线 $y=x$ 对称图像
$y=f(ax)$ ($a>1$ 或 $0<a<1$)	横坐标缩短(或伸长)到原来的 $\frac{1}{a}$,纵坐标不变
$y=af(x)$ ($a>1$ 或 $0<a<1$)	纵坐标伸长(或缩短)到原来的 a 倍,横坐标不变

【典型例题解析】

例 1 设集合 $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$,从 A 到 B 的映射 f 满足条件:对于每一个 $x\in A$, $x+f(x)$ 恒为奇数,问这样的映射共有几个?

解 由于建立的映射必须满足对 A 中的任一个元素,在 B 中都有唯一的元素与之对应,可分步思考.

当 $x=0$ 时,要使 0 与 0 的象之和为奇数,则 0 的象只有从 -1 和 1 中选一与之对应,故有 2 种.

同样对于 A 中的元素 -1,只能从 $-2,0,2$ 中选一与之对应,有 3 种,对于 A 中元素 1,只能从 $-2,0,2$ 中选一与之对应,也有 3 种,而建立映

射,必须 A 中每个元素都有唯一的象,所以共有 $2\cdot3\cdot3=18$(个).

例 2 设 $x\in M, y\in N. f: M\to N$,给出

① $M=\mathbf{R}, N=\mathbf{R}^+, f: x\to y=|x|$;

② $M=\mathbf{R}, N=[-1,1], f: x\to y=\sin x$;

③ $M=[-1,0], N=[0,1], f: x\to y=x+1$;

④ $M=\{矩形\}, N=\mathbf{R}, f$:求面积.

其中表示映射的是( )

A. ①②③　　B. ②③④

C. ②③　　D. ③

解 ①中 0 无象;②③④满足映射定义,∴选 B.

例 3 根据所给条件,求函数 $f(x)$ 的解析式.

(1) $f(x+2)=x^2-3x+5$,求 $f(x)$.

(2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$,求 $f(x)$.

(3) $f(x)$ 为一次函数,$f\{f[f(x)]\}=8x+7$,求 $f(x)$.

(4) $af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$($x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$,a 为常数,且 $a\neq\pm1$),求 $f(x)$.

解 (1) 解法 1(换元法) 设 $x+2=t$,则 $x=t-2$.

$f(t)=(t-2)^2-3(t-2)+5=t^2-7t+15$,

即 $f(x)=x^2-7x+15$.

解法 2(配方法) $f(x+2)=x^2-3x+5=(x+2)^2-7x+1=(x+2)^2-7(x+2)+15$

$\therefore f(x)=x^2-7x+15$(将 $x+2$ 换成 x).

解法 3(待定系数法) $\because x+2$ 是关于 x 的一次式,$f(x+2)=x^2-3x+5$ 是二次函数,$\therefore f(x)$ 是二次函数.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则 $f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+c=ax^2+(4a+b)x+4a+2b+c$.

又 $f(x+2)=x^2-3x+5$ 比较系数得

$$\begin{cases}a=1\\4a+b=-3\\4a+2b+2c=5\end{cases}$$

解得 $a=1, b=-7, c=15$,即 $f(x)=x^2-7x+15$.

(2) (换元法) 令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]=t^3-3t$,即 $f(t)=t^3-3t$($|t|\geqslant2$).

$\therefore f(x)=x^3-3x$($|x|\geqslant2$).

(3) (待定系数法)设 $f(x)=ax+b$

$f\{f[f(x)]\}=f\{f[ax+b]\}=f\{a(ax+b)+b\}=a(a^2x+ab+b)+b=a^3x+a^2b+ab+b$

又 $f\{f[f(x)]\}=8x+7$. 比较系数得

$$\begin{cases}a^3=8\\a^2b+ab+b=7\end{cases}$$

解得 $a=2, b=1$ $\therefore f(x)=2x+1$

(4) (消元法) $\because af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$ ………………………………………… (1)

将(1)中 x 换为 $\frac{1}{x}$ 得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{a}{x}$ ………………………………………… (2)

(1)$a-$(2)得 $a^2f(x)-f(x)=a^2x-\frac{a}{x}$

$$\therefore f(x)=\frac{a^2x-\frac{a}{x}}{a^2-1}=\frac{a^2x^2-a}{(a^2-1)x}$$

解析 换元法、配方法、待定系数法及消元法是求函数解析式的常用方法,应根据题设条件选择正确的解法.

例 4 根据下列条件,求二次函数的解析式.

(1) 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$,且图像在 y 轴上的截距为 1,被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$,求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 设二次函数 $f(x)$ 的最大值等于 13,且 $f(3)=f(-1)=5$,求 $f(x)$ 的解析式.

解 (1)解法 1 设 $f(x)=ax^2+bx+c$($a\neq0$),由 $f(x-2)=f(-x-2)$,得 $4a-b=0$ (1)

又 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=2\sqrt{2}$,$\therefore b^2-4ac=8a^2$ ………………………………… (2)

已知 $c=1$ ………………………………… (3)

联立(1)(2)(3)解得 $a=\frac{1}{2}, b=2, c=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

解法 2 由 $f(-x-2)=f(x-2)$ 知 $y=f(x)$ 图像的对称轴为 $x=-2$. 设 $y=a(x+2)^2$

$+k$.

$\because$ 当 $x=0$ 时, $y=1$ $\quad\therefore 4a+k=1$ …… (1)

又由 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$ $\quad\therefore 2\sqrt{-\dfrac{k}{a}}=2\sqrt{2}$ ………………………………………… (2)

由(1)(2)解得 $a=\dfrac{1}{2}$, $k=-1$, $\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-1$.

解法 3 $\quad\because f(x-a)=f(-x-2)$, $\therefore y=f(x)$ 图像对称轴为 $x=2$. $\because |x_1-x_2|=2\sqrt{2}$, $\therefore y=f(x)$ 的图像与 x 轴交点为 $(-2-\sqrt{2},0)$, $(-2+\sqrt{2},0)$, 故可设 $y=f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

$\because f(0)=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ 故 $y=\dfrac{1}{2}(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})$.

(2) $\because f(3)=f(-1)$ $\quad\therefore$ 抛物线 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=1$, 可设 $y=a(x-1)^2+13$.

由 $f(3)=5$ 知 $y=f(x)$ 的图像过点 $(3,5)$.

$\therefore 5=a(3-1)^2+13$ $\quad$ 解得 $a=-2$.

$\therefore y=f(x)=-2(x-1)^2+13=-2x^2+4x+11$.

解析 求二次函数的解析式有三种表现形式即 $y=ax^2+bx+c$, $y=a(x-m)^2+n$, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$(这里 α、β 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根). 要充分挖掘题目的隐含条件并充分利用图形的直观性, 选择适当的表现形式, 是简化运算的有效手段.

例 5 如图 1-1 动点 P 从边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发顺次经过 B, C, D 再回到 A, 设 x 表示 P 点的行程, y 表示 PA 的长, 求 y 关于 x 的函数式.

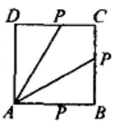

图 1-2

解 当 P 点在 AB 边上运动时, $PA=x$;

当 P 点在 BC 边上运动时, $PA=\sqrt{1+(x-1)^2}$;

当 P 点在 CD 边上运动时, 由 Rt△PDA, 求出 $PA=\sqrt{1+(3-x)^2}$;

当 P 点在 DA 边上运动时, $PA=4-x$.

故所求函数式为

$$y=\begin{cases} x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \sqrt{x^2-2x+2} & (1<x\leqslant 2)\\ \sqrt{x^2-6x+10} & (2<x\leqslant 3)\\ 4-x & (3<x\leqslant 4)\end{cases}$$

解析 解决实际问题是在设定或选定自变量后去寻求等量关系, 求得函数的表达式, 要注意函数定义域由问题中变量的实际意义确定.

例 6 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x^2-|x|}$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{\log_{(x+1)}(3-x)}}$.

解 (1) $\because \begin{cases} x^2-3x-4\geqslant 0\\ x^2-|x|\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 4\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq \pm 1\end{cases}$

$\Rightarrow x\geqslant 4$ 或 $x<-1$

故原函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[4,+\infty)$.

(2) $\because \begin{cases} 2x+5\geqslant 0\\ 3-x>0\\ x+1>0\\ 3-x\neq 1\\ x+1\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -\dfrac{5}{2}\\ x<3\\ x>-1\\ x\neq 2\\ x\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>-1\\ x\neq 0\\ x\neq 2\\ x<3\end{cases}$

故原函数的定义域为 $(-1,0)\cup(0,2)\cup(2,3)$.

例 7 解答下列各题:

(1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

(2) 若函数 $y=\sqrt{ax^2-ax+\dfrac{1}{a}}$ 的定义域为一切实数, 求实数 a 的取值范围.

解 (1) $\because \begin{cases} 0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

① 当 $a=0$ 时, $0\leqslant x\leqslant 1$.

② 当 $a<0$ 时，$-a>1+a$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$x\in\varnothing$. $-a<1+a$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$-a\leqslant x\leqslant 1+a$，$a=-\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{1}{2}$.

③ 当 $a>0$ 时，$a=1-a$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{1}{2}$. $a>1-a$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，$x\in\varnothing$，$a<1-a$ 即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\leqslant x\leqslant 1-a$.

综上知：$a=0$ 时，$a\leqslant x\leqslant 1$；$a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}$ 时，$x\in\varnothing$，$a=\pm\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{1}{2}$；$0<a<\frac{1}{2}$ 时，$a\leqslant x\leqslant 1-a$；$-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$-a\leqslant x\leqslant 1+a$.

(2) $\because x\in\mathbf{R}$，不等式 $ax^2-ax+\frac{1}{a}\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore\begin{cases}a>0\\ \Delta=a^2-4a\cdot\frac{1}{a}\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow 0<a\leqslant 2$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,2]$.

解析 求具体函数的定义域，要找出函数各部分都有意义的条件，并求其交集，同时注意定义域区间端点的"开"与"闭". 若已知函数的定义域，求函数解析式中的参数取值范围，通常转化为在其定义域上恒成立的不等式的解.

例 8 求下列函数的值域

(1) $y=\frac{3x+2}{5-4x}$；

(2) $y=\frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+5}$；

(3) $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$；

(4) $y=2x-\sqrt{1-x^2}$.

解 (1) 分离参数法

$y=\frac{3x+2}{5-4x}=-\frac{3}{4}+\frac{15}{4(5-4x)}$，

$\because x\in\mathbf{R}$ $x\neq\frac{5}{4}$ $\therefore\frac{15}{4(5-4x)}\neq 0$

$\therefore y\neq-\frac{3}{4}$

故该函数的值域为 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$.

(2) $\because x^2-4x+5\neq 0$，去分母得

$(y-2)x^2-4(y-2)x+5y-7=0$

$\because x\in\mathbf{R}$ 当 $y\neq 2$ 时，

$\Delta=(4y-8)^2-4(y-2)(5y-7)\geqslant 0$ 解得 $-1\leqslant y\leqslant 2$.

又当 $y=2$ 时原式不成立.

故该函数的值域为 $[-1,2)$.

(3) 换元法

设 $\sqrt{13-4x}=t(t\geqslant 0)$ 则 $x=\frac{13-t^2}{4}$.

$\therefore y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+4$，$\therefore -\infty<y\leqslant 4$.

(4) 代换法

令 $x=\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则 $y=2\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{5}\cos\left(\theta+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$，$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi$. $\therefore\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\leqslant\theta+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\leqslant\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\therefore -\sqrt{5}\leqslant y\leqslant\sqrt{5}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

即 $-\sqrt{5}\leqslant y\leqslant 2$.

例 9 解答下列各题：

(1) 设 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1,4]$，求 a,b 的值.

(2) 设 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

解 (1) 由 $y=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 得 $yx^2-ax+y-b=0$.

$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$，即 $y^2-by-\frac{a^2}{4}\leqslant 0$.

又 $\because(y+1)(y-4)\leqslant 0$ 即 $y^2-3y-4\leqslant 0$

两式比较系数得 $b=3$，$a=\pm 4$.

(2) $\because f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，$\therefore ax^2+2x+1$ 的值域 $\subseteq(0,+\infty)$，显然 $a<0$ 是不可能的；当 $a=0$ 时，有 $x>-\frac{1}{2}$. 当 $a>0$ 时，$a\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}\geqslant 1-\frac{1}{a}$，由题意得 $1-\frac{1}{a}\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$. $\therefore a$ 的取值范围是 $[0,1]$.

解析 求函数值域有分离参数法，反函数法，配方法，函数的单调性，换元法等，要根据具体题目来选择适当的方法. 若已知函数的值域求参数的取值范围常用比较系数法和讨论法.

例 10 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；

(2) $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$.

解 (1) 函数的定义域为 **R**，又 $\because$

$f(-x)+f(x)=\lg[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]$ $+\lg(x+\sqrt{x^2+1})=\lg 1=0$

$\therefore f(x)$为奇函数.

(2) 由函数的表达式知，其定义域为 $x\neq0$

又 $\because f(-x)=(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{1-2^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x)$

$\therefore f(x)$为偶函数.

解析 判断函数的奇偶性要紧扣定义，特别要注意其定义域是否关于原点对称.

例 11 解答下列各题：

(1) 已知 $y=f(x)$为奇函数，且 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，求 $f(x)$的解析式.

(2) $f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，又是增函数且 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围.

解 (1) 设 $x<0$ 则 $-x>0$

$\because f(x)$为奇函数，

$\therefore f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$

故 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & (x\geqslant0)\\ -x^2-2x & (x<0)\end{cases}$

(2) $\because f(x)$为奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$

$\therefore f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 可得

$f(1-a)<-f(a^2-1)$

$=f(1-a^2)$

又 $\because f(x)$为增函数，得

$\begin{cases}-1<1-a<1\\ -1<1-a^2<1\\ 1-a<a^2-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}0<a<2\\ -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\text{且 } a\neq0\\ a<-2\text{ 或 } a>1\end{cases}$

$\Rightarrow 1<a<\sqrt{2}$

故 a 的取值范围是$(1,\sqrt{2})$.

例 12 判断函数 $y=\frac{x-b}{x-a}(a>b)$的单调性.

解法 1 定义域 $x\neq a$. 设 $x_1<x_2<a$，则 $x_1-a<0, x_2-a<0, x_1-x_2>0$，于是

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-b}{x_1-a}-\frac{x_2-b}{x_2-a}$

$=\frac{(a-b)(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-b)}>0$.

即 $f(x_1)>f(x_2)$ $\therefore$ 函数 $y=\frac{x-b}{x-a}$在$(-\infty,0)$上是减函数，同理可证明函数 $y=\frac{x-b}{x-a}$在$(0,+\infty)$上也是减函数.

解法 2 $y=\frac{x-b}{x-a}=\frac{x-a+a-b}{x-a}=1+\frac{a-b}{x-a}$.

$\because a>b$ $\therefore a-b>0$ 又 $x-a$ 为增函数.

$\therefore\frac{1}{x-a}$在$(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$上是减函数，于是$\frac{a-b}{x-a}$在$(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$都是减函数.

从而 $y=1+\frac{a-b}{x-a}$在$(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$上也是减函数.

例 13 求函数 $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$的单调区间.

解 令 $u=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$

$\because y=u^{\frac{1}{2}}$在 $u\geqslant0$ 上是增函数.

由 $u\geqslant0$ 得 $-3\leqslant x\leqslant1$.

$\therefore u$ 在$[-3,-1]$上是 x 的增函数，在$[-1,1]$上是 x 的减函数，由复合函数单调性知，y 在$[-3,-1]$上是增函数，在$[-1,1]$上是的减函数，即 y 的增区间是$[-3,-1]$，减区间是$[-1,1]$.

解析 求复合函数单调区间的步骤是：(1)求出原函数的定义域；(2)把原函数分解成若干个基本函数；(3)判定各基本函数的单调性；(4)将中间变量的变化范围转化为自变量的变化范围；(5)判断原函数的单调性.

例 14 解答下列各题：

(1) 设 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数，$f(2)=1$，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$，求满足 $f(x)+$

$f(x-3)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围.

(2) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的函数，且满足 $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}>0$，又 $g(x)=f(x)+c$（c 为常数）在 $[a,b]$ 上单调递增，证明 $g(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上也单调递增.

解 (1)依题意 $f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x)$，又 $2=2f(2)=f(2)+f(2)=f(4)$，∴不等式 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$ 同解于

$$\begin{cases}f(x^2-3x)\leqslant f(4)\\ x>0 \text{ 且 } x-3>0\end{cases}\Rightarrow 3<x<4$$

(2) 任取 $x_1,x_2\in[-b,-a]$，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1,-x_2\in[a,b]$ 且 $-x_1>-x_2$.

于是 $g(x_2)-g(x_1)=f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{f(-x_2)}-\dfrac{1}{f(-x_1)}=\dfrac{f(-x_1)-f(-x_2)}{f(-x_1)f(-x_2)}$.

∵ $g(x)$ 在 $[a,b]$ 递增，∴ $f(x)=g(x)-c$ 在 $[a,b]$ 上递增，∴ $f(-x_1)-f(x_2)>0$，又∵ $f(x)>0$，∴ $f(-x_1)f(-x_2)>0$. 从而 $g(x_2)-g(x_1)>0$，即 $g(x_2)>g(x_1)$.

故 $g(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上是增函数.

例 15 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt{x^2+x}\quad(x\leqslant -1)$；

(2) $y=x|x|+2x$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}$. 在 $x\leqslant -1$ 时为减函数，故存在反函数，由 $y=\sqrt{x^2+x}$ 解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2}$. ∵ $x\leqslant -1$，∴ $x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2}$，原函数的值域为 $[0,+\infty)$.

∴反函数为 $y=f^{-1}(x)$

$=\dfrac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2}(x\geqslant 0)$.

(2) $y=x|x|+2x$

$$=\begin{cases}x^2+2x & (x\geqslant 0)\\ -x^2+2x & (x<0).\end{cases}$$

∵ $x\geqslant 0$ 时，$y=x^2+2x=(x+1)^2-1$ 为增函数，故存在反函数. 由 $y=x^2+2x$ 解得 $x=-1\pm\sqrt{1+y}$，∵ $x\geqslant 0$，∴ $x=-1+\sqrt{1+y}$，原函数的值域为 $[0,+\infty)$.

∴反函数为 $y=-1+\sqrt{1+x}(x\geqslant 0)$.

同理，当 $x<0$ 时，$y=-x^2+2x$ 的反函数为 $y=1-\sqrt{1-x}(x<0)$.

∴原函数的反函数为 $y=f^{-1}(x)=$

$$\begin{cases}-1+\sqrt{1+x} & (x\geqslant 0),\\ 1-\sqrt{1-x} & (x<0).\end{cases}$$

解析 求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤为：(1)判定函数在定义域上的单调性，确定是否存在反函数；(2)由 $y=f(x)$ 反解出 $x=f^{-1}(y)$；(3)求原函数的值域；(4)将 $x=f^{-1}(y)$ 中 x,y 互换得 $y=f^{-1}(x)$ 并指出其定义域(即原函数的值域). 若 $y=f(x)$ 为分段函数，其反函数应分段求，注意只有当在每段上的值域的交集为空集时，才有反函数.

例 16 给定实数 $a,a\neq 0,a\neq 1$，设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{a}\right)$. 求证：该函数图像关于直线 $y=x$ 成轴对称.

证明 由 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{a}\right)$，求得其反函数为 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{a}\right)$，∵ $f(x)=f^{-1}(x)$，∴ $y=f(x)=\dfrac{x-1}{ax-1}$ 的图像关于直线 $y=x$ 成轴对称.

解析 证明某一函数的图像关于直线 $y=x$ 对称，可证明这个函数与其反函数是相同的函数.

例 17 (1) 已知 $f(x)=x^2+3x-5$，$t\leqslant x\leqslant t+1$，若 $f(x)$ 的最小值为 $h(t)$，写出 $h(t)$ 的表达式.

(2) 已知 $f(x)=-x^2+ax+6$，$2\leqslant x\leqslant 3$，求 $f(x)$ 的最大值与最小值.

解 (1) $f(x)$ 的图像的对称轴 $x=-\dfrac{3}{2}$

① 当 $t\geqslant -\dfrac{3}{2}$ 时，$h(t)=f(t)=t^2+3t-5$

② 当 $t<-\dfrac{3}{2}<t+1$，即 $-\dfrac{5}{2}<t<-\dfrac{3}{2}$ 时，$h(t)=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{29}{4}$；

③ 当 $t+1\leqslant -\dfrac{3}{2}$，即 $t\leqslant -\dfrac{5}{2}$ 时，$h(t)=f(t+1)=t^2+5t+9$.

$$\therefore f(t)=\begin{cases} t^2+5t+9 & (t\leqslant -\frac{5}{2}) \\ -\frac{29}{4} & (-\frac{5}{2}<t<-\frac{3}{2}) \\ t^2+3t+5 & (t\geqslant -\frac{3}{2}) \end{cases}$$

(2) $f(x)$的图像的对称轴为 $x=\frac{a}{2}$

① 当$\frac{a}{2}\leqslant 2$即 $a\leqslant 4$ 时，$f(x)$的最大值为 $f(2)=2a+2$，最小值为 $f(3)=3a-3$.

② 当 $2<\frac{a}{2}<3$ 即 $4<a<6$ 时，$f(x)$的最大值为 $f(\frac{a}{2})=6+\frac{a^2}{4}$，当 $2-\frac{a}{2}<\frac{a}{2}-3$，即 $5<a<6$ 时，$f(x)$的最小值为 $f(3)=3a-3$，当 $2-\frac{a}{2}\geqslant\frac{a}{2}-3$，即 $4<a\leqslant 5$ 时，$f(x)$的最大值为 $f(2)=2a+2$.

③ 当$\frac{a}{2}\geqslant 3$ 即 $a\geqslant 6$ 时，$f(x)$的最小值为 $f(2)=2a+2$，最小值为 $f(3)=3a-3$.

解析　对区间上二次函数的最值问题的求法可分为①对称轴与区间均为确定，②对称轴已确定，而区间未确定(即含有参数)．③对称轴未确定(即含有参数)，区间已确定．这样三类问题，解此类问题的关键是讨论对称轴与区间的相对位置关系，可画出函数的图像来求解．

例 18　已知函数 $f(x)=(m-2)x^2-4mx+2m-6=0$ 的图像与 x 轴负半轴有交点，求实数 m 取值范围.

解　据题意可分以下几种情况.

(1) $m=2$ 时，$f(x)=-8x-2$ 与 x 轴交于 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$，满足题意.

(2) $m\neq 2$ 时，

① $f(x)=0$ 有一正根与一负根，$(m-2)\cdot f(0)<0$，即

$(m-2)(2m-6)<0$，解得 $2<m<3$.

② $f(x)=0$ 有两负根

$$\begin{cases} \Delta=(-4m)^2-8(m-3)(m-2)\geqslant 0 \\ x_1+x_2=\frac{4m}{m-2}<0 \\ x_1x_2=\frac{2m-6}{m-2}>0 \end{cases}$$

解得 $1\leqslant m<2$.

③ $f(0)=0$ 有一零根与一负根

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{2m-6}{m-2}>0 \\ x_1+x_2=\frac{4m}{m-2}<0 \end{cases}$$

不等式组无解.

综上述知 $1\leqslant m<3$.

例 19　关于 x 的方程 $3x^2-5x+a=0$ 的一根大于 -2 而小于 0，另一根大于 1 而小于 3，求实数 a 的取值范围.

解　$\because f(x)=3x^2-5x+a=0$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{6}$ 的抛物线，开口向上，可画出图像得：

$$\begin{cases} f(-2)=12+10+a>0 \\ f(0)=a<0 \\ f(1)=3-5+a<0 \\ f(3)=27-15+a>0 \end{cases}$$

解得 $-12<a<0$.

解析　将二次方程转化为二次函数，再利用根的分布转化为有关函数值的不等式(或组)，从而求出参数的值(或范围).

【单元测试】

一、选择题

1. 设 $M=\{a,b,c\}$，$N=\{-1,0,1\}$．映射 $f:M\to N$，使 $f(a)-f(b)=f(c)$，这样的不同映射 $f:M\to N$ 的个数为(　　)

A. 2　　B. 3

C. 5　　D. 7

2. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\left\{x\mid x-\frac{1}{x}>0, x\in\mathbf{R}\right\}$，则函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域为(　　)

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

B. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

3. 将函数 $y=\frac{b}{x+a}+a$ 的图像向右平移 2 个单位，后又向下平移 2 个单位，所得图像关于直线 $y=x$ 对称，那么(　　)