

数 学 与 文 化

shuxue yu wenhua

齐民友 著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168毫米 32开 印张，7.25 字数，180,000

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

印数：1——1,500

ISBN7—5355—1267—4/G·1262

定价：4.10 元

写在前面

丁石孙(北京大学)

最近钱学森同志在一封信中提出了一个观点,他认为数学应该与自然科学和社会科学并列,他建议称为数学科学。当然,这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”,他认为在人类整个知识系统中,数学不应被看成是自然科学的一个分支,而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。

我基本上同意钱学森同志的这个意见。数学不仅在自然科学的各个分支中 useful,同时在社会科学的很多分支中也有用。近期随着科学的飞速发展,不仅数学的应用范围日益广泛,同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上,数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系,而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式,影响着人文科学的进步。总之,数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多人能认识到这一点,我们决定编辑出版《数学·我们·数学》这套小丛书。与数学有联系的学科非常多,有些是传统的,即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科,如力学、物理以及天文等。化学虽然在历史上用数学不多,不过它离不开数学大家是看到的。对这些学科,我们的丛书不打算多讲。我们选择的题目较多的是那些与数

学的关系虽然密切,但又不大被大家注意的学科,或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不想写成学术性的专著,而是力图让更大范围的读者能够读懂,并且能够从中得到新的启发。换句话说,我们希望每本书的论述是通俗的,但思想又是深刻的。这是我们的目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不容易达到。应该承认,我们很难做到每一本书都写得很好,更难保证书中的每个论点都是正确的。不过,我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见,甚至就某些问题展开辩论。我们相信,通过讨论与辩论,问题会变得愈来愈清楚,认识也会愈来愈明确。

1989年4月

于北京大学

序

开始打算写这样一本书直接的起因是1988年夏天的一件事：在和几位朋友谈到数学时，我提出了一个大胆的想法：一个没有现代数学的文化是注定要衰落的。朋友们都是数学同行当然都是赞同这个说法的，而且大家都感到只看到数学对于现代科学技术的作用是远远不够的，数学对于人类文化的影响要深远得多。我们这一批老朋友通常的习惯是：只要聚集在一起，就要谈论数学遭到的冷遇及种种看不惯的事，痛心疾首，直到夜深，然后还是各人干自己的事，似乎谁也没有羡慕过别人的“效益”，到下一次在一起又再议论一番。但是一个问题一直萦绕着我，不太容易摆脱了：数学对于人类文化的影响何在？

第二年，我为武大哲学系的学生讲了一点数学课，这其实也是老想法了。如果按通常的办法在微积分以后再多讲一点具体的东西，似乎对文科学生没有什么用；如果讲一点“新三论”、“老三论”，说老实的，我很佩服我们的老祖宗对“数”有特殊的爱好：“四”维“八”德、“十”全大补、“九九”艳阳，……谁说中国人不重视数学呢？而我对这些高论，实在大不敬得很，没有首先“忏悔”自己不懂“耗散”、“突变”之为论，而是很奇怪：立论何以必“三”？不是“四论”，更不是“五论”？我想，还是讲一点实实在在的东西吧。一位朋友说，哪有一点都不需要算的数学，但是对哲学系的学生而言，更重要的是数学思想。于是我选了非欧几何这样一个题目，我想，至少同学们会知道，关于“空间是什么”，数学家提出了如此革命性的思想，原不是靠几句空话，而是作了极其艰苦的努力，积两千年穷根究底

的探讨。如果同学们知道了科学上的事决没有可以偷巧的,理科、文科统统一样,那就是积了一点阴德了。懂一点非欧几何,知道一点数学基础方面的争论,对学哲学学生的好处,当不亚于知道一点弗洛依德或法伊尔阿本德(Feyerabend. Paul, 1924— 美国科学哲学家)——不过我怀疑有几个人真肯念一点法伊尔阿本德的书,对这位老先生心仪久矣,却是只听楼梯响,不见人下来。中国人似乎很容易满足,听见楼梯响也就如见其人了,所以直到今年四月,我才找到他的著作的第一个中文译本《自由社会中的科学》(上海译文出版社)——讲这样一门课得益最大的是我,因为它逼着我读了一点过去想读而未读的书。

这门课的讲稿就成了这本书的第一个稿子。这时我已开始感觉到数学对人类文化的影响(还需多作探讨),在于它代表了一种理性主义的探索精神。说它是理性主义的并不否定它表现了一种热情。实际上,没有一种极大的热情支持,人们怎么会倾毕生之力去研究一些时常看不见实际应用的问题呢?因为这个想法是逐渐形成的,所以写起来时而明白一些,时而又感到没有真讲清楚,虽然一再修改,终于难以满意。交稿的时间到了,我也只好把这本小书交给读者审阅,如能得到批评和教正,将来再有机会,可把问题说得清楚一点,也就不辜负朋友们和出版社的好意了。

特别要感谢老朋友康宏达。不仅因为他出了许多主意,而且因为,这里面的许多问题是我们多年来谈论的事。我要向他致歉,因为没有留下更多的时间让他严格地评论这本小书。

作者

1990.5.20

目 录

序	1
绪言	1
第一章 理性的觉醒	17
§ 1 希腊的几何学	19
§ 2 欧几里德的《几何原本》	29
§ 3 数学与第一次科学革命	35
§ 4 欧几里德与理性时代	51
§ 5 希尔伯特的《几何基础》	65
第二章 数学反思呼唤着暴风雨	82
§ 1 绝对几何学与欧几里德几何	84
§ 2 非欧几何的发现	93
§ 3 罗巴契夫斯基几何内容的简单介绍	111
§ 4 数学——人类悟性的自由创造物？	120
§ 5 罗氏几何的相容性	134
§ 6 关于数学基础	141
§ 7 数学的“失乐园” ——哥德尔定理意味着什么？	154
第三章 “我从一无所有之中创造了一个新宇宙”	164
§ 1 弯曲的宇宙	165
§ 2 相对论——牛顿的时空的终结	181
§ 3 无尽的探索	202
结束语	216
编后	220

绪 言

我手边是《爱因斯坦文集》第一卷，是商务印书馆 1976 年出版的。翻开第一篇是他的“自述”(1946)：“我已经 67 岁了，坐在这里，为的是要写点类似自己的讣告那样的东西。”这篇文章多次吸引过我，而在动手写《数学与文化》时，对它的回忆又浮上我的心头。他说：“当我还是一个相当早熟的少年的时候，我就已经深切地意识到，大多数人终生无休止地追逐的那些希望和努力是毫无价值的。而且，我不久就发现了这种追逐的残酷，这在当年较之今天更加精心地用伪善和漂亮的字句掩饰着的。每个人只是因为有个胃，就注定要参与这种追逐。而且，由于参与这种追逐，他的胃是有可能得到满足的；但是一个有思想、有感情的人却不能由此而得到满足。”就是说人除了物质生活的需要外，还有精神生活的需要。举例来说，为了满足自己的胃，在爱因斯坦生活的那个世界里，人们不得不追逐、竞争；被剥削是痛苦的，剥削人是残酷的。正因为如此，有思想、有感情的人不得不思索着人类的未来。在没有剥削的社会里，只看到人的物质需要，忘记了人是有思想、有感情的，则人的需要变成单纯生物性的需要，这是可怕的。讨论文化问题，固然可以列举文化的各个部门：科学、文学、艺术、政治、宗教、伦理……，请注意，数学也是文化的一部分，我们可以讨论数学对其它文化部门的影响。但是在我看来更根本的是宁可去思索一下人类的精神生活以及数学对它的影响。我愿这样来看待文化问题。

满足人的精神生活需要有许多方面：有宗教，这是我们中国人不太熟悉的。我们这个民族及其文化可能是宗教色彩最淡薄的。撇开了这一点，人的精神生活还有理性的与感性的两个方面。对后一领域，不妨谈到音乐。曾有人说，数学是理性的音乐，音乐是感性的数学。爱因斯坦一生热爱音乐，他就说过：“音乐和物理学领域中的研究工作在起源上是不同的，可是被共同的目标联系着，就是对表达未知的东西的企求。……这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学的公式组成。我们试图创造合理的世界图象，使我们在那里就象感到在家里一样，并且可以获得我们在日常生活中不能达到的安定。”^①绝大多数人从事于数学是基于人类物质生活上的需要，但是在这一过程中确实也使人产生一种精神上的需要：理性生活的需要。人类的这种理性生活的需要是什么样的呢？爱因斯坦在“自述”中继续写道：“在我们之外有一个巨大的世界，它离开我们而独立存在，它在我们面前就象一个伟大而永恒的谜，然而至少部分地是我们的观察和思维所能及的。对这个世界的凝视深思，就象得到解放一样吸引着我们，而且我不久就注意到，许多我所尊敬和钦佩的人，在专心从事这项事业中，找到了内心的自由和安宁。在向我们提供的一切可能范围里，从思想上掌握这个在个人以外的世界，总是作为一个最高目标而有意无意地浮现在我的心目中。有类似想法的古今人物，以及他们已经达到的真知灼见，都是我的不可失去的朋友。通向这个天堂的道路，并不象通向宗教天堂的道路那样舒坦和诱人；但是，它已证明是可以信赖的，而且我从来没有为选择了这条路而后悔过。”作为一个划时代的大科学家，他的自述当然会引起我的敬仰和或多或少的共鸣，特别是他提到的“得到解放”是什么意思呢？应该认真想一想。但是首先必须回答一个问题：这仅仅是少数最杰出的人的精神生活还是整个人类精神生活的一个侧面？我作中学生的時候，曾看过一部美国电影

^① 引自“论科学”，《爱因斯坦文集》，第一卷，284—286页。

《居里夫人传》，其中一个镜头令人永远难忘：年青的未来的科学家来到巴黎大学，在太大的阶梯教室里听到教授说：“用你的手指触摸天上的星辰”，这时镜头转到她的充满火样激情的眼睛。爱因斯坦所说的，其实也就是“用理性的手指去触摸天上的星辰”。正是这种思想、这种感情激励着人们奉献自己于这项事业，而且自己也得到了解放。人类从事于这项事业大约有两千多年了（我是从希腊时代算起的），这种精神已经成了人类最宝贵财富的一部分。这就是我所想讨论的文化。爱因斯坦为居里夫人写过一篇著名的悼文，他说：“在象居里夫人这样一位崇高的人物结束她的一生的时候，我们不要仅仅满足于回忆她的工作成果对人类已经作出的贡献。第一流人物对于时代和历史进程的意义，在于其道德品质方面，也许比单纯的才智成就方面还要大。即使是后者，它们取决于品格的程度，也远超过通常所认为的那样。”^①诚然，大多数人不可能以科学作为自己的终身事业；大多数在生活中要和科学打交道的人是出于一种实用的目的。但是这种追求真理的精神对于所有的人都是极有价值的。如果人们懂得我们的生活有更崇高的目标，不仅仅是每个人都有一个胃，而追求真理、追求至善以及追求美，又应该是统一的，这样的世界该是多么美好！科学上的巨人好比太阳，不是每个人都能成为太阳，但是每个人都可以沐浴于阳光之下。人类社会越进步，人就越需要这样的阳光。追求这样一个充满阳光的世界也就是追求人类的进步。

这种理性的探索有一个永恒的主题，这就是：“认识宇宙，也认识人类自己。”在这个探索中数学有着特别的作用。数学和任何其它学科不同，它几乎是任何科学所不可缺少的。没有任何一门科学能像它那样泽被天下。它是现代科学技术的语言和工具，这一点大概没有什么人会怀疑了。它的思想是许多物理学说的核心，并为它们的出现开辟了道路，了解这一点的人就比较少了。它曾经是科学

^① 引自《悼念玛丽·居里》，《爱因斯坦文集》第一卷，339—340页。

革命的旗帜，现代科学之所以成为现代科学，第一个决定性的步骤是使自己数学化。这一点正是本书所要讨论的主题之一。为什么会这样？因为数学在人类理性思维活动中有一些特点。这些特点的形成离不开各个时代的总的文化背景，同时又是数学影响人类文化最突出之点。我这里并不想概括什么是数学文化，而只是就它对人类精神生活影响最突出之处提出一些看法。诚然，其它的学科也可能有这些特点，但大抵是与受数学的影响分不开的。

首先，它追求一种完全确定、完全可靠的知识。在这本小书里可以看到许多被吸引到数学中来的人正是因为数学有这样的特点。例如说，欧几里德平面上的三角形内角和为 180° ，这绝不是说“在某种条件下”，“绝大部分”三角形的内角和“在某种误差范围内”为 180° 。而是在命题的规定范围内，一切三角形的内角和不多不少为 180° 。产生这个特点的原因可以由其对象和方法两个方面来说明。从希腊的文化背景中形成了数学的对象并不只是具体问题，数学所探讨的不是转瞬即逝的知识，不是服务于某种具体物质需要的问题，而是某种永恒不变的东西。所以，数学的对象必须有明确无误的概念，而且其方法必须由明确无误的命题开始，并服从明确无误的推理规则，借以达到正确的结论。通过纯粹的思维竟能在认识宇宙上达到如此确定无疑的地步，当然会给一切需要思维的人以极大的启发。人们自然会要求在一切领域中这样去做。一切事物的概念都应该明确无误，绝对不允许偷换概念，作为推理出发点的一组命题又必须清晰而判然，推理过程的每一步骤都不容许有丝毫含混，整个认识和理论必须前后一贯而不允许自相矛盾。正是因为这样，而且也仅仅因为这样，数学方法既成为人类认识方法的一个典范，也成为人在认识宇宙和人类自己时必须持有的客观态度的一个标准。就数学本身而言，达到数学真理的途径既有逻辑的方面也有直觉的方面，但就其与其它科学比较而言，就其影响人类文化的其它部门而言，它的逻辑方法是最突出的。这个方法发展成为人们常说的公理方法。迄今为止，人类知识还没有哪一个部

门应用公理方法得到如数学那样大的成功。当然，我们也看不出为什么其它的知识部门需要这样高标准的公理化。但是，如果到今天某个知识部门还只是只有论断而没有论据，只是一堆相互没有逻辑联系的命题，前后又无一贯性，恐怕是不会有人接受的了。每个论点都必须有根据，都必须持之有理。除了逻辑的要求和实践的检验以外，无论是几千年的习俗、宗教的权威、皇帝的敕令、流行的风尚统统是没有用的。这样一种求真的态度，倾毕生之力用理性的思维去解开那伟大而永恒的谜——宇宙和人类的真面目是什么？——是人类文化发展到高度的标志。这个伟大的理性探索是数学发展必不可少的文化背景，反过来也是数学贡献于文化最突出的功绩之一。

数学作为人类文化组成部分的另一个特点是它不断追求最简单的、最深层次的、超出人类感官所及的宇宙的根本。所有这些研究都是在极抽象的形式下进行的。这是一种化繁为简以求统一的过程。从古希腊起，人们就有一个信念，冥冥之中最深处宇宙有一个伟大的、统一的、而且简单的设计图，这是一个数学设计图。在一切比较深入的科学研究后面，必定有一种信念驱使我们。这个信念就是：世界是合理的、简单的、因而是可以理解的。对于数学研究则还要加上一点：这个世界的合理性，首先在于它可以用数学来描述。在古代，这个信念有些神秘色彩。可是一直到现代，科学经过了多次伟大的综合，多少随意地列举一些：欧几里德的综合；牛顿的综合；马克思威尔的综合；爱因斯坦的综合；量子物理的综合；计算机的出现，哪一次不是或多或少遵循这个信念？也许有例外：达尔文和孟德尔，但是今天已经开始，人们在用数学去讨论物种的进化与竞争，讨论遗传的规律。人们会又一次看见宇宙的根本规律表现为一种抽象的、至少是数学味很重的设计图。这不是幻想而是现实。为什么 DNA 的双螺旋结构是在卡文迪什实验室完成，受了研究分子结构的 X 射线衍射方法那么多好处？难道看不出这也是一种把生命归结为最简单成份的不同位置、不同形式、不同数量而成

的数学味很重的结构吗？这种深层次的研究是能破除迷信的，它鼓励人们按照最深刻的内在规律来考虑事物。我们为世界图景的精巧和合理而欣喜而惊异。这种感情正是人类文化精神的结晶。数学正是在这样的文化气氛中成长的，而反过来推动这种文化气氛的发展。现在应该提出的问题是，对这样一种信念应该怎样去估价。是否还应该同时也看到它的不足的一面。从科学史看来，一直存在一种“还原”的倾向：把复杂的现象归结为一些最简单的最原始的因素的作用。物体分成了“质点”、“电荷”；分成了分子、原子、亚原子的粒子；生物分成了细胞、然后又是细胞核、细胞质、染色体、基因、核酸、……丰富无比、千差万别的世界的多样性似乎越来越被归纳为这些基本的成份或称为宇宙的砖石在数量上、形状上、结构上的差别，这当然是数学发挥作用的大好场所。同时也就产生了一种越来越深刻的疑问：大千世界真是这些最简单的成分迭加的吗？难道线性的迭加原理竟是宇宙的最根本法则吗？由一堆砖石固然可以建成宏伟的纪念碑，却也可以搭起一座马棚，它们的区别究竟何在？可是，每一个从事数学研究的人仍然抱有下面说的信念：想解决这个更深刻的问题——我把它称为综合，而把那种还原的倾向称为分析——仍然要靠数学，当代数学的发展将越来越证实这一点。

数学的再一个特点是它不仅研究宇宙的规律，而且也研究它自己。在发挥自己力量的同时又研究自己的局限性，从不担心否定自己，而是不断反思、不断批判自己，并且以此开辟自己前进的道路。它不断致力于分析自己的概念，分析自己的逻辑结构（例如希腊人把一切几何图形都分解为点、线、面，把所有几何命题的相互关系分解为公理、公设、定义、定理）。它不断地反思：自己的概念、自己的方法能走多远？从希腊时代起，毕达哥拉斯认为宇宙即数（他是指自然数），可是遇到了无理数，后来的希腊人只好采用不可公度理论，因为弄不清，就干脆不讲无理数，而讨论一般的线段长。希腊人甚至不讲数，使希腊数学与其它民族——例如中国——相

比呈现了缺点。但即令如此,也要保持高度严整,而不允许采取折衷主义的态度。历史终于证明,正是希腊人开辟了研究无理数系的道路。他们研究数学,却同时考虑数学研究的对象是否存在。希腊人考虑数学对象的存在问题,把存在归结为可构造,然后就问:“用直尺与圆规经有限步骤去三等分任意角可能吗?”因为弄不清是否可能,即没有构造的方法以证明三等分角的存在,他们的几何学中干脆不讲一个角的三分之一,只讲平分线,从不讲角三分线。越向后面发展,数学就出现了越来越多的“不可能性”: $x^2+1=0$ 不可能在实数域中求解,五次以上的方程不能用根式求解,平行线公理能不能证明?到20世纪初才知道是既不能证明又不能否证。大家都说,数学最需要严格性,数学家就要问什么叫严格性?大家都说,数学在证明一串串的定理,数学家就要问什么叫证明?数学越发展,取得的成就越大,数学家就越要问自己的基础是不是巩固。越是在表面上看来没有问题的地方,越要找出问题来。乘法明明是可以交换的,偏偏要研究不可交换的乘法。孟子自嘲地说:“予岂好辩哉,予不得已也!”数学家只需要换一个字:“予岂好‘变’哉,予不得已也!”当然,任何科学要发展就要变。但是只是在与实际存在的事物、现象或实验的结果发生矛盾时才变。惟有数学,时常是在理性思维感到有了问题时就要变。而且,其它科学中“变”的倾向时常是由数学中的“变”直接或间接引起的。当然,数学中许多重要的变是由于直觉地感到有变的必要,感到只有变才能直视宇宙的真面目。但无论如何,是先从思维的王国里开始变,即否定自己。这种变的结果时常是“从一无所有之中创造了新的宇宙”。

到了最后,数学开始怀疑起自己的整体,考虑自己的力量界限何在。大概是到了19世纪末年,数学向自己提出的问题是:“我真是一个没有矛盾的体系吗?我真正提供了完全可靠、确定无疑的知识吗?我自认为是在追求真理,可是‘真’究竟是指什么?我证明了某些对象的存在,或者说我无矛盾地创造了自己的研究对象,可是它们确实存在吗?如果我不能真正地把这些东西构造出来,又怎么

知道它是存在的呢？我是不是一张空头支票，一张没有银行的支票呢？”

总之，数学是一株参天大树，它向天空伸出自己的枝叶，吸收阳光。它不断扩展自己的领地，在它的树干上有越来越多的鸟巢，它为越来越多的学科提供支持，也从越来越多的学科中吸取营养。它又把自己的根伸向越来越深的理性思维的土地中，使它越来越牢固地站立。从这个意义上来讲，数学是人类理性发展最高的成就（或者再加上“之一”二字更好一些？）。

数学深刻地影响人类精神生活，可以概括为一句话，就是它大大地促进了人的思想解放，提高与丰富了人类的整个精神水平。从这个意义上讲，数学使人成为更完全、更丰富、更有力量的人。爱因斯坦说的“得到解放”，其实正是这个意思。数学的上述这些特点当然都是在历史上逐渐形成的而且不是一成不变的。这些特点到19世纪末以至20世纪表现得越来越突出。那么，我们要问，在今后会不会有变化呢？这是完全可能的。但是总的看起来，数学文化发展的过去、现在和将来都会不断促进人类的思想解放，使人成为更完全、更丰富、更有力量的人，这是不会变的。从这个意义上讲，人类无论在物质生活上与精神生活上得益于数学实在太多。我们也可以十分肯定地强调，不论今后数学怎么发展，它的永恒的主题一定还是“认识宇宙，也认识人类自己。”下面我们再概括地谈一下数学怎样促进了人类的思想解放。

从历史上看，数学促进人类思想解放大约有两个阶段。第一个阶段从数学开始成为一门科学直到以牛顿为最高峰的第一次科学技术革命。不妨说，在这个时期中，数学帮助人类从宗教和迷信的束缚下解放出来，从物质上、精神上进入了现代世界。这一阶段开始于人类文化开始萌芽的时期。在那时，尽管不少民族都有了一定的数学知识的积累，数学还没有形成一门科学。数学的作用主要是为解决人类的物质生活的具体问题服务的。人类刚从蒙昧中觉醒出来。迷信、原始宗教还控制着人类的精神世界。三大宗教的出现

还是比较晚的事了。在远古的一些民族中,数学对人类的精神生活的影响还只表现在卜卦、占星上,成为“神”与人之间沟通的工具。一直到了希腊文化的出现,开始有了我们现在所理解的数学科学,其突出的成就就是欧几里德几何学。它的意义是:在当时的哲学理论的影响与推动下,第一次提出了认识宇宙的数学设计图的使命,第一次提出了人的理性思维应该遵循的典范。由于当时世界各部分相对地比较隔绝,这个数学文化影响所及大抵还只是地中海沿岸。希腊衰落、罗马人取而代之,这个文化的影响也逐渐转向东罗马和阿拉伯人的地区。欧洲逐渐进入黑暗的中世纪。到新的生产关系开始出现,人类需要一种新文化以与当时占统治地位的天主教相对抗,希腊文化又被复活了起来,形成所谓“文艺复兴”(这当然不会是原来的希腊文化)。数学直接继承了希腊数学成就,终于成了当时科学技术革命的旗帜。它的主题仍然是“认识宇宙,也认识人类自己”。它与宗教的矛盾日益深刻,尽管有宗教裁判所和它的酷刑,上帝的地位还是逐渐被贬低了。到了牛顿时代,当时的科学技术革命达到了顶峰,而上帝的地位也下降到了低谷。牛顿的自然神论离彻底的无神论只有一步之遥。人的地位上升了。他凭借着理性旗帜要求成为大自然的统治者。当时的技术革命,其科学基础是牛顿力学,而从文化思想上说,其实是机械师和工匠的革命。人对大自然的“统治”,也只是一个工匠认识了一部大机器,开动了这一部大机器,并且局部地模仿与复制这部大机器。但是这个工匠仍时而打着上帝的旗号。人尽管要求以自己的理性来重新安排人类自己的生活,但人对自己的看法,以拉美特利(Lamettrie, Julien de, 1709—1751, 法国机械唯物论哲学家)的口号为标志也就是“人是机器”。机械唯物论的决定论,是当时的科学技术革命的指导思想,而数学是它的最主要的武器。当时数学的发展以微积分的出现为其最高峰,在这个时期确实取得了极其辉煌的胜利。由希腊起源的这个文化,现在从地域上说已成了全世界的文化。这是因为资本主义把我们的地球变成了一个世界,而资本主义的文化也日益成

了全世界的文化。作为它的一个重要组成部分的数学也就不再只是希腊的数学,而成为全人类的数学文化。其它民族例如中国,尽管在数学上有过灿烂的成就,现在其影响和作用比这个新的、全人类的数学,也就瞠乎其后,不能相比了。有一些民族的成就被吸收到这个新的全人类的数学中,甚至起了极其重要的作用,特别是印度和阿拉伯的数学是如此;有一些就成了历史的陈迹了。对于中国人来说,重要的不是在历史的丰碑面前凭吊怀古,而是奋起直追。明末清初,先进的中国人开始理解这一点。徐光启开始翻译欧几里德的《几何原本》,康熙皇帝亲自主编过堪称为中国的《几何原本》的《数理精蕴》,都表明中国人正在开始脚踏实地地学习直接由希腊数学发源的新的全人类的数学。总之,这是一次伟大的思想解放运动。从当时世界范围来看,是人类逐渐从宗教的统治下解放出来。从中国来看,尽管由于历史的、社会的原因,宗教的思想统治不如当时欧洲之烈,但到了17世纪,资本主义萌芽已经在中国出现,中国人也要求一种新的生产关系及其文化。特别是鸦片战争以后,中国人更要求反抗帝国主义的侵略,这样,自然也要求新的文化。17世纪以后,现代的数学传入了中国,开始为中国人所接受,并与中国固有的文化相抗衡,成为中国人求解放求富强的思想武器,正是这个历史潮流的反映。

第二阶段由18世纪末算起。到了那时,数学化的物理学、力学、天文学已经取得了惊人的进展。可是人们越来越要求从完全的决定论下解放出来。这里面有社会、政治的原因,也有文艺、哲学上的反映,我们都不去讨论了。但是有一点很明显,数学的重要性已经不如前一个阶段。当时科学发展的最重大的问题是要求用一个发展的观点,把世界看作一个发展的、进化的、各部分相互联系的整体。黑格尔哲学提出唯心主义的辩证法,以一种扭曲的形式回答了这个问题。他认为“绝对观念”是宇宙的本质,“绝对观念”在发展过程中“外化”为物质,并且按照由低级到高级的方向,由无机物发展到有机体,有了生命,然后从低级生物发展到高级生物,然后成

为人。最后，“绝对观念”又在人的意识的发展中复归为自身。黑格尔的自然哲学是他的哲学体系中最薄弱的一环，其原因之一在于当时自然科学的发展提供的基础所限。马克思、恩格斯的功绩就是在唯物主义的基础上改造了辩证法，成了辩证唯物主义。这一个发展除了社会的、历史的背景以外，还有自然科学的基础。能量的守恒与转化（与热机、热力学的发展相关）、细胞的发现、特别是达尔文的进化论，就是最突出的几件大事。这样，数学自然从人们的视野中后退。数学家倒没有因此而失望，因为他们仍然继续在为人类作出重大的贡献，而其意义甚至是他们自己也未曾预料到的。数学家这个时期的工作，一方面是继续扩展已有的成就，另一方面是向深处进军。这里最突出的事例一是非欧几何的发现，二是关于无限的研究。前者根本改变了我们对空间的本性的认识。后者是由微积分的基础研究开始的，也说明从希腊时代的芝诺悖论（庄子“天下篇”中讲的惠施十辩中的“飞鸟之景，未尝动也”和芝诺悖论几乎是完全一样。可惜的是，这些思想一直停留在抽象的思辨上而没有具体展开。这当然与数学没有在中国很好发展有关）所揭示的有限与无限的矛盾是何等深刻。特别是非欧几何的出现是人类思想一次大革命。它仍然是一种思想解放：这一次是从人自己的定见下解放出来。数学的对象越来越多的是“人类悟性的自由创造物”。这件事引起了对数学的误解和指责，实际上是人类的一大进步。人在自己的成长中发现，单纯凭着直接的经验去认识宇宙是多么不够。人既然在物质上创造出了自然界中本来没有的东西——一切工具、仪器等等——来认识和创造世界，为什么不能在思维中创造出种种超越直接经验的数学结构来表现自然界的本来面目呢？数学的这一进步在当时并没有超出牛顿力学的决定世界观，但非欧几何的确从根本上动摇了牛顿的时空观，为相对论的出现开辟了道路。对数学本身更有深远意义的是，这两件大事（非欧几何的出现和关于无限的研究）导致了对数学基础的研究，使人类第一次十分具体而严格地提出了理性思维能力的界限何在的问题。