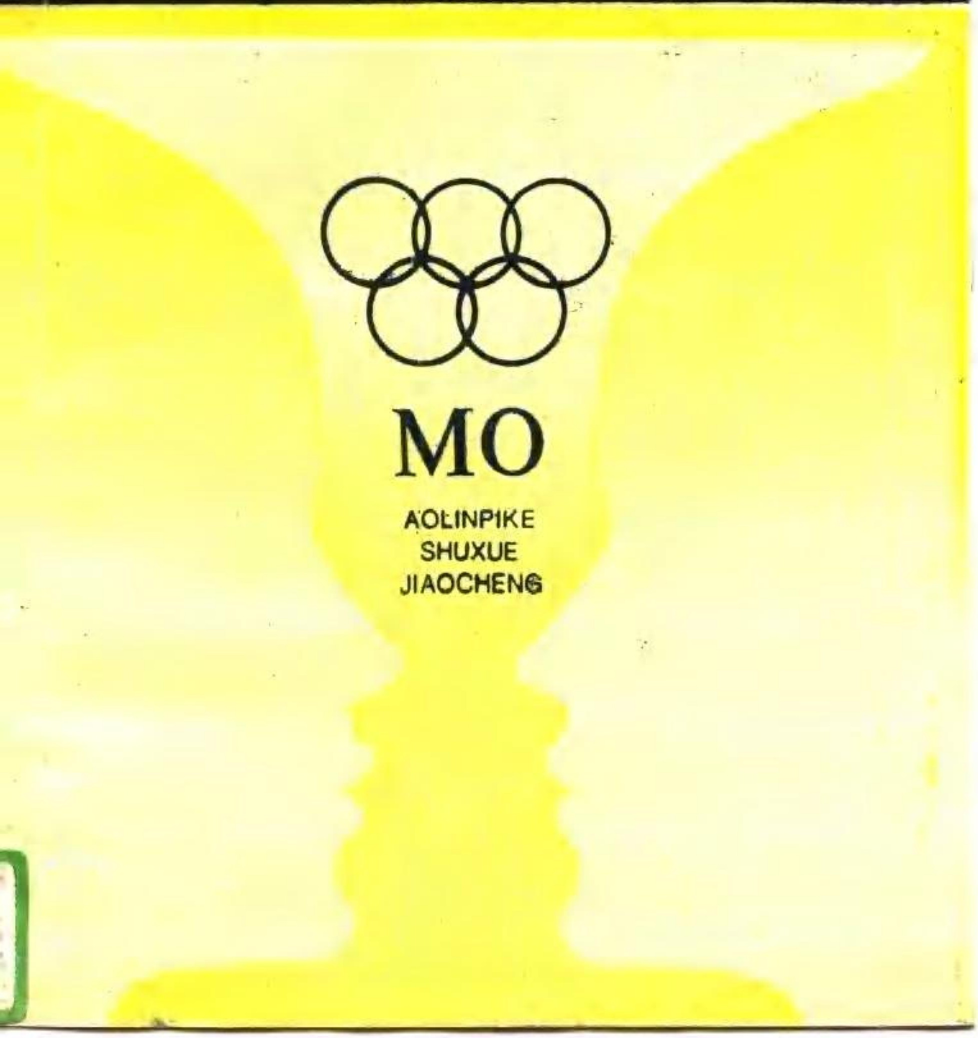
奥林匹克数学教程

刘凯年 编著

重庆大学出版社



奥林匹克数学教程

刘凯年　编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据全国《高中数学竞赛大纲》编写的，该书以严谨完整的结构将竞赛数学问题组织成为一种相应层次的课程，内容覆盖国内外高中数学竞赛所需要的数学知识、方法和技巧。全书精选了大量例题和习题，书末附有习题答案。

该书注重数学思想方法，力求体现“创造性的思维训练是奥林匹克数学的精髓”的观点，着重提高读者分析问题和解决问题的能力，可供高中学生、中学数学教师、师范院校数学专业师生使用。

奥林匹克数学教程
刘凯年 编著
责任编辑 刘茂林 何光杰
*
重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
四川外语学院印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：14.75 字数：331千
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷
印数：1－8000
ISBN 7－5624－0774－6/O·95 定价：6.70元
(川)新登字020号

前 言

1985年，中国数学会决定派出两名选手参加在芬兰举办的第26届国际数学奥林匹克(IMO)，从此揭开了我国数学竞赛活动的新的一页。在很短的时间内，中国在IMO中取得了令世界瞩目的成绩。从第27届到第34届IMO，中国代表队4次获团体总分第一名，2次第二名；在所有参赛的48名(人次)选手中，获奖达47人次，其中获金牌(一等奖)32枚！这样好的成绩归功于我们的选手和各级数学奥林匹克教练员，也是全国广大中学师生在大面积提高中学数学教学质量的基础上，各地广泛开展数学竞赛活动的结果。

在我国，数学竞赛活动已经有了30多年的历史。在中国数学会普委会的领导下，在"普及的基础上不断提高"方针的指引下，全国各地数学竞赛活动蓬勃开展，全国高中数学联赛在正常轨道上进入了一个新的时期。各地区(各中学)纷纷建立(开办)数学奥林匹克学校(培训班)，需要各种适合不同层次，不同要求的高中数学竞赛辅导教材。作者在多年从事奥林匹克数学教学研究，辅导中学生参加数学竞赛的基础上，根据中国数学会普委会制定的《高中数学竞赛大纲》的要求，编写成这本《奥林匹克数学教程》。该书充分注意到"灵活的、创造性的思维训练是奥林匹克数学的精髓"这一观点，力图使读者能通过学习本教程大幅度地提高思维能力素质。全书在编写过程中，对于体现"奥林匹克数学"应作为一门专门学科的思

想，作出了尝试。该书容量大，覆盖面广，内容有层次地渐进提高，并专章讨论了数学竞赛中常用的思维方法，入门和自学容易。书末附有模拟竞赛试题以及全书习题略解，使用方便。该书可供各级数学奥林匹克学校（培训班）作为高中数学竞赛培训教材使用，也可供师范院校数学专业学生学习。

参加本书编写工作的还有：刘兴中、沈学才、刘炼、黄良佐、朱兴义、刘梦量、邱明军、刘莉芬、陈冬秀、梁隆素。

本书的例题和习题多选自国内外比较有影响的数学竞赛试题，也有一些是作者的研究成果。为简便起见，除国际数学奥林匹克试题外，均不再注明出处。

作者

1993年8月

目　　录

绪　　论

当前，各级各类中学数学竞赛活动在全国各地蓬勃开展．作为课堂学习的补充，数学竞赛活动在扩大知识领域、开发智力、培养能力、激发学生学习兴趣，以及开拓视野、交流信息等方面都起着积极的促进作用．事实证明，大量在数学竞赛活动中涌现出来的优胜者，他们在学校里也是各科成绩拔尖的姣姣者、品学兼优的好学生．因此，数学竞赛活动受到了广大中学师生的普遍欢迎和社会各界的承认以及国家教育行政部门的肯定、支持，已成为中学数学教育活动的一个有机组成部分．数学竞赛活动激发了广大学生的学习热情，促进了学生和教师素质的提高．从某种意义上似乎可以这样讲：衡量一个优秀的中学生的标准，除了他在校考试的各科成绩外，还要看他是否能在数学竞赛中取得优胜．目前，高一级学校在选拔人才时已充分注意到这一点．由于数学竞赛所涉及的内容，比之中学数学教材包含了更为广泛的专门各识，需要更为灵活的思维和技巧，这就对中学生和中学数学教师，以及高等师范院校数学专业的学生——未来的中学数学教师提出了更高的要求：必须系统地学习竞赛数学知识．本教程正是为适应这一需要而编写的．

一、奥林匹克数学教程的研究内容

前面已经提到，数学竞赛所涉及的内容，已经不是中学数学教材的重复，它包含了更为广泛的专门知识和技巧，采用了

大量现代数学中的思想方法.近年来国外有人提出"奥林匹克数学"(即竞赛数学)这一名称,正是为了强调它作为一门专门学科的特殊性.

本教程研究的是参加国内、国际数学竞赛所需要的基本知识和技巧,根据国内外高中数学竞赛所涉及的知识内容和中国数学会普委会在1992年重庆会议上通过的高中数学竞赛大纲编写的.内容包括初等几何、初等数论、多项式、不等式、组合数学、数列、函数方程、解析几何以及在数学竞赛中常用的一些解题思维方法选讲.

数学是锻炼思维的体操,奥林匹克数学更是如此.数学竞赛的试题往往并不要求学生具有高深的数学知识,但要求学生具有敏捷的反应,灵活的思维,创造性解决问题的才智.一些题目,看似很难,但一旦抓住要害,就能出奇制胜.似乎可以这样说:灵活的、创造性的思维才是奥林匹克数学的灵魂.

二、国际国内数学奥林匹克概况

把数学竞赛与体育竞赛相提并论,并与数学科学的发源地——古希腊联系起来,把数学竞赛命名为"数学奥林匹克"(Mathematical Olympiad)是前苏联在本世纪30年代首先提出来的.而数学竞赛的历史,可以追溯到16世纪初期,由学者们提出一些有意义的题目,通过数学家们公开"竞赛"的做法,推动数学的发展.其中最有名的一次可以认为是1535年由意大利学者菲奥(Fior)与塔塔利亚(Tartaglia)在米兰大教堂进行的关于解三次方程的公开比赛.但是,象今天这样为激发学生的学习兴趣,早期发现人才,由中学生们自愿参加的数学竞赛,则是从匈牙利开始的.

1. 匈牙利的数学竞赛开始于1894年,对匈牙利数学的发

展起过很重要的作用.能够说明问题的一点是，在历届竞赛的优胜者中，包括了为数不少的世界著名学者.

匈牙利 MO(以下本书将各类数学竞赛都简记为 MO)每年 10 月举行，每次竞赛共 3 个试题，限在 4 小时完成，允许使用任何参考书. 匈牙利 MO 是世界上较有影响的数学竞赛之一.

2. 前苏联是世界上开展数学竞赛活动比较早和最广泛的国家之一. 在一个比较长的时期内也是国际数学奥林匹克中实力最强的国家(在已举办的 33 届国际数学奥林匹克中总分 14 次居第一). 莫斯科 MO 是世界上最有影响的数学竞赛之一. 前苏联较有影响的数学竞赛除莫斯科 MO(始于 1935 年)外，还有列宁格勒 MO(始于 1934 年)和基辅 MO(始于 1935 年)；到 1962 年，开始举办全苏 MO.

莫斯科 MO 每试 5 题，限 4 小时完成，在七至十年级间分年级进行.

3. 1956 年，在罗马尼亚的罗曼(Roman)教授的倡仪下，东欧国家正式确定了举办国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad，简记为 IMO)的计划.

第一届 IMO 于 1959 年 7 月在罗马尼亚的布拉索市举办，东欧 7 个国家参加了第 1 届 IMO. IMO 每年 7 月举行，到 1992 年已举办 33 届(1980 年因故未举行). 目前参赛的国家和地区已达 60 多个，数学竞赛已得到了全世界的承认. 1980 年，国际数学教育委员会(ICME)成立了 IMO 分委员会，来协调 IMO 活动.

IMO 是世界公认的最高水平的数学竞赛. 每届竞赛分两场进行，每场 4 小时 30 分钟，两场竞赛共 6 个试题 (第 2、4

届为 7 个题)，每题 7 分. 从第 1 届到第 33 届共 200 道竞赛试题，加上历届各国提供的预选题，以及包括中国在内的世界上几个在 IMO 中有影响的“数学大国”的 MO 试题，恐怕这些试题最能说明什么是“奥林匹克数学”. 所有这些试题的难度都不重在了解选手掌握数学知识的多少，而重在选手是否具有创造性的思维能力和数学的机智.

每年，各参赛国派出 6 名在校中学生组成代表队参加 IMO 的竞赛. 竞赛分设一、二、三等(金、银、铜牌)奖，对个别试题给出特别漂亮或有创新解答的选手，还授予特别奖. 从 1988 年起，根据香港代表的建议，又增设了一项荣誉奖，奖给那些未获前述各项奖但至少有一个题得满分的选手. IMO 的重大意义之一是促进了创造性的思维训练，在很大程度上激发了青年学生的数学才能，培养造就了一批新一代的研究工作者.

4. 美国的数学竞赛起步较晚，但美国数学奥林匹克(USAMO)也是世界上影响较大的数学竞赛之一. 美国于 1974 年始加入第 16 届 IMO，是年总分即列第 2 名，并一直跻身于“五强”之列(仅第 29 届 IMO 中总分第 6 名).

USAMO 始于 1972 年，每年一届，每次共 5 个试题，3 小时 30 钟完成.

如果算上普特南(Putnam)数学竞赛，则美国的数学竞赛也可算历史悠久了. PMO 始于 1938 年，不过它是在美国大学低年级举行的数学竞赛，试题富独创性，在国际上有较大影响，只是多数试题超出了我们这里所说的奥林匹克数学的范围，已不适合于中学生.

此外，在美国还有美国中学数学竞赛(AHSME)，始于

1950 年，已成为一种国际性的竞赛．美国数学邀请赛(AIME)，始于 1983 年，也是一种国际性的竞赛．

5．中国的数学竞赛始于 1956 年，在北京、上海等几个大城市举行．“文化大革命”后，于 1978 年重新在全国各地举行，最后形成“全国高中数学联赛”(此外还有“全国初中数学联赛”)．全国高中数学联赛每年 10 月举行，分一试、二试各 2 小时，一试选择题、填空题各 6 道，解答题 3 道，共 120 分．二试解答题 3 道，共 105 分，全国联赛的优胜者 70 余名参加次年 1 月由中国数学会普委会、奥委会举办的全国数学冬令营(CMO)．在冬令营中经过两个上午的角逐，选拔出 20 余名选手组成国家集训队．由中国数学会奥委会的教练组负责为期约一个月的强化训练，最后经过两个上午的选拔考试，由教练组投票确定 6 名队员组成国家代表队，准备参加 7 月举行的 IMO．

冬令营考试仿 IMO，集训队选拔考试难度不亚于 IMO，而份量较 IMO 每天多 1 道题．

1985 年，我国派出两名选手参加第 26 届 IMO，以了解情况，取得经验．从第 27 届 IMO 开始，我国正式派出 6 名选手的代表队参赛．几年来中国代表队在 IMO 中成绩突出，很快进入“数学大国”之列，历届团体总分名次及获奖情况如下：

届次	时间(年)	地点	名次	金奖	银奖	铜奖
26	1985	芬兰				1
27	1986	波兰	4	3	1	1
28	1987	古巴	8	2	2	2
29	1988	澳大利亚	2	2	4	
30	1989	联邦德国	1	4	2	

31	1990	中国	1	5	1
32	1991	瑞典	2	4	2
33	1992	俄罗斯	1	6	
34	1993	土耳其	1	6	

三、略谈数学竞赛试题的特点

奥林匹克数学作为一门专门的学科，其试题常有难度大、题型新、涉及面广、解法独特、灵活性强等特点．许多试题有其现代数学背景，但中学生可以开展的思路却很多．一些题目要求的知识比较简单，但对思维的灵活性要求较高．有的题目，叙述本身就很复杂，这就需要将题目变形，分化互解，找到问题的突破口．前面说过，奥林匹克数学的精髓是灵活的、创造性的思维．那些用常规办法解决的问题（例如用公式求规则几何体体积）不属于奥林匹克数学．因此在学习中必须注重创造性的思维训练，提高分析解决问题的能力．著名数学教育家波利亚（Polya）说："任何学问都包括知识和能力这两个方面，假如你真正具有数学工作的经验的话，那么你会毫不迟疑地说，在数学里，能力比起单单具有一些知识来，要重要得多．"因此，可以这样说，奥林匹克数学是活的数学，竞赛试题的一个重要特点是对创造性思维的要求，"出奇"才能制胜！

例 1　10000 人举行乒乓球淘汰赛，以确定冠军，方法是：第一轮比赛将 10000 人分成 5000 对，每对选手赛一场，决出胜负，负者被淘汰，5000 名胜者再分为 2500 对进行第二轮比赛，……，当某一轮比赛之后剩下的选手人数是奇数时，让其中一名选手轮空等待下一轮，以此类推，问最后决出冠军时共比赛了多少场？

这样的问题照"常规"也可以算出结果，但十分繁琐，这

不是奥林匹克数学的路子，换一个角度考虑问题：每比赛一场，淘汰一名选手，决出冠军须淘汰 9999 人，结果已清楚.

例 2　$a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{a_n + (2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})a_n}$，求 a_{1993}.

对递归数列的问题，常规的方法是利用特征方程求通项公式，再求 a_{1993}，计算量嫌大. 由递推关系联想到和角的正切函数公式，并注意到 $\mathrm{tg}15° = 2-\sqrt{3}$，$a_n \in R$，故可令 $\mathrm{tg}\alpha_n = a_n$，得　$\mathrm{tg}\alpha_{n+1} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha_n + \mathrm{tg}15°}{1-\mathrm{tg}\alpha_n \cdot \mathrm{tg}15°} = \mathrm{tg}(\alpha_n + 15°)$，
可以取 $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 15°$，

$$\therefore \quad \alpha_{1993} = \alpha_1 + 1992 \cdot 15°,$$

$$a_{1993} = \mathrm{tg}\alpha_{1993} = \mathrm{tg}\alpha_1 = 2.$$

例 3　求方程组

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x, \end{cases} \tag{i}$$

的实数解.

解三元三次方程组，先应当考虑降次和消元，但(i)式降次、消元殊为不易，不过易知 x^2、y^2、z^2 均不为 1，(i)式可变形为

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2}, \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases} \tag{ii}$$

可见例 3 与例 2 有异曲同工之妙，令实数 $x = \mathrm{tg}\alpha$，则 y

$= \operatorname{tg} 2\alpha, z = \operatorname{tg} 4\alpha, x = \operatorname{tg} 8\alpha,$

$$\therefore \quad 8\alpha = k\pi + \alpha (k \in Z).$$

$$\therefore \quad x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{7}$$

原方程组的实数解是

$$(\operatorname{tg} \frac{k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{4k\pi}{7}), k = 0, 1, \cdots, 6.$$

由上两例可知，在解决 MO 问题时，要善于抓住要害、联想、转化.

例 4 计算求值：

$$\frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)(34^4 + 324)(46^4 + 324)(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)(28^4 + 324)(40^4 + 324)(52^4 + 324)}.$$

这似乎不应当是奥林匹克数学问题，因为只要小学生明白了 10^4、22^4、…的意义之后就可以按步就班地算出结果. 这样的“家路子”也的确不是奥林匹克数学. 从原式结构上的规律启发我们通过“一般”去把握“特殊”：

$$\because \quad x^4 + 324 = (x^2 + 18)^2 - 36x^2$$
$$= [(x+3)^2 + 9][(x-3)^2 + 9].$$

$$\therefore \quad 原式 = \frac{(13^2 + 9)(7^2 + 9) \cdot (25^2 + 9)(19^2 + 9)}{(7^2 + 9)(1^2 + 9) \cdot (19^2 + 9)(13^2 + 9)}$$
$$\cdot \frac{(37^2 + 9)(31^2 + 9) \cdot (49^2 + 9)(43^2 + 9)}{(31^2 + 9)(25^2 + 9) \cdot (43^2 + 9)(37^2 + 9)}$$
$$\cdot \frac{(61^2 + 9)(55^2 + 9)}{(55^2 + 9)(49^2 + 9)} = \frac{61^2 + 9}{1^2 + 9} = 373.$$

再看一个简单的例子.

例 5 以 1 为分子的分数叫做“单位分数”，试把 1 表示成 10 个不小于 $\frac{1}{100}$ 的单位分数的和.

这样的问题对数学知识的要求也就是小学分数的加法，但用“凑数”的方法去试验显然又决非上策. 注意到两个“相邻”的单位分数的差还是一个单位分数：

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

而“借债还钱”，$1=1-x+x$ 永远是成立的，于是有

$$\begin{aligned}1&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\\&=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})+\frac{1}{10}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}.\end{aligned}$$

例 6　$a_i>0(i=1、2、\cdots、n)$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=17$，

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(2i-1)^2+a_i^2}\right\}\in N.$$

求自然数 n 的值.

分析：此题看似复杂，无从下手，但 a_i 是正数，$\sqrt{(2i-1)^2+a_i^2}$ 使人联想到勾股定理，于是构造出一个模型：以 $2i-1$、a_i 为直角边作直角三角形，将这些三角形的斜边“相加”(首尾相连)，如图 1 所示.

显然，$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(2i-1)^2+a_i^2}\geqslant|AB|$，且当 $a_1:a_2:\cdots:a_n=1:3:\cdots:(2n-1)$ 时不等式取“$=$”号，此时在 Rt$\triangle ABC$ 中，$|AC|=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，$|BC|=\sum_{i=1}^{n}a_i=17$.

$$\therefore \quad n^4 + 17^2 = s^2, s = |AB| \in N.$$

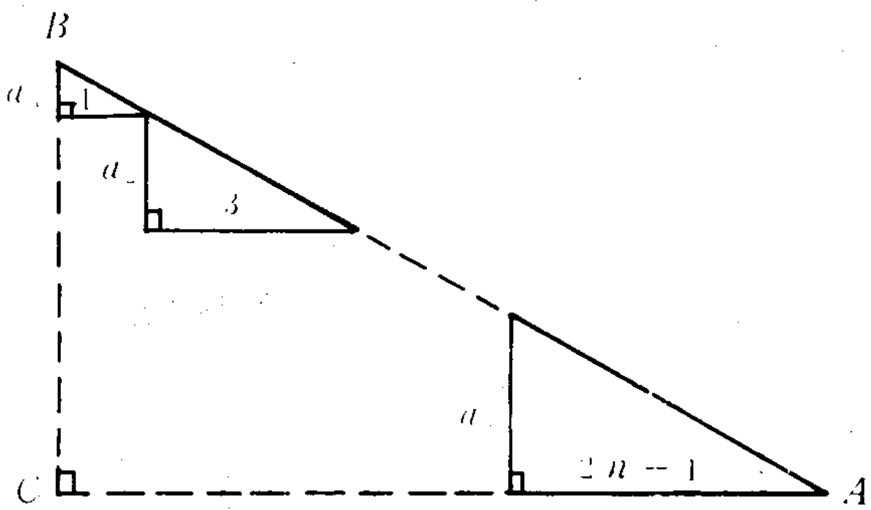


图 1

$$(s + n^2)(s - n^2) = 17^2,$$

$\because$ 17 是素数,

$\therefore \quad s - n^2 = 1, s + n^2 = 17^2,$

$\therefore \quad n = 12.$

此题的解决,没有纠缠在对最小值的研究上,而是另辟蹊径,很快找到突破口,这里的思维方法,就有了一定程度的创造性.

奥林匹克数学从某种意义上说来是一门解题的科学(其实,数学生命的源泉是问题,这一观点已为数学界所公认.数学正是在不断地提出问题、解决问题中得到发展的).熟悉了解 MO 试题的特点,有利于更快地提高解决问题的能力.

四、MO 试题命题的主要途径

命题和解题,是矛盾的两个方面,是对立的统一.如果参加数学奥林匹克活动的学生,各级教练员,中学数学教师,能够循着命题的途径,跟综命题者的思路,在解题时充分利用类