

桩基动力学

ZHUANGJI

雷林源 著

DONGLIXUE

冶金工业出版社



桩基动力学

雷林源 著

北 京
冶金工业出版社
2000

图书在版编目(CIP)数据

桩基动力学/雷林源著. —北京:冶金工业出版社,
2000.8

ISBN 7-5024-2562-4

I. 桩… II. 雷… III. 桩基础-动力学 IV. TU473

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000)第 14936 号

出版人 卿启云(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

责任编辑 王之光 封面设计 王耀忠 责任校对 侯 瑁 责任印制 李玉山

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2000 年 8 月第 1 版,2000 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16;16 印张;385 千字;247 页;1-2000 册

29.80 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

《杭基動力學》之空損動力試杭技
術建立了較嚴格的反演理論體系，
並引入了灰色系統和神經網絡等非線
性理論成果，無疑它將在這一領域
發揮重要的指導和推進作用。

中國地球物理學會理事長
中國科學院院士

尹文龍
2000年5月

目 录

绪 论	1
第一章 动力测桩的工程力学基础	3
第一节 应力分析的基本理论和概念	3
第二节 位移、变形和应变	6
第三节 应力与应变的关系——胡克定律	7
第四节 杆件的刚度与单位刚度	7
第五节 泊松比与广义胡克定律	8
第六节 应力集中概念	10
第七节 应变能概念	11
第八节 混凝土的物理力学性质	14
第二章 动力测桩的土力学基础	19
第一节 地基土的分类、压缩性及压性参数	19
第二节 土的静载压强 p 与沉降量 S 的关系曲线	22
第三节 土的抗剪压强及内摩擦角	24
第四节 土的极限强度与滑移变形初步	25
第三章 振动与波动理论基础	29
第一节 简谐振动	29
第二节 简谐振动的速度、加速度及能量	31
第三节 阻尼简谐振动	32
第四节 弹性波的波动方程与波动函数	35
第五节 弹性波的波动特点	37
第六节 弹性波的能量	39
第七节 弹性波的反射与透射	40
第四章 数据处理的基础理论与方法	42
第一节 傅里叶变换及其性质	42
第二节 脉冲函数与梳状函数	46
第三节 连续信号的离散化与采样定理	49
第四节 有限离散傅里叶变换及其性质	52
第五节 泄漏效应与窗函数	55

第六节	频谱分析的最大熵法	59
第七节	谱分析的 MEM 与 FFT 算法比较	63
第五章	桩的静载荷试验法和高应变动力检测法原理	68
第一节	桩的分类	68
第二节	桩的静载荷试验方法简介	69
第三节	静载荷试验的 $Q-S$ 曲线特性分析	72
第四节	打桩公式法的基本原理	73
第五节	打桩波动方程差分法的基本原理	81
第六节	CASE 法的基本原理	87
第七节	CASE 法的另一种演绎方法	95
第六章	低应变动力测桩法分类及其观测系统	98
第一节	低应变动力测桩法的分类	98
第二节	瞬态动测的观测系统及其基本原理	100
第三节	稳态动测的观测系统及其基本原理	104
第七章	低应变动力测桩的正演理论(I)——“质量-弹簧-阻尼”系统	107
第一节	概述	107
第二节	完整端承桩瞬态动测响应的数学模型	107
第三节	完整浮承桩瞬态动测响应的数学模型	114
第四节	完整端承桩稳态动测响应的数学模型	116
第五节	完整浮承桩稳态动测响应的数学模型	119
第六节	小结	120
第八章	低应变动力测桩的正演理论(II)——分布参数系统	122
第一节	完整端承桩瞬态动测响应的数学模型	122
第二节	缺陷端承桩瞬态动测响应的数学模型	129
第三节	缺陷端承桩瞬态动测响应的反射波法数学模型	136
第四节	简单变颈端承桩瞬态动测响应的数学模型	142
第五节	完整浮承桩瞬态动测响应的数学模型	143
第六节	有间断面和变颈的浮承桩瞬态动测响应的数学模型	148
第九章	稳态动测导纳响应的正演理论	153
第一节	完整端承桩动测导纳响应的数学模型	153
第二节	缺陷端承桩动测导纳响应的数学模型	157
第三节	完整浮承桩动测导纳响应的数学模型	162
第四节	缺陷浮承桩动测导纳响应的数学模型	166
第五节	关于瞬态导纳若干问题的讨论	169

第十章 低应变动力测桩的反演问题和反演方法..... 173

 第一节 动测响应的基本特征..... 173

 第二节 现场技术和振动响应的预处理问题..... 181

 第三节 粘滞阻尼系数 β 的反演方法 187

 第四节 桩长 L 或应力波波速 C 的反演方法 189

 第五节 缺陷桩中缺陷的识别及其位置的反演方法..... 197

 第六节 完整桩多参数的最优化反演方法..... 204

 第七节 桩的动弹性模量 E_d 的反演和混凝土质量的判定方法 210

 第八节 完整桩的单位动刚度 K_d 的反演方法 212

 第九节 关于实测导纳几何平均值应用问题的讨论..... 216

 第十节 完整桩极限承载力的“伪屈服载荷”估计方法..... 217

 第十一节 完整桩极限承载力的灰色系统预测方法..... 230

 第十二节 完整桩轴向极限承载力的人工神经网络预测法..... 238

参考文献..... 246

绪 论

一、桩基工程概述

建筑物的全部荷载是加于其下部结构——基础结构,并通过基础结构将荷载传递给地基(土层或岩层)来承受的。因此,地基和基础结构是建筑物的根基,直接关系到建筑物的安危。实践证明,建筑物事故的发生,多数是由于地基或基础结构质量问题而引起的。因此,基础结构工程尤其深基础结构工程的造价往往要占整个建筑物总造价的百分之几甚至几十,显见基础结构工程的重要性。

基础结构一般分为浅基础与深基础两类。当浅层土质松软,不能满足建筑物对地基的强度和变形方面的要求时,就要利用深部坚实土层或岩层作为地基来建造深基础结构工程。深基础结构主要有桩基、墩基、沉井和连续墙等几种形式,其中桩基结构是尤为常用的形式。这是因为采用桩基结构不仅具有抗震性能好,成本低,而且有利于实现基础结构工程的机械化和工业化,故而是一种颇有发展前景的深基础形式。

随着桩基础结构形式的日益广泛采用,桩基工程的施工质量就显得十分重要,由于桩基工程系地下隐蔽工程,加之地下情况复杂多变,桩基工程的施工质量往往不易控制。据国内的粗略统计,桩基工程的施工质量的完好率平均为 80% 左右,加上桩基工程施工队伍的人员素质不稳定,导致桩基质量的完好率波动幅度较大,所以加强桩基质量监督和检测工作已成为确保建筑物安全使用的重大措施。

二、动力测桩的简史和现状

关于桩基的检测,历来沿用静载荷验桩法,这种方法是通过测定对桩顶施加的静载荷值与桩顶沉降量的关系(即 $Q-S$ 曲线)来确定单桩的承载能力的。这种方法无疑是既直观又可靠的,但要测出完整的 $Q-S$ 曲线,不仅要花费很长的时间和耗资相当大,而且为了获得准确的极限承载力,必须进行破坏性验桩法,所以验桩率极低,一般仅限于 1%~3%,这样就难以言其代表性了。可见这不是一种最好的桩基验桩法。因此,研究和应用动力测桩法来弥补以至取代静载荷验桩法是十分必要和具有重要意义的。

较早的动力测桩法是由 A. 希利(Hiley)于 1930 年研究成功的打桩公式法,它是通过建立锤击(动载荷)与桩贯入度的关系式来确定桩的承载能力的。稍后由 D. V. 艾萨克(Isaace)于 1932 年研究提出另一种解应力波波动方程的动力测桩法,由于当时条件所限,未能用于实际,后来由 E. A. 史密斯(Smith)做了进一步的研究,并将这种方法付诸实际应用,并于 1960 年发表了他的研究成果。此后在美国、瑞典、荷兰、丹麦和法国等相继开展了关于这一动力测桩法的观测系统与计算软件的研制和应用,如瑞典的 PID 型打桩分析仪,美国的 GS、PAK 和 PIT 打桩分析仪和测桩仪,荷兰的 FPDS-4 型桩基诊断系统等。而计算软件较好的为美国的 CAPWAP 和荷兰的 TNOWAVE 等系统。20 世纪 70 年代我国也提出和研究成功一种“锤击贯入法”,通过获得锤击力与桩贯入度的关系($Q_d-\sum S_d$)曲线来确定桩的承载力,取得了良好的效果。

以上这些方法多属高应变动力测桩范畴,它们适用于打入的预制桩,并须在整个打桩过程中完成其观测和估算工作。所以,测桩的周期较长,设备也较笨重和昂贵,同时对施工场地有一定要求。

针对静载荷验桩法和高应变动力测桩法的某些局限性,研究和发展低应变动力测桩法是十分必要的。20 世纪 60 年代中后期,法国建筑与公共工程研究中心(CEBTP)开始研究“机械阻抗法”,并在法、英等国付诸实际应用。A. G. 戴维斯(Davis)在这一方面做了大量试验和研究。20 世纪 70 年代,J. 斯坦巴克(Steinbach)等提出了应力波传播法,并研究用于实际。

20 世纪 70 年代末至 80 年代期间,各种激振方式的低应变动力测桩法及其观测系统在我国得到了长足的发展、研究和研制,并用于实践。如瞬态激振的“动力参数法”和“水电效应法”等;稳态激振的“共振法”或机械阻抗法。这些低应变动力测桩法在我国桩基检测中已有广泛应用,并取得了较好的效果。

在低应变观测系统的研制方面,我国在近 10 多年时间内就有许多种动测仪相继问世,并在测桩实践中得到广泛应用。

我国从事低应变动力测桩的人员发展迅速,形成了一支庞大的技术队伍,分属十几个部委系统和单位。此外,科学院、高等学校以及其他研究单位还有一大批相应的科技人员,这支技术队伍和相应的科技工作者不仅对发展我国低应变动力测桩事业做出了有益的贡献,而且对推动和发展动力测桩的科技工作做出过显著成绩和贡献。

低应变动力测桩技术具有周期短、耗资少以及对桩身质量检测效果明显等优点,所以日益受到土木工程界的关注和欢迎,它具有的实际意义和前景是不言而喻的。目前低应变动力测桩技术还有待进一步深入研究和完善,尤其是应该加强理论研究环节,逐步减少或不依赖于从动、静对比中寻求修正系数、对比系数及采用经验系数的做法。因为这些系数不仅仍然完全依赖于静载荷验桩法,而且还会因桩基类型不同而异、因地基条件不同而异、因混凝土标号不同而异及人员经验不同而异等因素的影响,这样势必使提高低应变动力测桩的有效性、可信度和使之成为一门独立的技术领域而带来极大的局限性。

三、低应变动力测桩的科学属性

低应变动力测桩的基本原理是采用动力激振使桩引起弹性振动,通过测定桩的振动响应来估计和推断桩的几何参数、力学参数及病态情况,据此把它归属于工程结构动力学范畴是较适宜的。但是就低应变动力测桩所要解决的工程问题而言,它又是一门涉及多个学科的技术。这些学科大抵是振动与波动力学、材料力学、弹性与塑性力学以及岩土力学,此外它还涉及应用数学领域中的数学物理方程、调和分析与数据处理等分支。只有具备和掌握以上学科的基本理论和知识,才能对低应变动力测桩技术有更好的了解、应用和深入研究的能力。

近年来,动力测桩在理论、技术和方法方面有较快的发展,正在逐步形成一门独立的新学科——桩基动力学。

第一章 动力测桩的工程力学基础

本章内容仅介绍与动力测桩技术有关的工程力学中的一些基本理论、基本概念和基本知识。

第一节 应力分析的基本理论和概念

一、载荷的分类

对受载构件而言,外加载荷一般可分为静载荷与动载荷两类。

静载荷(static load)是一种缓慢加到构件上的载荷,在静载荷作用下,构件各部分处于静力平衡状态。进行静载荷验桩时,对桩施加的载荷就属于这类载荷。

动载荷(motive load)是一种能引起构件各部分产生加速度的载荷。这种载荷又可分为冲击载荷(impact load)和交变载荷(altermating load)。在低应变的瞬态动力测桩中,锤击或脉冲激振方式就属于冲击载荷,而在低应变的稳态动力测桩中,如机械阻抗或共振法中所采用的激振力就属于交变载荷。

二、内力与应力

所谓内力(internal force)是指构件中一部分对另一部分作用的力。实际上任何构件不受外力作用时,其中已存在内力,正是这种内力维持着构件存在形态,这种内力称内聚力(cohesive force)。当构件受外力作用时,其形状就会发生改变,相应内力也发生改变,这种内力的改变将随外力增大而增大。对于各种材料的构件而言,这种内力的增加均有一定极限,达到极限时,构件将被破坏,所以不同材料具有不同的强度。往后我们所说的内力,就是指构件受外力作用时引起的内力改变部分,而不包括内聚力本身。

要了解某种材料杆件的强度问题,不仅要知道所受外力,还需要确定其内力,但仅确定了内力是不够的,因内力只表示了某个截面受力大小的总效应,如有两根材料相同、截面不同的等长杆件,受到同样大小的外力作用,其内力必然相同,但截面小的杆件容易被压坏,而截面大的杆件则不容易压坏。因此需要了解截面上内力的分布情况。这就需要借助应力的概念来表示截面上各点处受力的大小。如图 1-1a 所示的杆件,若设在空间外力系 F_1 、 F_2 和 F_3 的作用下处于平衡状态,为研究截面 A 上 M 点处的内力,将截面 A 右边部分去掉,如图 1-1b 所示。这样,可围绕 M 点取一微小面积 ΔA ,并令在 ΔA 上分布内力的合力为 ΔP 。那么比值

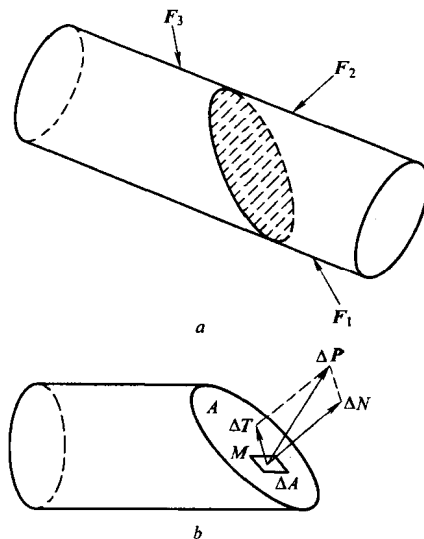


图 1-1 外力、内力与应力

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (1-1)$$

为截面 ΔA 上的平均应力。

如果要考虑 M 点处的应力,则可将 1-1 式取如下极限形式,即

$$p(M) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{dP}{dA} \quad (1-2)$$

为应用方便,通常又将 p 分解成两个分量,一个是截面 ΔA 的法向分量 σ ,称为正应力(normal stress);另一个是截面 ΔA 的切向分量 τ ,称为剪应力(shearing stress),如图 1-1b 所示。同样,若将合内力 ΔP 分解成相应的法向分量 ΔN 和切向分量 ΔT ,则有

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} \quad (1-3)$$

及

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} \quad (1-4)$$

显然 M 点处应力、正应力和切应力三者的模满足如下关系

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (1-5)$$

将总应力 p 用两个分应力 σ 和 τ 来表示是有重要含义的,即正应力 σ 代表杆件材料受拉或受压的程度,而剪(切)应力 τ 代表杆件材料沿截面受剪切作用的程度。

正应力又可分为拉应力和压应力。如果正应力的方向与 M 点处截面 ΔA 的外法线方向一致时称拉应力,反之,则称压应力。

应力必须通过截面才能表达内力的作用,它是指单位面积上作用的内力值,单位为帕(Pa)。

杆件受外力作用处于平衡状态时,其内力与外力大小相等、方向相反,外力与应力的关系是

$$\text{外力} = \text{应力} \times \text{面积}$$

三、求轴向力和正应力的截面法

当考虑一根柱形杆件沿轴向承载受压情况时,如果它处于平衡状态,则其内力也是沿杆件轴向作用的,这种内力称轴向力。轴向力的大小一般运用截面法才能正确求得。截面法的步骤是:

(1)选取假想截面。首先应在需要求取轴向力的部位选一假想截面,沿此截面将杆件分隔成两部分。

(2)建立坐标系。在截开的截面上建立坐标系,若仅研究杆件的轴向力,可建立一维坐标系,即令 x 轴沿截面的外法线方向,亦即杆件的轴向方向。

(3)根据平衡方程计算轴向力的大小和方向。若某柱形杆件在沿轴向的外力系 F_1 、 F_2 、 $\dots F_N$ 的作用下处于平衡状态,这时必有一轴向内力 P 存在,并满足平衡方程

$$\sum_{i=1}^N F_i + P = 0 \quad (1-6)$$

于是可求得轴向力

$$P = - \sum_{i=1}^N F_i \quad (1-7)$$

为了解截面法的具体计算方法,现举例说明。

设有 3 根截面面积均为 A 的柱形杆件,结构和受力情况如图 1-2a 所示。试求各根杆件中的内力与正应力。并确定是压应力或是拉应力(图中 A、B 和 C 为 3 块钢性板)。

解:(1)在第一杆件中任取一截面 1—1',将此截面以下部分去掉,设 x 坐标的方向与截面外法线方向一致,如图 1-2b 所示。根据 1-7 式轴向力为

$$P_1 = -F$$

于是作用于此截面的正应力为

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A} = -\frac{F}{A}$$

可知此正应力为压应力。

(2)在第 2 杆件中取截面 2—2',将此截面以下部分去掉,坐标设置与上相同,如图 1-2c 所示。根据 1-7 式轴向力为

$$P_2 = -3F$$

于是作用于此截面的正应力为

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A} = -\frac{3F}{A} = 3\sigma_1$$

可知此正应力亦为压应力。

(3)在第 3 杆件中取截面 3—3',将此截面以下部分去掉,坐标设置与上相同,如图 1-2d 所示。根据 1-7 式有

$$P_3 = 3F - 2 \times 1.5F = 0$$

于是

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{A} = 0$$

可知其正应力为 0,也就是说第 3 杆件既不受压也不受拉的作用。

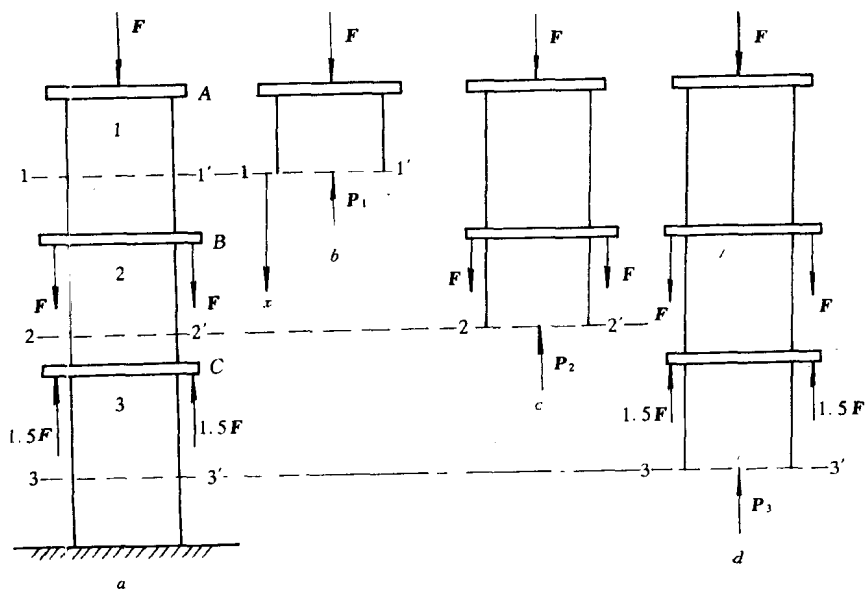


图 1-2 求轴向力和应力的截面法

a—3 根柱形杆件的结构和受力情况;b—第一杆件的截面;c—第二杆件的截面;d—第三杆件的截面

第二节 位移、变形和应变

任何构件在外力作用下,其内任一质点、质线或质面(除约束边界外)都会发生位置的改变,称之为位移(displacement)。若位移是沿直线方向发生的,称之为线位移。如图 1-3a 所示,当一杆件在轴向加载时,顶端 A 点沿轴向移至 A' 点,其位移就是线位移。如果质线或质面的位移不是沿直线方向发生,而在位移时有方向的改变,则称之为角位移,如图 1-3b 所示。当一杆件受到水平力的作用时,端线或端面 AB 移至 $A'B'$ 处,这时既有线位移,也有角位移,其中 $\Delta\varphi$ 就是角位移量。

若构件内各质点的线位移是相等的,也就是说质点相互之间不存在相对位移,这种位移为刚体位移,这时,构件的形状大小不会发生变化,假若构件各质点在发生位移的同时,质点间的相对位置也发生变化,这时构件的大小和形状也发生了变化。这种变化就称为变形(deformation)。

试验证明,用相同材料制成的两根杆件,当它们的横截面相同而长度不同时,即使轴向加载相同,它们发生的压缩变形量 ΔL 也是不相等的,长的一根其变形量 ΔL 大,短的一根其变形量 ΔL 则小。可见仅仅凭它们的绝对压缩变形量 ΔL 是不能判别两者的抗压能力的。因此必须消除原有长度对压缩变形大小的影响。这样就应考虑单位长度的变形量,即相对变形量

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L} \quad (1-8)$$

我们称 $\bar{\varepsilon}$ 为平均正应变(average normal strain),亦可称平均轴向应变(average axial strain)。

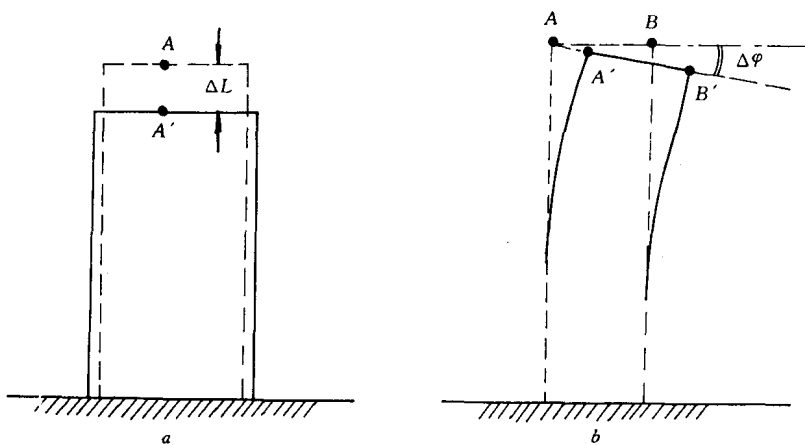


图 1-3 线位移和角位移

a—线位移;b—角位移

若杆件材料沿轴向不均匀时,其中任一点的实际轴向应变与平均轴向应变可能有很大的差别,这时就不能采用平均轴向应变,而要研究杆件中每个微分段的轴向应变,即令 $L = dx$, $\Delta L = \Delta(dx) = du$, 那么,

$$\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (1-9)$$

则称 ϵ 为 dx 所在点处的轴向应变。由 1-8 或 1-9 式可知,若 ΔL 或 du 为正,即为拉伸情况时,则 $\bar{\epsilon}$ 或 ϵ 亦为正,我们称之为拉应变,反之,若 ΔL 或 du 为负,亦即 $\bar{\epsilon}$ 或 ϵ 为负,就称为压应变。同时由 1-8 或 1-9 式可知,轴向应变是一个无量纲的量。

第三节 应力与应变的关系——胡克定律

对均质杆件的压缩(或拉伸)试验证明,当杆件内正应力 σ 未达到材料弹性限度之前,杆的压缩变形量 ΔL 与轴向力 N 的大小成正比,而与杆的截面积 A 成反比,即

$$\Delta L \propto \frac{LN}{A}$$

若引入一比例系数,便可得到

$$\Delta L = \frac{LN}{EA} \quad (1-10)$$

式中,比例系数为 $1/E$, E 为杆件材料的杨氏模量或弹性模量(modulus of elasticity)。材料不同,其杨氏模量 E 的大小也不同。

对于均匀材料的杆件,由 1-10 式可得

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{EA} = \frac{\bar{\sigma}}{E}$$

于是

$$\bar{\sigma} = E\bar{\epsilon} \quad (1-11a)$$

同理,也可借助 1-9 式得到非均匀材料的类似关系式

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-11b)$$

试验证明,1-11 两式仅在材料的弹性变形范围内才成立。称 1-11 两式为弹性胡克定律。它代表材料在轴向应力状态下正应力与正应变的关系,是材料力学和弹性力学中最基本的关系式,故又称本构关系。

由 1-11b 式可知,对于不同材料的杆件在轴向荷载作用下引起的正应力 σ 相同时,杆件材料杨氏模量 E 大者,引起的正应变 ϵ 就小,而 E 小者,其正应变 ϵ 则大。可见,材料的杨氏模量代表该材料抵抗变形的能力。

由于正应变 ϵ 是无量纲的,所以杨氏模量 E 的量纲与正应力 σ 的量纲相同,即为力/面积。

第四节 杆件的刚度与单位刚度

对于均匀材料的杆件已知有如下关系

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad (1-12)$$

由上式知,对于轴向力 N 相等的不同杆件,若 EA 大者,则引起的应变 ϵ 要小, EA 小者,则

引起的应变 ϵ 就大。可见 EA 代表杆件的抗压能力,故称 EA 为杆件的抗压刚度(compressive rigidity)。显然,杆件的刚度大小,不仅与材料的杨氏模量 E 有关,还与杆件的截面积 A 有关。

刚度的单位常取 N 或 kN 。

若令 $R=EA$,考虑到均匀材料杆件的轴向力 N 和杆件轴向荷载 P 是大小相等、方向相反,又因压缩应变 ϵ 为负,则由 1-12 式可得

$$P=R\epsilon \quad (1-13)$$

上式为均匀材料杆件在弹性应变限度内,刚度、应变与轴向荷载三者的关系式。

对于均匀材料杆件,有时也引入单位抗压刚度概念。由 1-13 式和 1-8 式可得

$$P=EA\epsilon=EA \frac{\Delta L}{L}=K_s \Delta L \quad (1-14)$$

式中, $K_s:=EA/L$ 为单位抗压刚度。1-14 式为均匀材料杆件在弹性变形限度内,单位刚度、变形量与轴向荷载三者的关系式。

单位刚度的单位常用 N/m 或 kN/m 。

这里需要提及的是:目前动力测桩界估计单桩“容许承载力”或“临界承载力”的方法,就是根据 1-14 式导出的。但值得指出的是:1-14 式仅仅在均匀材料杆件的弹性变形限度内方能成立,也就是说其中压缩变形量 ΔL 必须处在弹性变形范围内才能成立。

第五节 泊松比与广义胡克定律

试验证明,当杆件受轴向载荷作用引起压缩变形(或压应变)时,同时将产生横向(即径向)拉伸变形(或拉应变)。轴向压应变与径向拉应变的关系为

$$\epsilon_r = -\nu \epsilon_x \quad (1-15)$$

式中, ϵ_r 和 ϵ_x 分别为径向应变和轴向应变, ν 为泊松比(poisson ratio),显然它是一个无量纲的参数。泊松比 ν 仅仅对弹性限度内的应变才是一个常数。对于所有固体弹性材料,泊松比 ν 均小于 0.5。钢材的 ν 值约在 0.25~0.33 范围内,而混凝土的 ν 值约在 0.16~0.24 之间。一般脆性材料比柔性材料的 ν 值要小。

如果考虑三维空间的情况,假定杆件材料是均匀且各向同性的,这时应力与应变的关系就比单向应力状态下的关系要复杂一些。

先研究在各向正应力作用下沿 z 轴(即杆件轴向)的正应变 ϵ_z ,它由三部分组成,即

$$\epsilon_z = \epsilon'_z + \epsilon''_z + \epsilon'''_z \quad (1-16)$$

其中 ϵ'_z 是由 σ_z 的作用所引起的压应变

$$\epsilon'_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

ϵ''_z 是由 σ_x 的作用所引起的拉应变

$$\epsilon''_z = -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

ϵ'''_z 是由 σ_y 的作用所引起的拉应变

$$\epsilon'''_z = -\nu \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

将 ϵ'_x, ϵ'_y 和 ϵ'''_x 代入 1-16 式中可得

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1-17)$$

同理可以分别得到沿 x 轴和 y 轴方向的正应变

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1-18)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1-19)$$

若将 ϵ_x, ϵ_y 和 ϵ_z 3 个正应变相加可得

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \quad (1-20)$$

常将 3 个方向的正应变之和定义为体积正应变, 用 e 表示。而 3 个正应力之和则为应力第一不变量, 用 I_1 表示, 那么 1-20 式可改写为

$$e = \frac{1-2\nu}{E} I_1 \quad (1-21)$$

或者

$$I_1 = \frac{E}{1-2\nu} e \quad (1-22)$$

在三维空间应力状态下, 令

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

代表平均应力, 则 $I_1 = 3\bar{\sigma}$, 代入 1-21 式得

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E} \bar{\sigma} \quad (1-23)$$

或

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{3(1-2\nu)} e = Ke \quad (1-24)$$

其中

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1-25)$$

式中, K 为体积弹性模量。

上面导出的 1-17 式、1-18 式、1-19 式以及 1-23 式就是三维应力状态下各向同性弹性体的胡克定律, 即广义胡克定律。通过上面各式亦可给出用应变表示应力的类似形式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

若引入另外两个弹性常数

$$\left. \begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

式中, G 为剪切弹性模量, λ 为拉梅(Lame)常数。将 1-27 式代入 1-26 式可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda e \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

由 1-27 式显然也可得到

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

又若将 1-29 式代入 1-25 式得

$$K = \frac{2}{3}G + \lambda \quad (1-30)$$

上述 5 个弹性常数 E 、 G 、 ν 、 e 和 K 中仅有两个是独立的, 换句话说, 只要知道其中任意两个弹性常数, 便可以立即求得其他 3 个弹性常数。

第六节 应力集中概念

如果均匀材料杆件的截面积在某处突然发生变化(如混凝土桩基的桩颈在某处变小——缩颈), 那么在变小的截面上将引起正应力的增大。或者在杆件内部存在空洞, 那么在空洞的边界上, 与加载方向垂直的边界部分上将引起剪应力的增大。这种应力增大的现象就称为应力集中(stress concentration)。

我们将应力集中处的最大应力与平均应力之比, 称为应力集中系数(stress concentration factor)。设截面积为 A , 轴向受载为 P 的一根杆件, 若存在应力集中现象, 最大应力为 σ , 那么

$$\sigma = C\bar{\sigma} = C \frac{P}{A}$$

式中, C 为应力集中系数, 显然 C 总是大于 1 的。下面举例说明。

现有一均匀的圆柱形混凝土桩, 其截面直径为 D , 设在某处截面直径变小为 $d=0.6D$, 如图 1-4 所示, 试比较截面积变小部位与其他部位的正应力、正应变与刚度的大小。

假设桩顶轴向加载为 P , 材料杨氏模量为 E , 桩截面积变小处的正应力为

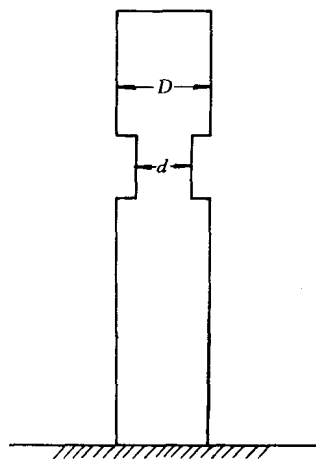


图 1-4 应力集中