初二年级 SHU XUE

（普及本修订版）

数　学
奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

首都师范大学出版社

shuxue
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

OLYMPIC

数学
奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

初二年级

（普及本修订版）

奥林匹克

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克教材:普及版/中国教育学会数学教育研究发展中心审定.—北京:首都师范大学出版社,1994.8(2000 修订)

(数学奥林匹克丛书)

初中二年级用

ISBN7-81039-391-X

Ⅰ.数… Ⅱ.中… Ⅲ.数学-竞赛-中学-教材 Ⅳ.G634.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1994)第 08399 号

作者 张 芃 张建业 熊 军

SHUXUE AOLINPIKE JIAOCAI

数学奥林匹克教材

(普及版)

初中二年级用

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)

北京国马印刷厂印刷 全国新华书店经销

2000 年 1 月第 2 版 2000 年 1 月第 1 次印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.75

字数 198 千 印数 00,001~15,000 册

定价 9.00 元

目　　录

一、因式分解

因式分解就是将一个整式化成几个整式的乘积的形式，其过程叫做分解因式. 其中，积中每一个整式叫做积的因式. 因式分解实质上就是整式乘法过程的逆过程.

因式分解在初中数学里占有很重要的地位，整式、分式的计算、化简、证明等经常要用到它，解方程、解不等式也经常要用到它. 因式分解问题中的题型变化多，技巧性也较强. 下面我们分别介绍因式分解中常用的方法.

（一）提公因式法

提公因式法实质上就是整式运算中乘法对加法分配律的逆应用，即：

$$a\times b+a\times c=a\times(b+c)$$

值得注意的是，上式中的字母 a、b、c 可以是一个数，一个式子，也可以是一个代数式. 在应用提公因式法时要注意提公因式不要有遗漏. 有时要经过将式子变形后才能发现其中的公因式. 以下是因式分解的一些例题.

例 1 $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

分析 从原式中看不出公因式，但通过对 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 适当分析，可以找到公因式.

解 $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(a+b)(bc+ac+c^2+ab)+abc$

$=(a+b)(bc+ac+ab)+ac^2+bc^2+abc$

$=(a+b)(bc+ac+ab)+c(ac+bc+ab)$

$=(ac+ab+bc)(a+b+c)$

例 2 $(2x+3y)^3-8x^3-27y^3$

解 原式 $=(2x)^3+3(2x)^2 3y+3(2x)(3y)^2+(3y)^3-8x^3-27y^3$

$$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3-8x^3-27y^3$$
$$=36x^2y+54xy^2=18xy(2x+3y)$$

例 3 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$

解 原式$=(ax)^2+2(ax)(by)+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2$
$$+c^2x^2+c^2y^2$$
$$=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2+c^2x^2+c^2y^2$$
$$=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2)$$

例 4 $a^{2m+3n}+a^{2m+3n-2}b^2-a^{2m+n}-a^{2m+n-2}b^2+a^{2m-2}b^2+a^{2m}$
$(m>1)$

解 $a^{2m+3n}+a^{2m+3n-2}b^2-a^{2m+n}-a^{2m+n-2}b^2+a^{2m-2}b^2+a^{2m}$
$$=a^{2m-2}(a^{3n+2}+a^{3n}b^2-a^{n+2}-a^nb^2+b^2+a^2)$$
$$=a^{2m-2}[(a^{3n+2}-a^{n+2}+a^2)+(a^{3n}b^2-a^nb^2+b^2)]$$
$$=a^{2m-2}[a^2(a^{3n}-a^n+1)+b^2(a^{3n}-a^n+1)]$$
$$=a^{2m-2}(a^2+b^2)(a^{3n}-a^n+1)$$

例 5 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a\cdot(a-b+c)(a+b-c)$
$+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$

分析 这个式子比较复杂，但认真观察还可以发现第一项和第二项有公因式可提，在这种情况下，可尝试先提出部分式子的公因式.

解 原式$=(c+a-b)(a+b-c)[(b+c-a)+a]+b(a+b-c)$
$$\cdot(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$=(c+a-b)(a+b-c)(b+c)+b(a+b-c)(-a+b$$
$$+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$=b\cdot(c+a-b)(a+b-c)+c(c+a-b)(a+b-c)+b$$
$$\cdot(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$=b\cdot(a+b-c)[(c+a-b)+(-a+b+c)]+c(a-b$$
$$+c)[(a+b-c)+(-a+b+c)]$$

$=2b\cdot c\cdot(a+b-c)+2bc(a-b+c)$

$=2bc(a+b-c+a-b+c)$

$=4abc$

（二）运用公式法

运用公式法分解因式就是逆用乘法公式来分解因式.常用的乘法公式有以下一些.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ①

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ②

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ③

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ④

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ⑤

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ ⑥

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ ⑦

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$ ⑧

恰当地运用乘法公式进行因式分解要注意两点，一是上述式子中的每一个字母都可以是一个代数式，另一点是要从整体上把握待分解的式子的结构，看它同哪一个乘法公式的结构比较接近就用那个乘法公式.

除上述的八个公式外，下面的几个式子也可以记下来帮助进行因式分解

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ⑨

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ ⑩

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ ⑪

$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$

（n 为正奇数） ⑫

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$ ⑬

公式⑨和公式⑩就是我们所熟悉的十字相乘法.

例 6 $1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$

分析 观察式子中各项的指数,可以发现它和

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

结构比较接近.

解 原式$=1^3-3\times4x^2y^2+3\times16x^4y^4-4^3x^6y^6$

$$=1^3-3\times(4x^2)y^2+3\times(4x^2)^2y^4-(4x^2)^3(y^2)^3$$

$$=(1-4x^2y^2)^3=(1-2xy)^3(1+2xy)^3$$

例 7 $8a^3+27b^3-c^3+18abc$

分析 例 7 在结构上与乘法公式

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$比较接近.

解 $8a^3+27b^3-c^3+18abc$

$$=(2a)^3+(3b)^3+(-c)^3-(2a)(3b)(-c)$$

$$=(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab+2ac+3bc)$$

例 8 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

分析 在前面介绍的乘法公式中,没有直接可用于

$$a^3+b^3+c^3$$

的公式,但公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

可变形为

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$$

解 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

$$=(b-c+c-a+a-b)[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$
$$-(b-c)(c-a)-(b-c)(a-b)-(c-a)(a-b)]$$
$$+3(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$=3(b-c)(c-a)(a-b)$$

例 9 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{15}$

分析 例 9 的式子比较复杂,无乘法公式直接可用. 注意到乘法公式⑤:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$$

在这个乘法公式中，令　$y=1$ 可得

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$$

这个式子右边的因式从结构上看与例 9 较接近.

解　由式子

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x+1)$可知：

$$x^{16}-1=(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdots+x+1)$$

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{14}+x^{15}=\frac{x^{16}-1}{x-1}$$

$$=\frac{(x^8-1)(x^8+1)}{x-1}=\frac{(x^4+1)(x^4-1)(x^8+1)}{x-1}$$

$$=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\frac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$=(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)$$

例 10　$(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$

分析　例 10 式子的结构与例 8 中式子的结构是一致的，故可以利用乘法公式

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc.$$

另外，例 10 中第三项$(a+b-2x)^3$ 可变为

$$[(a-x)+(b-x)]^3$$

也可利用公式

$$a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

进行化简，然后分解因式.

解法 1　$(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$

$=(a-x)^3+(b-x)^3+(2x-a-b)^3$

$=(a-x+b-x+2x-a-b)[(a-x)^2+(b-x)^2+(2x-a-b)^2-(a-x)(b-x)-(a-x)(2x-a-b)-(b-x)(2x-a-b)]+3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$

$$=3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$$

解法 2 $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$

$$=(a-x)^3+(b-x)^3-[(a-x)+(b-x)]^3$$
$$=(a-x)^3+(b-x)^3-(a-x)^3-3(a-x)^2(b-x)$$
$$-3(a-x)(b-x)^2-(b-x)^3$$
$$=-3(a-x)^2(b-x)-3(b-x)(b-x)^2$$
$$=3(a-x)(b-x)(2x-a-b)$$

例 11 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

分析 例 11 中的式子没有乘法公式直接可用，在这种情况下，可以先化简、变形.

解 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

$$=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2$$
$$=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$$
$$=(a^2+a+1)^2$$

例 12 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2-x^n(x\neq1)$

解 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2-x^n=\left(\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n$

$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n(1-x)^2}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}+2x^{n+1}-x^{n+2}-x^n}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{(1-x^n)-x^{n+2}(1-x^n)}{(1-x)^2}$$
$$=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$
$$=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1})$$

（三）分组分解法

提取公因式法，十字相乘法，运用公式法是因式分解的基本方法. 对于一些复杂的式子进行因式分解时，这些方法往往不能直接应用，这就需要我们通过观察式子中各项的特点，将待分解的式子分成

几个部分，先对这几个部分用提取公因式法、十字相乘法、运用公式法等基本方法进行整理并发现其规律，再对整个式子进行因式分解.分组分解法的思路很灵活，在解题时，往往还需要进行一些尝试之后才能找到解决问题的正确途径.

例 13 $2acx+4bcx+adx+2bdx+4acy+8bcy+2ady+4bdy$

分析 容易发现，例 13 中的前四项有共同的因式 x(后四项有共同的因式 y). 也可以把含有 ac、bc、ad、bd 的项分别分组.

解法 1 原式 $=(2acx+4bcx+adx+2bdx)$

$$
\begin{aligned}
&+(4acy+8bcy+2ady+4bdy)\\
&=(2ac+4bc+ad+2bd)x\\
&+(4ac+8bc+2ad+4bd)y\\
&=(2ac+4bc+ad+2bd)(x+2y)\\
&=(a+2b)(d+2c)(x+2y)
\end{aligned}
$$

解法 2 原式 $=(2acx+4acy)+(4bcx+8bcy)+(adx+2ady)$

$$
\begin{aligned}
&+(2bdx+4bdy)\\
&=2ac(x+2y)+4bc(x+2y)+ad(x+2y)\\
&+2bd(x+2y)\\
&=(x+2y)(2ac+4bc+ad+2bd)\\
&=(x+2y)(a+2b)(d+2c)
\end{aligned}
$$

例 14 $ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

分析 这个式子既无公因式可提，又无乘法公式可直接运用. 可以设法先将式子拆开，然后分组.

$$
\begin{aligned}
ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)&=abc^2-abd^2-cda^2+cdb^2\\
&=(abc^2+cdb^2)-(abd^2+cda^2)\\
&=bc(ac+bd)-ad(bd+ac)\\
&=(ac+bd)(bc-ad)
\end{aligned}
$$

例 15 $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

分析 式中 a^2，b^2，c^2，d^2 的系数分别为 $ab+cd$ 与 $ac+bd$ 的代数

和，而$(ab+cd)+(ac+bd)$和$(ab+cd)-(ac+bd)$都可以用分组分解法解之，因此把原式按a^2,b^2,c^2,d^2的系数进行分组，可以较容易地把原式因式分解.

解 $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)+(ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$

$=(ab+cd+ac+bd)a^2+(ac+bd-ab-cd)b^2+(ab+cd$

$-ac-bd)c^2-(ab+cd+ac+bd)d^2$

$=(ab+ac+bd+cd)(a^2-d^2)+(ac+bd-ab-cd)(b^2-c^2)$

$=(a+d)(b+c)(a^2-d^2)+(b-c)(d-a)(b^2-c^2)$

$=(a+d)^2(b+c)(a-d)+(b-c)^2(b+c)(d-a)$

$=(b+c)(a-d)[(a+d)^2-(b-c)^2]$

$=(b+c)(a-d)(a+d+b-c)(a+d-b+c)$

例 16 $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$

分析 式子中含有a和含有b的项基本类似，可以先将原式拆开，将含有a和含有b的项各分成一组，再考虑提取公因式.

解 $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$

$=(ax^3-ax^2y+axy^2)+(by^3+x^2yb-xy^2b)+x^3+y^3$

$=a(x^3-x^2y+xy^2)+b(y^3-xy^2+x^2y)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=ax(x^2-xy+y^2)+by(y^2-xy+x^2)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$

例 17 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$

分析 例 17 中有三个不同的字母x、y、z，先将含x的项分成一组，再对仅含有y、z的项进行因式分解.

解 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$

$=(2x^2-7xy+5xz)+(3y^2-5yz+2z^2)$

$=(2x^2-7xy+5xz)+(y-z)(3y-2z)$

$=2x(x-3y+2z)-x(y-z)+(y-z)(3y-2z)$

$=2x(x-3y+2z)-(y-z)(x-3y+2z)$

$=(x-3y+2z)(2x-y+z)$

（四）适当地拆、添项后分组分解

在因式分解问题中，常常遇到这样一类问题，所给出的式子在结构上和乘法公式比较接近，但缺少应用乘法公式中的一些项或者多出一些项. 在这种情况下可以对式子中的项进行恰当的分拆，或者增添一些项然后进行分组分解. 拆、添项后进行因式分解的题难度较大，也很灵活，经常遇到的问题是不知道怎样拆项和增添怎样的项. 概括地说，拆、添项的基本原则是对照乘法公式，找出应用乘法公式，提取公因式和应用十字相乘法缺少的项或者多余的项. 对缺少的项进行添加，对多余的项进行分拆.

例 18 $x^2-y^2+4x-2y+3$

分析 式子中含有 x^2，$4x$ 两项，含有 y^2，$2y$ 两项. 对照乘法公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

只需分别添加常数 4，1 即可应用公式，为了做到这一点，将 3 分拆成 4 和 -1 即可.

解 $x^2-y^2+4x-2y+3$

$=x^2+4x+4-y^2-2y-1$

$=(x+2)^2-(y+1)^2$

$=(x+2+y+1)(x+2-y-1)$

$=(x+y+3)(x-y+1)$

例 19 $3x^6-x^{12}-1$

分析 对照乘法公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，将 $3x^6$ 拆成 $2x^6$ 和 x^6 后，可利用公式.

解 $3x^6-x^{12}-1$

$=2x^6+x^6-x^{12}-1$

$=x^6-(x^6-1)^2$

$=(x^3)^2-(x^6-1)^2$

$=(x^3-x^6+1)(x^3+x^6-1)$

例 20 $x^4-2x^3-11x^2+12x+36$

分析 将含有 x^4,x^3,x^2 的项分成一组可以提出公因式,为了提取公因式后能应用十字相乘法,将 x^2 前面的系数进行分拆.

解 $x^4-2x^3-11x^2+12x+36$

$=(x^4-2x^3-8x^2)-3x^2+12x+36$

$=x^2(x^2-2x-8)-3(x^2-4x-12)$

$=x^2(x-4)(x+2)-3(x-6)(x+2)$

$=(x+2)[x^2(x-4)-3(x-6)]$

$=(x+2)[(x^3-3x^2)-(x^2-3x)-(6x-18)]$

$=(x+2)(x-3)(x^2-x-6)$

$=(x+2)(x-3)(x-3)(x+2)$

$=(x+2)^2(x-3)^2$

例 21 a^5+a+1

分析 考虑乘法公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,若在式子中添加 a^2,和 a^5 提出公因式后可以使用乘法公式,而余下的项正好构成 a^3-b^3 的一个因式.

解 $a^5+a+1=a^5-a^2+a^2+a+1$

$=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$

$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)[a^2(a-1)+1]$

$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$

例 22 x^4-6x^2-7x-6

分析 考虑公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,当把 $7x$ 分拆成 x 和 $6x$,x^4-x 提取 x 后可利用这个乘法公式,而剩下的各项又恰好构成 a^3-b^3 的另一个因式.

解 x^4-6x^2-7x-6

$=x^4-x-6x^2-6x-6$

$=x(x^3-1)-6(x^2+x+1)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)-6(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)[x(x-1)-6]$

$=(x^2+x+1)(x^2-x-6)$

$=(x^2+x+1)(x+2)(x-3)$

例 23 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

分析 容易发现$(c-a)$与$(b+c)$和$(a+b)$有如下关系 $c-a=(b+c)-(a+b)$,即将$(c-a)$添项变形后可分组提取公因式.

解 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

$=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$=[bc(b+c)+ca(b+c)]-[ca(a+b)+ab(a+b)]$

$=c(b+c)(b+a)-a(a+b)(c+b)$

$=(b+c)(a+b)(c-a)$

例 24 $1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}$

分析 此题的结构很复杂,不过我们仍然可以对照公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ 对原式进行分拆或者添项,然后观察是否有公因式可提.

解 原式$=1+2a+a^2+2a^2+4a^3+2a^4+3a^4+6a^5+3a^6+2a^6$
$+4a^7+2a^8+a^8+2a^9+a^{10}$

$=(a+1)^2+2a^2(a+1)^2+3a^4(a+1)^2+2a^6(a+1)^2$
$+a^8(a+1)^2$

$=(a+1)^2(1+2a^2+3a^4+2a^6+a^8)$

$=(a+1)^2[a^8+a^4+1+2a^6+2a^4+2a^2]$

$=(a+1)^2(a^4+a^2+1)^2$

$=(a+1)^2[(a^2+1)^2-a^2]^2$

$=(a+1)^2(a^2+1+a)^2(a^2+1-a)^2$

例 25 $x^2-2(a+b)x-ab(a-2)(b+2)$

分析 对照乘法公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,通过添加$(a+b)^2$,可使用乘法公式.

解

$$x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-(a+b)^2-ab(a-2)(b+2)$$
$$=(x-a-b)^2-[a^2+b^2+2ab+a^2b^2-2ab^2+2a^2b-4ab]$$
$$=(x-a-b)^2-[(a-b)^2+2ab(a-b)+a^2b^2]$$
$$=(x-a-b)^2-(a-b+ab)^2$$
$$=(x-a-b-a+b-ab)(x-a-b+a-b+ab)$$
$$=(x-2a-ab)(x-2b+ab)$$

（五）用换元法因式分解

换元法是进行代数恒等变形的一种重要方法.它的本质就是通过将原式中代数式用新的字母代替后，达到简化原式结构的目的，方便我们寻求因式分解的思路.

例 26 $9(p-q)^2-6(q-p)+1$

分析 该式可以看成是关于$(p-q)$的多项式，用字母代替式子$(p-q)$后可以简化式子的结构.

解 令 $t=p-q$，原式变形为 $9t^2+6t+1$

$$9t^2+6t+1=(3t+1)^2=(3p-3q+1)^2$$

例 27 $10(y+3)^2-29(y+2)-19$

分析 从原式中不能直接发现共同的项，这时可以通过变化常数使$(y+2)$变形为$(y+3)$，然后利用换元法达到化简的目的.

解
$$10(y+3)^2-29(y+2)-19$$
$$=10(y+3)^2-29(y+3)+29-19$$
$$=10(y+3)^2-29(y+3)+10$$

令 $y+3=t$，原式变形为 $10t^2-29t+10$

$$\begin{aligned}10t^2-29t+10&=(2t-5)(5t-2)\\&=[2(y+3)-5][5(y+3)-2]\\&=(2y+1)(5y+13)\end{aligned}$$

例 28 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

分析 注意原式中含有(x^2+x+1)，(x^2+x+2)，二次项和一次

项均相同，如果令 $x^2+x+1=t$，原式化简为 $t(t+1)-12$. 在这种情形下一种更为简便的办法是

令 $$\frac{(x^2+x+1)+(x^2+x+2)}{2}=t.$$

解法 1 令 $x^2+x+1=t$，原式变形为 $t(t+1)-12$.

$$\begin{aligned}t^2+t-12&=(t+4)(t-3)\\&=(x^2+x+1+4)(x^2+x+1-3)\\&=(x^2+x+5)(x^2+x-2)\\&=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

解法 2 令 $\dfrac{x^2+x+1+x^2+x+2}{2}=t, t=x^2+x+\dfrac{3}{2}$

原式变形为：$\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)-12=t^2-\dfrac{1}{4}-12$

$$\begin{aligned}&=t^2-\frac{49}{4}=\left(t+\frac{7}{2}\right)\left(t-\frac{7}{2}\right)\\&=\left(x^2+x+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right)\\&=(x^2+x+5)(x^2+x-2)\\&=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)\end{aligned}$$

例 29 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

分析 原式中 $(x+1)(x+7)$ 和 $(x+3)(x+5)$ 展开后二次项和一次项均相同，应用换元法后这个问题转化成与上个例子类似的问题.

解
$$\begin{aligned}&(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15\\=&[(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)]+15\\=&(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15\end{aligned}$$

令 $$\begin{aligned}t&=\frac{(x^2+8x+7)+(x^2+8x+15)}{2}\\&=x^2+8x+11\end{aligned}$$

原式变形为：$(t-4)(t+4)+15$

$$(t-4)(t+4)+15=t^2-16+15=t^2-1=(t+1)(t-1)$$