中等專业学校函授教材

解析几何与微积分

JIEXIJIHE YU WEIJIFEN

北京郵电学院函授部編

人民教育出版社

51.5
163

目　录

第三篇　双曲綫函数

緒　言

数学，和其他科学一样，发生和发展于生产实践。例如，自从人类需要計算劳动果实，随着就产生了自然数；又由于丈量地亩的需要，就产生了几何学。

在17，18世紀，由于生产的蓬勃发展，引起对自然科学及技术科学上的实际需要，因而产生了一些新的数学問題。这些問題是过去初等数学不能解决的問題。就在这时法国著名数学家兼哲学家笛卡儿将变量引进数学并創立了坐标观念，将“形”与“数”联系了起来，随之就产生了解析几何与微积分。

解析几何和以前所学的就着图形直接来研究的几何不同，它是通过坐标法用代数或分析的运算来研究几何图形的性质、大小、形状的科学。我們現在将要学习的是只用代数的运算来研究的最簡单的解析几何，并且只限于平面部分。

微积分学主要是用导数（或微分）、积分研究函数的科学，由牛頓和萊布尼茲两人完成。它是研究科学技术不可缺少的工具。近代科学技术所以能有現在的成就与这門科学有密切的关系。学习自然科学或工程技术的人一定要掌握它才有条件攀登科学高峰。所以我們一定要学好它。

按照邮电函授中等专业教育計划的精神和数学大綱的要求，我們要学习的是微积分学的初步知識，所以本課本只着重談基本概念和基本运算，同时对一些必要的理論不作詳細的叙述和論証，只用例証或几何图形的直观說明。

第一篇　平面解析几何学基础

第一章　平面上点的坐标的应用①

学习本章的目的与要求

目的　掌握解析几何的两个基本問題为以后学习打基础。

要求　熟記并会运用求两点間的距离的公式和两点連綫的分点的求法公式。

1 1· 前言

我們在代数里已經学过利用直角坐标系可以把平面上点的位置用一对实数(卽坐标)表示出来,并且平面上的每一个点都对应着确定的一对实数,反过来,任何一对实数都对应着平面上的唯一的一点。

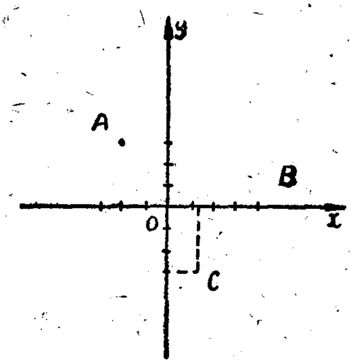

图 1.1

例如图1.1中的点A因为它的横坐标为-2,纵坐标为$+3$,所以这点对应着一对数$(-2, 3)$。又如点B对应着一对数$(4, 0)$,反过来,一对数$(\sqrt{2}, -3)$决定了一点C。

引用这个坐标概念,就将"形"与"数"联系起来了,从而提供了我們用代数方法来研究几何的新工具。現在我們利用坐标法来解决解析几何中两个最基本的問題——两点間的距离和綫段的定比分点。这两个基本問題今后我們常常要应用它們。

① 在学习本章之前希望学者复习一下代数部分第五章§4。

注 在解析几何里所謂"已知一点"就是說已知这个点在已知坐标系的坐标。同样，如果說"求一个点"，就是求它的坐标，因为知道点的坐标，点就确定了。

1.2 两点間的距离

1. 已知两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 試計算它們之間的距离。

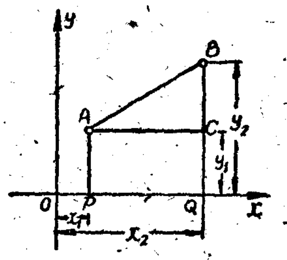

图 1.2

設 AB 的距离是 d。由点 A 与点 B 分别作 Ox 軸的垂綫 AP 与 BQ，并經过点 A 引平行于 Ox 軸的直綫 AC 交 BQ 于 C。則得直角三角形 ABC（如图 1.2）。

由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2 \tag{1}$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$

$$CB = QB - QC = QB - PA = y_2 - y_1,$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式(1)，得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

由此，得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。 \tag{2}$$

在根号前面取正号（+），因为两点間的距离永远是正的。

应当注意：

(1) 因为 $(x_2 - x_1)^2$，与 $(x_1 - x_2)^2$ 相等，$(y_2 - y_1)^2$ 与 $(y_1 - y_2)^2$ 相等所以距离 d 也可写为

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

这就是說，两点間的距离与两个点的次序无关，也就是說与誰是第一点誰是第二点无关系。

(2) 在上面推演公式(2)的时候，我們是假設点 A 与点 B 在第一象限里。如果 A 与 B 两点在任何其他一个象限或者分別在两个象限时，也可得出同样的公式。

这样上述公式用言語敘述出来，就是：两点間的距离等于这两个点的横坐标差的平方及縱坐标差的平方之和的平方根。

2. 如果两点中有一点是坐标原点，即(0, 0)，另一点的坐标是(x, y)，那末，这一点到原点的距离公式是

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3}$$

例 1. 試求 $A(-3, 5)$ 和 $B(1, 2)$ 两点之間的距离。

解 已知 $x_1=-3$, $y_1=5$, $x_2=1$, $y_2=2$。設距离是 d。那末把这些坐标代入公式(2)，得

$$d=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{25}=5.$$

例 2. 求与已知点 $M_1(1, 2)$；$M_2(-1, -2)$；$M_3(2, -5)$ 等距离的一点。

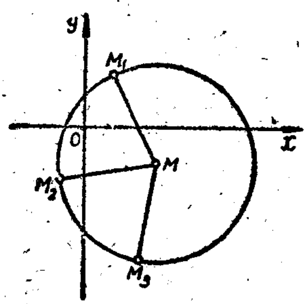

图 1.3

解 我們已經知道求点就是求它的坐标所以設 x, y 为所求的点的坐标。

由已知条件，得

$$M_1M=M_2M, \quad M_2M=M_3M.$$

按公式(2)

$$M_1M=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$
$$M_2M=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$
$$M_3M=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$$

解之，得 $x=\dfrac{8}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$.

$\therefore$ 所求的点是 $M\left(\frac{8}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$。

注　因为过此三点的圆的中心与此三点等距离，又与三点等距离的点只有一点。所以求得的这点就是过此三点 M_1, M_2, M_3 的圆的中心(见图 1.3)。

例 3. 求在 Ox 轴上的与点 $A(3, 4)$ 相距为 5 个单位的点的坐标。

解　按题意，所求的点在 Ox 轴上，所以这个点的纵标是0。設所求点的坐标为 $(x, 0)$，则由公式(2)有，

$$5=\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}$$

解之，得 $x=0$ 或 6。

因此，所求的点有两个，一个是 $(0, 0)$ 即原点，一个是 $(6, 0)$。

1.3　綫段的定比分点

1. 如果一点将一綫段分为两个部分，并使这两部分的比为一已知数，那末这一点叫做該綫段的定比分点。在图 1.4 中，如果定比为 $\frac{2}{3}$，那末点 C 便是这样的一个点。

图 1.4

2. 现在我們来研究这样的点的求法：設已知一綫段 AB 的两个端点分别为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ (图 1.5)，且已知 AB 内的一点 C，将 AB 分为两部分的比 $\frac{AC}{CB}$ 等于已知数 λ (字母"λ"讀做"兰母达")，求 C 点的坐标。

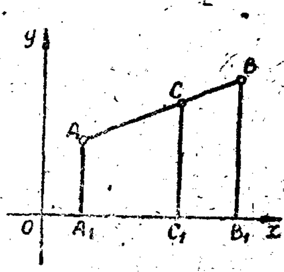

图 1.5

由点 A, B 与 C 各作 Ox 軸的垂綫 AA_1, BB_1 与 CC_1，从初等几何学中，我們知道綫段

AC, CB, A_1C_1 和 C_1B_1 成比例，即

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}$$

根据已知条件，得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda \tag{4}$$

由图1.5知，

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1$$

$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x$$

将这两式代入公式(4)，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \tag{5}$$

$$\therefore\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

再由点 A, B 与 C 各作 Oy 轴的垂綫，同样可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

因此，按定比 λ，分割綫段 AB 的点 $C(x, y)$ 的坐标，用下列公式来确定

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\\ y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

不要忘記，这里定比 λ 的前項(或分子)是从第一点 A 到分点 C 的一部分 AC，后項(或分母)是从分点 C 到第二点 B 的一部分 CB，即 $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$。

至于第一点和第二点是根据什么来确定的呢？这个問題的回答是：在一般的情况下是按照題中写两点的先后次序来确定的。

应当注意，在推演公式(6)的时候，我們假設点 A 与点 B 是在第一象限的，同样可以証明，公式(6)对于 A 和 B 在坐标平面上任

意的位置都是正确的。

例 1. 点 C 把 $A(2, 3)$ 及 $B(3, -3)$ 两点的連綫分为 2:5 的两段，求点 $C(x, y)$ 的坐标。

解 因为 A 点写在 B 点之前，所以我們把 A 点当做第一点，B 点当做第二点，这样，$x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=3$, $y_2=-3$ 又 $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{2}{5}$。

根据公式(6)得

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\times 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7},\quad y=\frac{3+\frac{2}{5}\times(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}。$$

所以，所求的 C 点是 $\left(\frac{16}{7}, \frac{9}{7}\right)$。

3. 如果点 C 平分綫段 AB，那末 $AC=CB$，因此

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=1$$

公式(6)便取得下列形式

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2};\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}。\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

这就是說，綫段中点的坐标等于两端点对应坐标之和的一半。

例 2. 求点 $A(3, 2)$ 及点 $B(-1, -2)$ 連綫的中点 C 的坐标。

解 $x_1=3$, $y_1=2$, $x_2=-1$, $y_2=-2$。

依題意，根据公式(7)得

$$x=\frac{3+(-1)}{2}=1,\quad y=\frac{2+(-2)}{2}=0$$

所求的中点 C 是 $(1, 0)$。

例 3. 某綫段，中点是 $(-1, 2)$，一端点是 $(2, 5)$，求另一端点的坐标。

解 現在 $x_1=2$, $y_1=5$, 及 $x=-1$, $y=2$。

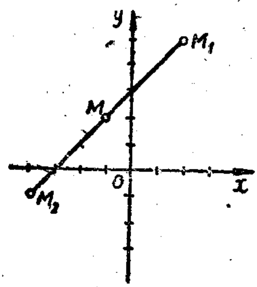

图 1.6

依題意,根据公式(7)得

$$-1=\frac{2+x_2}{2},\quad \therefore\ x_2=-4,$$

$$2=\frac{5+y_2}{2},\quad \therefore\ y_2=-1。$$

所以,所求第二端点的坐标是 $(-4,\ -1)$。

例 4. 試証:三角形两边中点的連綫平行于第三边。

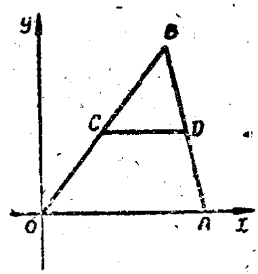

图 1.7

証 要用解析法証明这个定理,就得取坐标軸。由于图形的性质和坐标軸的选择没有关系。因此对于这个問題如果坐标軸选擇得适当,計算便会很簡单,否則就复杂了。所以我們这样来选坐标軸:使原点和三角形的一顶点重合,又使 Ox 軸与这頂点的一条邻边重合(图1.7)。这样,三角形的三个頂点便是 $O(0,0)$, $A(x_1,O)$, $B(x_2,y_2)$。

設 CD 綫是 OB 及 AB 两边的中点的連綫。我們要証明的 CD 与 OA 平行(即与 Ox 軸平行)現在只要証明 C 和 D 两点的縱标相等就行了。

按公式(7), C 及 D 两点的縱标 y_C 及 y_D 各是:

$$y_C=\frac{O+y_2}{2}=\frac{y_2}{2},\qquad y_D=\frac{O+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}.$$

因此, $y_C=y_D$。即 CD 綫与 OA 綫平行。

1.4 小結

1. 两点間的距离等于这两个点的横坐标差的平方及縱坐标差的平方之和的平方根——公式(2)。

2. 坐标原点与任意点間的距离等于这个点的两个坐标平方和的平方根——公式(3)。

3. 綫段 AB 被点 C 分成定比 $\lambda\left(\lambda=\frac{AC}{CB}\right)$时，$C$ 点的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

問題和习題

1. 什么叫做点的坐标?

2. 在平面为坐标軸所分割成的四个象限中，每一象限里的点的直角坐标的符号怎样?

3. 两点如对称于：(1)横軸，(2)纵軸，它們的直角坐标間有什么关系?

4. 两点如对称于原点，它們的直角坐标之間有什么关系?

以上四个問題需要先复习代数部分第五章 § 4，然后再答。

5. 已知四边形的頂点为 $(-a, O)$，(O, b)，(a, O)，$(O, -b)$，求它的周长。

6. 試証頂点为 $(-3, -2)$，$(1, 4)$，$(-5, 0)$ 的三角形是一等腰三角形。

7. 試在纵軸上找一点并与点 $A(10, 8)$ 和点 $B(-6, 4)$ 等距离。

8. 試求經过点 $(0, 0)$，$(4, 2)$，$(6, 4)$ 的圓的中心。

9. 动点从点 $A(3, 2)$ 沿直綫方向移动 12 个单位至 B 点，其运动方向向右上方与 Ox 軸成 $60°$ 角；求 B 点的坐标。

10. 已知一綫段的中点是 $(-1, 2)$，而它的一个端点是 $(2, 5)$，試求它的第二个端点的坐标。

11. 已知点 $(1, 1)$ 平分連結点 $(x, 5)$ 和 $(-2, y)$ 的綫段，試求这两个端点的坐标。

12. 已知一点分 $(0, 2)$ 和 $(8, 0)$ 两点間的綫段所成的比，与从原点到这两点的距离之比相同，試求此点。

13. 已知三角形的两个頂点为 $A(0, 5)$，$B(5, 3)$ 和它的中綫交点为 $M(1, 3)$，試求三角形的第三个頂点。

14. 試求頂点为 $A(3, 4)$，$B(-1, 1)$，$C(0, -3)$ 的三角形的中綫长度。

15. 試求三等分 $M_1(-3, -7)$ 和 $M_2(10, 2)$ 两点間的綫段的点。

第二章 直 綫

学习本章的目的与要求

目的 1. 用方程来研究直綫及其性质；

2. 明确直綫方程是关于点的流动坐标 x, y 的一次方程，而关于 x, y 的一次方程的图形是直綫。

要求 1. 了解一次方程与直綫的密切关系；

2. 能够按所給条件求出直綫方程；

3. 能够把一般方程 $Ax+By+C=0$ 化为角系数式和截距式以求直綫的斜率和在坐标軸上的截距；

4. 会求两直綫的交角与交点，了解两直綫的平行与垂直条件并会应用它們解决相关問題。

2.1 前言

在前一章中，我們通过坐标法用代数运算的方法研究并解决了两个有关簡单的几何图形——点的两个問題。

現在让我們在坐标法概念的基础上，进一步用代数的运算来研究比較复杂的几何图形——綫。为了系統地，解决这个問題，我們先从最簡单的綫——直綫开始进行研究。

要用代数运算来研究直綫，首先必須要解决一个問題，就是象用"数"表示"点"一样地用一种东西来表示直綫。解决了这一問題后，一切有关直綫的問題的研究才有可能轉变为用計算的方法来进行。

現在我們来研究，用来表示直綫的究竟是什么？

2.2 直綫方程的概念

我們知道，直綫可以看作是点按着一定的几何条件移动的軌

迹。因此，在直綫上移动的点，在移动的过程中，处处都遵守着一定的几何条件，而其坐标(x, y)也按着一定的規律在改变，这个改变規律可用关于x, y的方程表示出来。例如，平分第一、第三象限角的直綫PQ，它是一点按着"与两軸等距离"移动而成的，当点$M(x, y)$在此直綫上移动时，其坐标便改变，但不論点M移动至何处其横坐标总是等于其縱坐标的(图2.1)。这一規律用方程表示就是

$$x=y。\tag{1}$$

很明显，不在此直綫上的点，在移动时，坐标的改变就不遵循这一規律，即$x\neq y$。由于直綫PQ与方程$x=y$之間的关系如此密切，所以我們便用方程(1)来代表直綫PQ，并把它叫做直綫PQ的方程。

又如，平行于Oy軸的直綫，我們可以把它看成"与Oy軸的距离保持一定"的点的軌迹(图2.2)。当点M在此直綫移动时，它

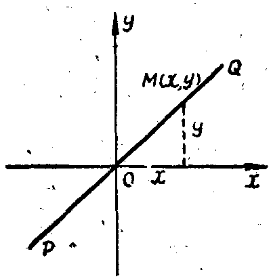

图 2.1

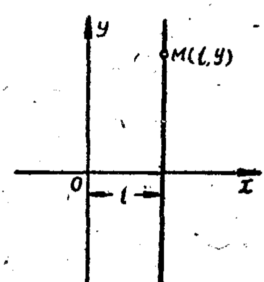

图 2.2

的坐标改变的規律是：横标始終不变。它等于直綫与Oy軸的距离l，这个規律用方程

$$x=l\tag{2}$$

表示。很明显，不在此直綫上的点，它的横标便不等于l。因此，方程(2)是平行于Oy軸而与Oy軸相距为l的直綫方程。当l为0时，則此直綫与Oy軸重合，所以方程$x=0$就代表Oy軸，并叫

做 Oy 軸的方程。

同样，平行于 Ox 軸，而与它的距离为 b 的直綫方程是

$$y=b。\tag{3}$$

当 b 为 0 时，方程 $y=0$ 表示 Ox 軸，并叫做 Ox 軸的方程。

上面研究的情况告訴了我們，直綫上点的坐标 (x,y) 之間的关系式叫做直綫的方程，这里的坐标是变量，我們称为流动坐标。

在解析几何里研究直綫时，就用直綫方程来表示直綫，以后常常将“求直綫方程”簡单地說成“求直綫”。

2.3 确定平面上的直綫的位置的条件

平面上的直綫的位置可以用很多方法来确定，最常用的是：

1. 已知直綫与 Ox 軸的傾斜角 α（这里所說的傾斜角是指从 x 軸正向起反时針轉到与直綫重合所成的角，此角总是正的，并且 $0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$）（图 2.3）和直綫在 Oy 軸上所截的綫段 OP（这段綫段叫做直綫的縱軸截距）。

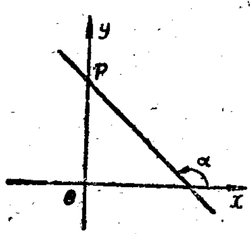

图 2.3(a)

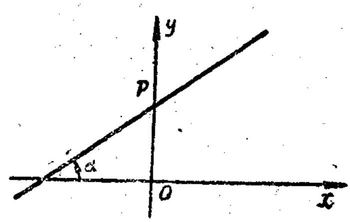

图 2.3(b)

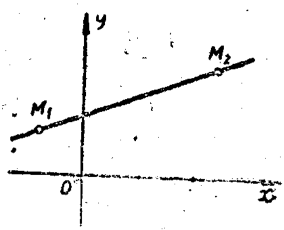

图 2.4

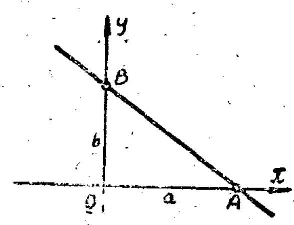

图 2.5

2. 已知直綫通过的两点 M_1 及 M_2 (图 2.4)。

3. 已知直綫在坐标軸上所截的綫段 $OA=a, OB=b$ (图 2.5)。

注 确定平面上一条直綫的位置一定要两个条件，上面常用的三种方法都是两个条件，一个条件是不能确定一条直綫的。例如，在第一种方法里如果我們仅知道直綫对 Ox 軸的傾斜角 α，那末便有无穷多条直綫，而不是一条直綫(見图 2.6)。如果我們仅知

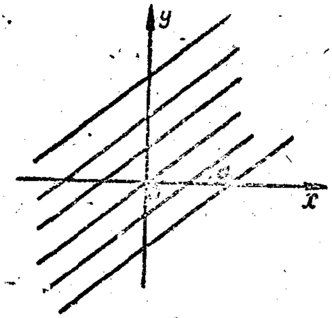

图 2.6

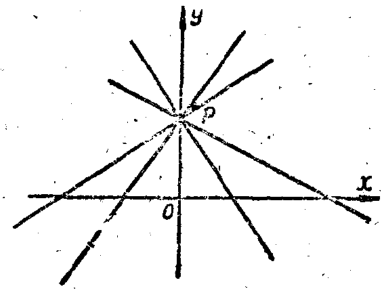

图 2.7

道直綫的縱截距，那末也有无穷多条直綫(見图 2.7)。

2.4 角系數式的直綫方程

用不同的方法确定的直綫，其方程的形式也不一样，現在我們研究用第一种方法确定的直綫方程。

設一直綫对 Ox 軸的傾斜角为 α，在 Oy 軸上的截距等于 b，也就是直綫与 Oy 軸交于点 $(0, b)$。

又設 $M(x, y)$ 为直綫上任一点(图 2.8)，

根据假設的第一个条件，有

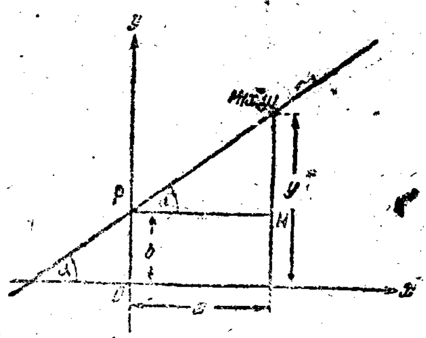

图 2.8

$$\frac{NM}{PN}=\operatorname{tg}\alpha$$