[illegible]

数学分析理论基础

[illegible]

程　麒编著

数学分析理论基础

湖南教育出版社

数学分析理论基础

程 麒 编著

责任编辑：胡 坚

湖南教育出版社出版发行 （长沙展览馆路8号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：7.5 字数：136,000

1989年6月第 版 1989年6月第1次印刷

印数：1——2,000

ISBN7－5355—0914—2/G・946

定 价：3.35元

目　录

第一章　实数理论

§1　绪论 …………………………………………（1）

1.1　引言 …………………………………………（1）

1.2　公理化方法 …………………………………（5）

1.3　记号 …………………………………………（7）

§2　从自然数到实数 ……………………………（9）

2.1　自然数 ………………………………………（9）

2.2　归纳定义法 …………………………………（15）

2.3　皮亚诺公理系统的讨论 ……………………（18）

2.4　整数环 ………………………………………（21）

2.5　有理数域 ……………………………………（26）

2.6　实数的分划模型 ……………………………（28）

2.7　实数的基本序列模型 ………………………（33）

2.8　小结 …………………………………………（37）

§3　实数的公理系统 ……………………………（39）

3.1　实数公理系统 ………………………………（39）

3.2　从实数系中析出自然数系 …………………（41）

3.3　有理数与无理数 ……………………………（44）

3.4　阿几米德性质 ………………………………（47）

3.5　实数空间 ……………………………………（50）

3.6　连续公理的等价命题 ………………………（51）

3.7　实数公理系统的讨论 ………………………（56）

第二章 极限理论

§1 实数空间上极限的一般理论 ……………………(58)

1.1 极限概说 ……………………(58)

1.2 极限的三种基本类型 ……………………(61)

1.3 有向集 ……………………(65)

1.4 有向变量的极限 ……………………(68)

1.5 推广 ……………………(73)

§2 拓扑空间与收敛 ……………………(75)

2.1 拓扑空间 ……………………(76)

2.2 拓扑空间上有向变元的收敛 ……………………(79)

2.3 收敛与拓扑 ……………………(82)

2.4 滤子与滤子的收敛 ……………………(86)

第三章 超实数域

§1 超实数域 ……………………(91)

1.1 超滤子 ……………………(91)

1.2 超实数域 ……………………(94)

1.3 超实数的性质 ……………………(98)

§2 非标准分析 ……………………(102)

2.1 标准对象与非标准对象 ……………………(103)

2.2 非标准定义 ……………………(105)

2.3 非标准证明 ……………………(107)

第四章 欧几里得空间与测度

§1 欧几里得空间以及线段的度量 ……………………(109)

1.1 欧几里得——希尔伯特公理系统 ……………………(109)

1.2 线段的度量 ……………………(111)

1.3 解析几何 ……………………(117)

1.4 欧几里得空间 ……………………(121)

1.5 R^n的几何 ……………………(124)

§2 约当测度 ……………………(125)

2.1 简单图形的体积 ……………………………………(126)
2.2 外体积与内体积 ……………………………………(128)
2.3 约当测度 ……………………………………(131)
§3 曲线的长度 ……………………………………(137)
3.1 曲线 ……………………………………(137)
3.2 曲线的长度 ……………………………………(139)
3.3 弧长定义的合理性 ……………………………………(142)
3.4 曲面面积 ……………………………………(146)
3.5 勒贝格测度及其他 ……………………………………(147)
第五章 初等超越函数
§1 实数域上的初等超越函数 ……………………………………(149)
1.1 用积分定义对数函数与指数函数 ……………………………………(149)
1.2 用积分定义三角函数 ……………………………………(154)
1.3 用微分方程定义三角函数 ……………………………………(159)
§2 复数域上的初等超越函数 ……………………………………(162)
2.1 复数域 ……………………………………(163)
2.2 指数函数 ……………………………………(164)
第六章 积分表为有限形式问题
§1 初等函数……………………………………(168)
1.1 解析延拓 ……………………………………(169)
1.2 结式 ……………………………………(172)
1.3 代数函数 ……………………………………(174)
1.4 代数函数的指数 ……………………………………(176)
1.5 代数函数的对数 ……………………………………(178)
1.6 代数组合 ……………………………………(179)
1.7 初等函数 ……………………………………(180)
1.8 初等函数的结构 ……………………………………(182)
1.9 初等函数的代数组合的性质 ……………………………………(185)
1.10 刘维尔原理 ……………………………………(188)

1.11 初等函数的导数 ……………………………(190)
§2 代数函数的积分 ……………………………(192)
2.1 刘维尔定理 ……………………………(193)
2.2 阿贝尔定理 ……………………………(200)
2.3 阿贝尔定理的推论 ……………………………(203)
2.4 残数与积分 ……………………………(205)
2.5 椭圆积分 ……………………………(207)
2.6 切比雪夫积分 ……………………………(210)
§3 超越函数的积分 ……………………………(212)
3.1 在微分域上初等的函数 ……………………………(213)
3.2 微分域的扩张 ……………………………(214)
3.3 刘维尔-奥斯特鲁斯基定理……………………………(215)
3.4 阿贝尔定理的一般化 ……………………………(217)
3.5 初等函数的积分 ……………………………(220)
3.6 指数函数与代数函数之积的积分 ……………………………(221)
3.7 $\frac{\sin x}{x}$的积分 ……………………………(225)

第一章

实 数 理 论

数学分析区别于初等数学的主要特征表现在成功地运用了研究无限过程的极限运算，而极限理论的充分开展又基于对数的连续统的了解，所以要想彻底弄清分析概念与原理的逻辑结构，就必须准确地把握实数理论。公理化方法是描述实数理论的最好方法。因此，用公理化方法描述实数理论就成为分析的形式化基础。

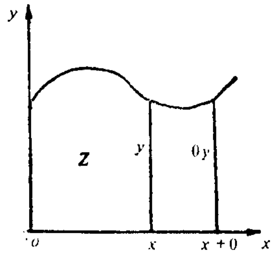
介绍实数理论有多种方案：1.用一组公理刻划实数的基础结构；2.在实数系中极限过程得以畅行无阻源于实数的连续性，为突出这一点，大多数数学分析教材仅重点介绍由有理数系扩张为实数系的理论；3.在朴素集合论的基础上，用一组公理刻划自然数系，然后顺次定义整数、有理数和实数，这些定义所完成的实质上都是给出该数系的一个模型；4.从公理集合论出发，首先构造自然数系，然后按第三方案建立实数理论。本章是这样处理的：先介绍第二个方案的纲要，但不作详细的阐述；然后较详细地介绍第一个方案。

§1　绪　论

1.1　引言

数学分析这个名称是由原有的名称无穷小分析演变而来的。但现行的绝大多数数学分析教材并不使用无穷小方法，而把极限理论作为研究的基础，书中出现的无穷小量仅指以零为极限

的变量而已. 这种无穷小哲学上称之为潜无穷小. 在历史上, 在创立微积分的17世纪, 不管是牛顿(I.Newton,1642～1727)还是莱布尼兹(G.W.Leibniz,1646～1716), 都把无穷小作为基本概念. 他们借助物理与几何的直观并充分运用想象力, 以无穷小作为基本工具, 导出了微分与积分的概念与公式. 他们的无穷小是一种称之为实无穷小的理想数.



在牛顿1669年出版的《运用无穷多项方程的分析学》中, 他假定曲线下的面积Z已知是

$$z=ax^m$$

把x的无穷小增量叫做x的瞬, 并用0表示, 由曲线、x轴、y轴和$x+0$处的纵坐标围成的面积则用$z+0y$表示, 其中$0y$是面积的瞬, 那么

$$z+0y=a(x+0)^m,$$

把二项式定理用于等式的右边, 当m是分数时, 则得到一个无穷级数. 两式相减, 用0除方程的两边, 去掉仍然含有0的项, 就得到

$$y=max^{m-1}.$$

牛顿在此不仅给出了求一个变量对于另一个变量(z对x)的瞬时变化率的普通方法, 而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到。这个事实现在叫做微积分基本定理. 在此, 牛顿的瞬是无穷小的、不可分的量, 也就是一个实无穷小. 开始, 牛顿把瞬当作"非零"参与运算, 最后又当作"零"把它去掉. 为什么无穷小既可当作"零", 又可当作"非零"?在逻辑上是不清楚的. 牛顿也意识到这样做有些不妥. 他说, 他的方法"与其说是精确的证明, 不如说是简短的说明"。在1671年著的《流数法和无穷级数》中, 牛顿借助物理直观, 把变量叫做流, 看作是随时间变化的; 变量的变化率叫做流数. 对于流x和y的流数, 记为$\dot{x}$和$\dot{y}$. 如果0是无穷小的时间

间隔，那么$\dot{x}0$和$\dot{y}0$就是x和y的无穷小增量，或者说是x和y的瞬。例如，假定流是$\dot{y}=x^n$，为求出$\dot{y}$与$\dot{x}$之间的联系，牛顿首先建立

$$y+\dot{y}0=(x+\dot{x}0)^n,$$

然后像前文提到的那样，得到$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}$.他去掉$\dot{x}\dot{x}0$和$\dot{x}\dot{x}0\dot{x}0$那样的项，根据是它们同剩下的项相比是无穷小。瞬仍然是实无穷小。不同的是：现在的瞬$\dot{x}0$和$\dot{y}0$是随时间0变化的；而前一篇论文中的瞬是x和z最后的固定的一片。后来在1687年的《自然哲学的数学原理》中，他舍弃了无穷小量，而用了"消失的可分量"，即能够无穷地缩小的量。他写道，"量在其中消失的最后比，严格地说，不是最后量的比，而是无限减少的这些量的比所趋近的极限，而它与这个极限之差虽然能比任何给出的差更小，但是在这些量无限缩小以前既不能越过也不能达到这个极限。""就消失量的最后比来说，应理解为：不是在量消失以前，也不是在消失以后，而是正当它们消失时的比。"就是说，牛顿把x和y的无穷小增量作为求流数的手段，当增量越来越小时，流数实际上就是增量之比的极限。这就把无穷小当作潜无穷小了。但是，总的说来，牛顿对无穷小的认识是摇摆的，不是前后一贯的。

与牛顿不同，莱布尼兹却直接用x和y的无穷小增量（即微分）求出它们之间的关系.他说："考虑这样一种无穷小量将是有用的，当寻找它们的比时，不把它们当作是零，但是只要它们和无法相比的大量一起出现，就把它们舍弃。例如，如果我们有$x+dx$，就把dx舍弃。但是如果我们求$x+dx$和x之间的差，情况就不同了。类似地，我们不能把xdx和$dxdy$并列。因此如果我们微分xy，我们写下$(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy$。但$dxdy$是不可比较地小于$xdy+ydx$，所以必须舍弃。"至于$dx$、$dy$和$\frac{dy}{dx}$的最终含意，莱布尼兹仍然是含糊的，他只说$dx$是两个无限接近的点的横坐标之差，$\frac{dy}{dx}$是差$dy$与$dx$的商。在一生的最后20年中，莱布尼兹对无

穷小的认识基本上保持不变．既把无穷小看作非零又看作零这种矛盾现象，他并不感到不安．他说他也不相信有真实的无限小，它们只是一种虚构，但对于缩短论证和在一般叙述中，是有用的虚构．并设想无穷小是有点像虚数那样的理想元素．他的追随者约·贝努里(Johann Bernoulli，1667～1748)则进一步把“一个量增加或减少一个无穷小量之后，它既没有增加也没有减少”当作公设使用。

总之，微积分学创立时期采用无穷小方法，认为实无穷小可以和通常的数一样参与运算．说无穷小既是非零又是零，这就很神秘，逻辑上说不清楚．因此微积分理论是建立在不牢固的基础之上的。到18世纪，微积分有了很大的发展．数学家们也想改变它的基础不牢固的局面，但是没能取得突破性的进展．一直到19世纪上半叶，哥西(A.L.Cauchy,1789～1857)用极限概念取代了含糊的无穷小概念，从而用极限方法改造了原来用无穷小方法叙述的微积分．给出了微积分第一个严格的叙述．他说:“当一个变量逐次所取的值无限趋近一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限。”维尔斯特拉斯(K·Weierstrass,1815～1897)进一步给出了现今仍然使用的用$\varepsilon-\delta$、$\varepsilon-N$语言刻划的极限定义，使函数、极限、导数、积分、无穷级数等概念得到精确化．分析的严密化迫使人们彻底清查实数系的内部结构．哥西不能证明他自己关于序列的收敛准则的充分性，就是由于他对实数系的结构缺乏了解．这既促使康托(G·Cantor，1845～1918)建立了他的集合论理论，同时也促使维尔斯特拉斯、康托、狄德金(J.W.R.Dedekind，1831～1916)分别建立了实数连续统的理论,从而使微积分理论基础真正牢固起来，逐步形成今天的标准数学分析的面貌．概言之，实数理论是数学分析的理论基础．

到20世纪六十年代,鲁滨逊(A.Robinson，1918～1974)发表了他的《非标准分析》，用与哥西截然相反的观点，重新解决数学

分析的理论基础问题。他在现代数学的严谨性的基础上，运用数理逻辑中模型论的方法，论证了实数的非标准模型的存在性。这样，他就为实无穷小争取了像实数一样的合法地位，从而又使数学分析的无穷小方法重新获得了生机。为区别计，鲁滨逊把实数域叫做实数的标准域，而把实数的非标准模型叫做实数的非标准域；相应地建立在标准域上的数学分析称为标准分析，而把建立在非标准域上的数学分析称为非标准分析。

深入探讨数学分析的理论基础，必然触及数学与逻辑的基础这个更广泛的课题。这里我们不打算刨根究底。我们的目标仅仅是：在朴素集合论的基础上，用公理化方法导出实数理论与超实数理论，并从分析学的公理化结构的角度对标准分析的几个关键问题作些探讨。

1.2 公理化方法

公理化方法是使一门数学理论成为建立在公理基础之上的演绎系统的方法。欧几里得(Euclid,公元前365?～275?)的《几何原本》是应用这种方法的先驱。他开头列举几个基本概念(如点、直线、点在直线上)和一组称为公理的命题(如“过两点可以作而且只能作一条直线”)，然后以公理作为出发点，运用逻辑推理法则，演绎出初等几何的全部理论。就是说，随后的每个概念都要用早先的概念来定义，每个定理都要根据公理与已证明的定理给出它的证明。为什么要有不定义的基本概念与不给证明的公理呢？对于任何一个演绎系统来说，既然证明一个定理就是表明这个定理是某些先前业已证明过的命题的必然逻辑结果，而这些命题的证明又要利用另一些已证明的命题，这样一直逆推上去，数学证明过程就会是一个无限逆推的不可能完成的过程。必须在某一点停下来。就是说，要有一些被称为公理的命题当作真实的事实接受下来。概念也是如此。这个起点就形成了该演绎系统的基本概念与公理，构成了全部理论的基础。

公理化思想是发展的。欧几里得的方法只是公理化方法的初级阶段。不但他的公理是远远不够用的，往后的证明中不得不经常运用直觉的看法；而且公理系统所描述的空间是特定的，它以现实几何空间作为直观背景。换言之，他的公理、定理与概念都是从现实几何空间的直觉感受中形成的。

1899年出版的希尔伯特(D.Hilbert，1862～1943)的《几何基础》具有划时代的意义，它使公理化方法上升到高级阶段，成为现代公理化结构的典范。在希尔伯特的基本概念与公理中，包括6个基本概念，即所讨论的三种对象：点、直线、平面，以及对象之间的三种关系：属于、介于、全同于；还包括刻划基本概念的基本性质的五组公理。它们，也只有它们，成为以后逻辑推理的唯一依据。简言之，此一览表给出了初等几何的基础结构。希尔伯特认为，他的系统中的点、直线等究竟指的什么，并不需要指明出来，也不限于特定的对象，既可指通常直觉观念下的点、直线等，也可以指其他的事物；三种关系也不限于特定的关系。不管对基本概念作什么样的理解，唯一重要的是在这种解释下五组公理必须全部都是真实的。因为人们所关心的只是几何命题如何纯逻辑地从这五组公理推得，那么除由公理所表达的基本性质外，基本概念究竟指什么就完全不起作用了。所以希尔伯特的公理系统与欧几里得的有着本质差别。为区别计，欧几里得的称为实体公理化，希尔伯特的称为形式公理化。

从形式公理化的观点来看，在一门数学理论的公理系统中，公理不过是作为该理论出发点的假设；虽然基本概念没有给出直接的定义，但是公理却间接地把它们作为一个整体而规定的。当公理系统的基本概念只能通过公理而确定时，这系统叫做抽象的。这时所要研究的，是这系统由公理所刻划的结构，至于基本概念究竟是什么，除去有关它们如何适应此结构以外，是不必明指的。如果对基本概念是什么而作进一步的指明，就是说，给基本概念以明确的定义，并且要求这个规定能够保证全部公理的真实性，

那么我们便得到该抽象系统的一个模型，或者说得到该系统的一种解释或一种表示。一个抽象系统的模型只能在另外一个现成的系统中实现。即是说，选择另外一个合适的系统，使得该抽象系统的每个基本概念都对应于另一系统的概念，而公理则变成另一系统的定理。一个抽象系统可以有多个不同的模型，它们的共同特征就是都具有该抽象系统的公理所表达的基本性质，除此之外，它们还具有互不相同的其他性态。这些不同的性态对于这门数学理论来说，是完全被抛弃不顾的。不存在模型的公理系统没有现实意义。正是公理系统的抽象性导致了它应用的广泛性。

建立一门数学理论的公理系统，关键在于引进基本概念和刻划基本概念的一组公理。基本概念既是不定义的概念，就应该是必不可少的、最原始最简单的思想规定；公理是对所选基本概念相互关系的规定，这些规定是必要的、合理的。详细说来，公理的选取和设置必须符合三条要求：1.必须是独立的，就是说，其中没有一个公理是其他公理的逻辑推论；2.必须是相容的，就是说，从它们出发推导出来的任何两个定理都不会互相矛盾；3.必须是完备的，就是说，此理论中的每一个定理都能由它们导出。检验一个公理系统的相容性与完备性是很复杂的问题，今后再详细讨论。

必须指出，公理化方法具有分析、整理、总结数学知识的作用。一门数学理论的公理系统只有当理论发展到一定水平后才能产生。数学中重要的发现或者具有实质性内容的见解，不大可能由单纯的公理程序得出，而主要依靠归纳与类比。学习本书时请注意这点。

1.3 记号

书中各章具有相对的独立性。同一章的各节也有属于不同演绎系统的，因此定义与定理是分节编号的。例如定义1与定理2分别指本节的第1个定义与第 2 个定理；引文中出现的定理2-2则指

本章§2的定理2。

书中，记号N、Z、Q、R、C、$^*R$分别专指自然数系、整数系、有理数系、实数系、复数系与超实数系。

如果M是一个集合，p是一个性质，则记号$\{x\in M|px)\}$表示由M中具有性质p的一切元素组成的子集。有时也把它记作$\{x|x\in M$且$p(x)\}$。

$A\subset B$或$B\supset A$表示A是集合B的子集，读作A包含于B或B包含A。集合A与B的并集记作$A\cup B$，交集记作$A\cap B$，差集记作$A-B$。若$B\subset A$，称$A-B$为B在A中的补集，记作C_AB；在不会引起误解的情况下也可简记作CA。集族$\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$的并集记作$\bigcup\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$，交集记作$\bigcap\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$。

函数以及映射、对应、变换、算子等术语均视为同义语。映射f：$X\to Y$是指对每个$x\in X$，指派了唯一的$f(x)\in Y$。f的定义域是集合X，f的值域是Y的子集$\{f(x)|x\in X\}$，记作$f(X)$。若$f(X)=Y$，称映射f是到上的，或者说f是满映射。若任取$x_1,x_2\in X$，当$x_1\neq x_2$时恒有$f(x_1)\neq f(x_2)$，称映射f是一对一的。若f：$X\to Y$是一对一的满映射，也称f是一一对应。此时f的逆映射记作f^{-1}：$Y\to X$。

设$A\subset X$，又映射f：$X\to Y$与g：$A\to Y$满足条件

$$f(x)=g(x),\quad x\in A,$$

则称映射g是映射f在A上的限制，并且记作$g=f|_A$；并称映射f是g在X上的延拓。

设A、B都是非空集合，则集合

$$\{(x,y)|x\in A,\ y\in B\}$$

称为A与B的笛卡尔（R. Descartes，1596～1650）乘积，记作$A\times B$。集A_1，A_2，…，A_n的笛卡尔乘积$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$指集合

$$\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)|x_i\in A_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}。$$

特别，

$$R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_i\in R,\ i=1,\cdots,n\}.$$

假设对一个指标集I的每个元素α，给定了一个集合X_α。集族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$的笛卡尔乘积指对每个$\alpha\in A$使得$x(\alpha)\in X_\alpha$的函数$x: A\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha$的全体组成的集，记作$\times\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$。

§2 从自然数到实数

我们先用一组公理定义自然数系，在这个基础上，顺次扩张得到整数环、有理数域、实数域。每次扩张都是在原数系基础上运用构造方法作出新数系的一个模型。

2.1 自然数

自然数为大家所熟悉，它的各种性质总是直接或间接从自然数的四则运算及序关系出发推导出来的。减法与除法分别是加法与乘法的逆运算，自然数的乘法与序关系又可由它的加法诱导出来，所以加法及其性质是基本的。5＋3可以看作5＋1＋1＋1，就是说，任意两个自然数求和可以由加1这个运算诱导出来。所以加1这个运算及其性质是最基本的。最先是1，1加1得2，2加1得3，……。不但这个程序得到的都是自然数，没有数会重复出现，而且这个程序可以产生全部自然数。每个自然数后面紧跟着另一个自然数。我们把后者叫做前者的后继数。因此求一个数加1的和就是求这个数的后继数。这样看来，自然数之间的后继关系可以作为建立它的公理/系统的起点。皮亚诺（G. Peano，1858—1932）正是这样分析了自然数诸性质之间的逻辑关系，从中抽出后继关系作为不定义的基本概念，并选出几条约束后继关系的性质作为公理，从而形成了他的公理系统。

定义1 如果在一个集合N中规定了一个后继关系，它满足下

列五条公理，就把N叫做自然数系 N的元素叫做自然数：

I　1是自然数；

II　任何自然数都有一个确定的自然数作为它的后继数，数a的后继数记作a'；

III　对任何自然数a，$a' \neq 1$；

IV　对任何自然数a与b，若$a' = b'$，则$a = b$；

V　设M是N的一个子集，并且具有下列两个性质：

1）$1 \in M$；

2）对任何$a \in N$，若$a \in M$，则$a' \in M$。

则M就是N本身。

注：记号$a = b$表示a，b是同一个数。显然关系“$=$”满足反身律（即$a = a$）、对称律（若$a = b$，则$b = a$）与传递律（若$a = b$，$b = c$，则$a = c$）。

定义中的基本概念是集合N，后继关系“$'$”与数1，公理I—V则刻划了它们的基本性质，从而给出了它们的一个隐定义。我们把抽象的自然数系记作（N，1，$'$），一般情况下简记作N。

下面对定义1作些说明。公理IV可换成另一个等价形式：若$a \neq b$，则$a' \neq b'$。公理II、IV说明：后继关系作为映射$'$：$N \to N$，它是一对一的，但不是满映射，1就不属于它的值域。前四条公理与公理V有着本质差异：前者涉及到N的元素，每一次应用公理时所用到的数不超过四个；后者还要说到N的子集，每一次应用公理时，实质上用到了整个N。公理V称为归纳公理，它的直观表述是：从1出发，利用后继关系就可得到全部自然数。后面还要讲到这一点。

评注：从形式公理化角度看，定义1中的集合N是什么？后继关系“$'$”是什么？数1又是什么？都是没有明指的。所以说，定义1规定的自然数系是形式的、抽象的。如何作出N的模型？又要回到现实世界上来。还得用上整数理论。选择某个集合，指定其中一个元素作为1，利用集合中现成运算定义一个满足公理的后继关系，就可得到N的一个模型。后面给出N的几个模型：(1)