高等数学学习指导

——例题习题试题与解答

主编　秦　静　单沪军

主审　刘爱奎

地震出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导:例题习题试题与解答/秦静等主编.—北京:地震出版社,2000.7

ISN 7-5028-1745-X

Ⅰ.高… Ⅱ.秦… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 35366 号

内 容 提 要

本书是高等数学课程的一本有益的教学参考书。全书包括高等数学的基本概念、基本定理与基本解(证)题方法、练习题、模拟试卷、自学考试试卷汇编及提示、详细解答与答案。它有助于读者全面、系统地复习、巩固并加深高等数学知识,掌握解(证)题方法与技巧,提高解(证)题能力及应试能力。

高等数学学习指导

——例题习题试题与解答

主　　编:秦　静　单沪军

责任编辑:王　伟

特约编辑:王保祥

地震出版社出版发行

北京民族南路 9 号

山东工业大学印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　印张 13　348 千字

2000 年 7 月第一版　2000 年 7 月第一次印刷

印数　0001—5000

ISBN 7-5028-1745-X/G·150

(2243)　定价:15.00 元

前　言

高等数学是高等教育中一门重要的基础理论课，它在培养学生能力、开发智力、启发思维等方面都具有重要的作用，将为学生学习相关的后续课程奠定必要的数学基础。

本指导书根据高等院校高等数学教学大纲的要求编写而成，是学习高等数学课程及准备各类高等数学考试的一本有特色的参考书，也是教师讲授高等数学课程的一本有益的参考书。全书共分五个部分，第一部分是高等数学的基本内容与例题选讲及测试题，以易于读者理解和接受的方式与语言，系统而全面地介绍高等数学的解、证题方法和技巧，并对这些方法和技巧进行了归纳与小结；第二部分为高等数学模拟试卷，题目类型全，覆盖面广；第三部分为自学考试试卷汇编；第四部分为测试题、模拟试卷及自考试卷的提示、详细解答与答案；第五部分为客观题 160 道及答案，最后附有 2000 年上半年全国高等教育自学考试高等数学(工)试卷、参考答案及评分标准。

编者多年致力于高等数学的教学工作，积累了丰富

的经验和资料，今日成文，花费了大量心血，只希望能给学习高等数学的广大读者一点点有益的帮助。但因水平所限，不一定能达到理想的效果，疏漏和不足之处在所难免，恳请使用本书的同行和读者批评指正。

本书由秦静、单沪军主编，刘爱奎主审，参加编写工作的还有祝精美、孙儒军、王玮、何贵中。

编　者

2000 年 4 月

第一部分

基本内容与例题选讲

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求

（1）深刻理解一元函数的定义；理解反函数和复合函数的概念，了解函数的四种简单特性——有界性、单调性、奇偶性、周期性，熟练掌握基本初等函数和初等函数。

（2）深刻理解极限的概念；理解无穷小与无穷大的概念及函数连续的概念并了解函数的间断点及其分类。

（3）熟练掌握极限的四则运算法则及两个重要极限；掌握初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质，并能利用这些法则或性质求极限。

二、重点与难点

重点：定义域的求法；极限的求法；函数连续性的判定方法。

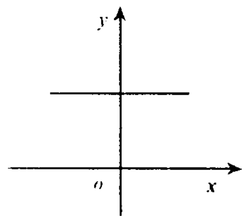
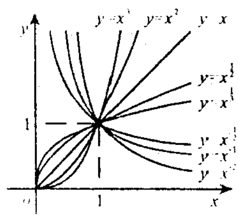
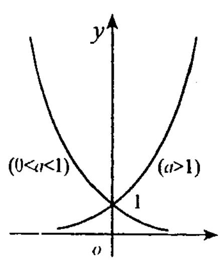
难点：间断点的类型；极限概念。

三、常用公式与定理

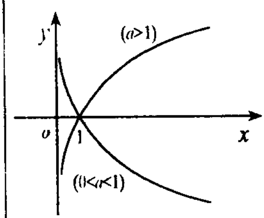
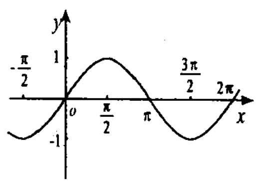
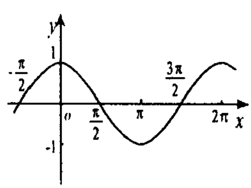
1. 基本初等函数的定义域、图形及特性

基本初等函数的定义域、图形及特性见表 1-1-1.

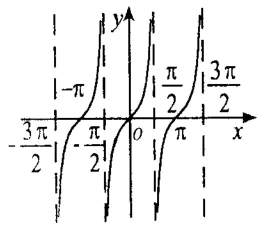
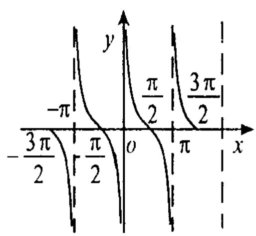
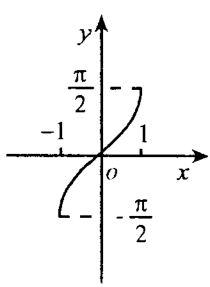
表 1-1-1

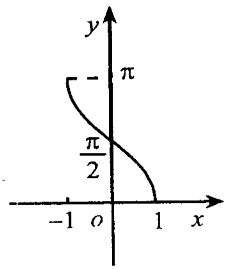
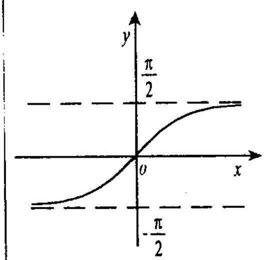
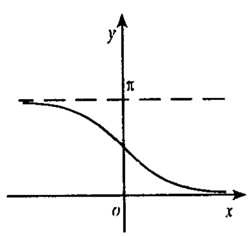
名称	表达式	定义域	图形	特性
常数函数	$y=c$	$(-\infty,+\infty)$		
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有定义。		过点(1,1).在第一象限内当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数；$\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数。
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图象在 x 轴上方(因 $a^x>0$)，且都通过点(0,1). 当 $0<a<1$ 时，a^x 是减函数；当 $a>1$ 时，a^x 是增函数。

续表 1-1-1

名称		表达式	定义域	图形	特性
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图象在 y 轴右侧(因 0 与负数都没有对数),都通过点 $(1,0)$. 当 $0<a<1$ 时,$\log_a x$ 是减函数;当 $a>1$ 时,$\log_a x$ 是增函数。
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数(图形关于原点对称)。图象在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间,即 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$.
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数(图形关于 y 轴对称)。图象在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间,即 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$.

续表 1-1-1

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数，在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是增函数。
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内是减函数。
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数。值域：$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少。值域：$0\leqslant y\leqslant\pi$.
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数。值域：$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少。值域：$0\leqslant y\leqslant\pi$.

2. 极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，即$\alpha(x)$是$x\to x_0$时的无穷小。

3. 极限存在的判别准则

准则1 单调有界数列必有极限。

准则2(夹逼准则) 若在x_0的某个去心邻域内(或在$|x|>N,N>0$时),恒有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$$

4. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小。

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小。

(3) 常数与无穷小的乘积是无穷小。

(4) 有限个无穷小的乘积是无穷小。

5. 极限运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,其中$A,B$为常数,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$

注意:

(1) 极限过程还可以为：$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$，$x \to \infty$.

(2) 对数列极限结论仍旧成立。

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

7. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理 在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最小值。

(2) 介值定理 闭区间上的连续函数能取得介于最小值与最大值之间的一切值。

四、基本方法与典型例题

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ (2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

解：(1) 因为分母不能为零，故欲使 $\dfrac{1}{x}$ 有意义，则 $x \neq 0$；

又欲使 $\sqrt{1-x^2}$ 有意义，必须 $1-x^2 \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

故 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(2) 因为 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，故

$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为 $-1 \leqslant \dfrac{x-1}{2} \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求 $f(\sqrt{x})$，$f(\sin x)$ 及 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域。

解：因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，故 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为 $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$，即 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$f(\sin x)$ 的定义域为 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，即

$$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, \quad k=0,\pm 1,\cdots$$

而 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为二集合

$\begin{cases} 0 \leqslant x+a \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x-a \leqslant 1 \end{cases}$ 的交集。

由 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$ 得 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$

由 $0 \leqslant x-a \leqslant 1$ 得 $a \leqslant x \leqslant 1+a$

故当 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，定义域为 $a \leqslant x \leqslant 1-a$

而当 $a > \frac{1}{2}$ 时，二集合无交，即函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 无意义。

小结：

(1) 要求函数的定义域，一般有两种方法：一是使数学式子有意义，二是使实际问题有意义。

(2) 要做好这类题目，必须熟记一些特殊函数的定义域，如：

有理整函数(多项式)的定义域是全体实数。

有理分式函数的定义域是使分母不为零的所有实数。

奇次根式函数的定义域是使根号内式子有意义的所有实数；偶次根式函数的定义域是使根号内式子大于或等于零的所有实数。

对数函数的定义域是使其真数表达式大于零的所有实数。

反三角函数的定义域为：

$y=\arcsin x$ 与 $y=\arccos x$ 为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$y=\arctan x$ 与 $y=\operatorname{arccot} x$ 为 $-\infty < x < +\infty$

(3) 若要求定义域的函数是由几个函数通过四则运算组成

的，则可先分别求出参与运算的各个函数的定义域，这些定义域的公共部分即为所求函数的定义域。

（4）复合函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 的定义域为这样的 x 值全体：

既要使 $u=\varphi(x)$ 有定义，又要求与它们对应的 u 值都能使 $y=f(u)$ 有定义。

例 3 求函数 $y=\ln x^2$ 的定义域。

解：$y=\ln x^2$ 由 $y=\ln u$，$u=x^2$ 复合而成。

因为 $y=\ln u$ 的定义域为 $0<u<+\infty$，$u=x^2$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$，且当 $x\neq 0$ 时，$x^2>0$，故 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$ 且 $x\neq 0$.

例 4 判别下列函数是否为周期函数，对周期函数求其最小正周期。

（1）$y=\sin(ax+b)$　　（2）$y=\sin^2 x$　　（3）$y=\sin\dfrac{1}{x}$

解：（1）$y=\sin(ax+b)$ 为周期函数，且最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{a}$.

（2）$y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，故其最小正周期为 π.

（3）设 T 是 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的周期，则应有

$$\sin\frac{1}{x+T}=\sin\frac{1}{x} \quad 即 \quad \frac{1}{x+T}=\frac{1}{x}+2\pi$$

由此得 $T=-\dfrac{2\pi x^2}{1+2\pi x}$.

因为 T 是与 x 有关的数，不是常数，故 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 不是周期函数。

小结：

(1) 关于周期，有如下两个公式：

① 若 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数，则 $f(ax+b)$是以$\frac{T}{a}$为周期的周期函数。

② 设 $f_i(x)$是以 T_i 为周期的周期函数$(i=1,2)$，则 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$是以 $T=[T_1,T_2]$为周期的周期函数($[T_1,T_2]$为 T_1 与 T_2 的最小公倍数)。

(2) 求周期函数的周期，一般有两种方法：

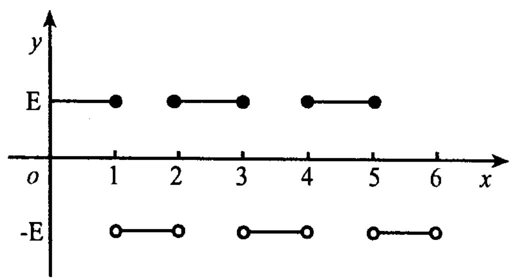
① 利用已有的周期公式及特殊函数的周期求。

② 画出函数的草图并利用图形求。

例 5 求函数 $y=\begin{cases} E & 2n\leqslant x\leqslant 2n+1 \\ -E & 2n+1<x<2n+2 \end{cases}$ 的周期。

$(n=0,1,2\cdots)$

解：画出函数的草图



由图可知，函数的周期 $T=2$.

例 6 判定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(3) $y=\sin x+\cos x$

解：(1) 因为 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，故为偶函数。

(2) 因为

$$\begin{aligned}y(-x)=&\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\\&\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\\&\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\\&-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-y(x)\end{aligned}$$

故为奇函数。

(3) 因为

$$y(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$$

故函数既非奇函数又非偶函数。

小结：

(1) 判断函数奇偶性的方法有两个：

① 借助已知函数的奇偶性判定。

② 用定义判定，即计算 $f(-x)$.

(2) 关于奇偶函数，有公式：

偶 + 偶 = 偶　　奇 + 奇 = 奇

偶 · 偶 = 偶　　奇 · 奇 = 偶

奇 · 偶 = 奇

例 7　求下列函数的反函数：

(1) $y=3x+2$　　(2) $y=\log_{10}(x+\sqrt{x^2-1})$

解：(1) 由 $y=3x+2$ 解出 x，得 $x=\frac{y-2}{3}$，

故反函数为 $y=\frac{x-2}{3}$.