

微波技术与天线

万 伟 王季立 编

西北工业大学出版社

前 言

本书是高等航空院校电子工程与无线电技术专业的教材。内容基本上按照航空工业部航空专业教材第一编审委员会雷达导航专业教材小组所订大纲编写。其中个别章节的次序较之大纲作了某些改动，部分内容也稍有增删。

《微波技术与天线》课程，为无线电技术与电子工程专业的专业基础课。因此，在教材的编写上着重于讲述微波技术与天线的基本原理与基本分析方法。

全书依微波技术与天线分为上、下两篇。

上篇的第一章在《工程电磁场理论》或《电磁场与电磁波》课程基础上阐述微波传输线的一般分析方法及其参数，着重于突出共性。第二章微波网络是从路的观点分析、研究微波传输线和微波无源器件，其中从微波的分布参数结构到等效电路的等效原理、微波网络的描述方法和其特性是本章的重点。第三章讲述微波工程实践中的基本问题：阻抗匹配问题的求解及实现法。第四章定性地叙述了最常应用的各种微波无源器件，主要应该了解扼流连接、定向耦合器及混合桥路的工作原理。第五章空腔谐振器，避开繁冗的场分析，直接利用第一章的结果来展开的。最后两章着重于微波滤波器与微波铁氧体器件的基本原理和基本分析方法的叙述。

下篇第一章是辐射的基本原理，介绍了辅助矢位法和电磁场的积分公式。第二章讲述天线的电参数及接收天线，建立天线特性的基本定量描述，在接收天线理论中主要介绍天线的等效噪声温度。第三章是在《电磁场与电磁波》课程基础上，叙述基本电振子的工程分析。第四章阵列天线，是天线型式中具有重要意义的基本内容。第五章面天线的基本理论，是本书的重要内容。第六、七两章介绍了目前常用的面天线的基本分析方法及其构成。第八、九章介绍了两种体制的天线，着重于天线本身的分析。这样的处理对于电子工程和无线电技术专业来说也是适宜的。

本书分基本内容和选修内容两部分，带有“*”号的章节为选修部分。对于基本内容的教学，可根据教学时数的安排等具体情况决定取舍。

本书由西北工业大学万伟主编，南京航空学院王季立参加编写。编写内容的具体分工为：上篇由万伟编写，下篇由王季立编写，并由万伟统编全稿。在编写过程中得到两校有关教研室及领导的关怀与支持；北京航空学院吕善伟副教授和江贤祚同志对原稿进行了认真的审阅，并做出了极为有益的指正，编者在此一并致以诚挚的谢意。

由于我们的水平所限，以及教学实践还不充分，对所述内容的取舍难免有所偏颇，其中的错漏不当之处一定不少，恳切希望广大读者批评指正。

编 者 1986.1.20

目 录

上 篇

引 言	1
第一章 微波传输线	4
§ 1—1 马克斯韦方程	5
§ 1—2 规则波导	13
§ 1—3 TEM 型波的导波系统	31
§ 1—4 传输线上波的工作状态	44
第二章 微波网络基础	48
§ 2—1 传输线的类比	48
§ 2—2 微波多端口网络的一般理论	50
§ 2—3 二端口网络	64
§ 2—4 三端口及四端口网络的基本定理	74
第三章 阻抗匹配	80
§ 3—1 阻抗圆图	80
§ 3—2 借助于电抗元件的阻抗匹配	83
§ 3—3 双电抗元件匹配器	86
§ 3—4 波导电抗元件	88
§ 3—5 阶梯阻抗变换器	90
§ 3—6 渐变传输线	96
第四章 微波无源器件	99
§ 4—1 终端器件	99
§ 4—2 波导的扼流连接与旋转接头	103
§ 4—3 不同传输线之间的变换	105
§ 4—4 衰减器	106
§ 4—5 互易相移器	108
§ 4—6 定向耦合器	111
§ 4—7 混合接头	120

第五章 空腔谐振器	126
§ 5—1 概述.....	126
§ 5—2 同轴线形谐振器.....	128
§ 5—3 矩形空腔谐振器.....	132
§ 5—4 圆柱形空腔谐振器.....	134
* § 5—5 空腔谐振器的微扰.....	137
第六章 微波滤波器	140
§ 6—1 基本定义.....	141
§ 6—2 用插入衰减法设计滤波器.....	141
§ 6—3 具有最佳频率特性的低通原型滤波器.....	142
§ 6—4 频率变换.....	144
§ 6—5 应用传输线段实现微波滤波器.....	147
§ 6—6 以传输线中两个分散不均匀性构成的谐振器.....	149
§ 6—7 四分之一波长耦合和直接耦合级联谐振器的微波滤波器.....	151
第七章 微波铁氧体器件	154
§ 7—1 旋磁导磁率与谐振吸收现象.....	154
§ 7—2 法拉第旋转效应.....	159
§ 7—3 微波铁氧体线性器件.....	161
参考书目	168

下 篇

引 言	169
第一章 辐射的基本原理	173
§ 1—1 马克斯韦微分方程组及解.....	173
§ 1—2 基本电振子的辐射.....	179
§ 1—3 基本磁振子的辐射.....	181
§ 1—4 基本缝隙的辐射.....	184
§ 1—5 基本面元的辐射.....	186
第二章 天线的电参数及接收天线	189
§ 2—1 方向性函数.....	189
§ 2—2 天线效率.....	192
§ 2—3 方向性系数.....	192
§ 2—4 增益系数.....	194

§ 2—5 天线的阻抗特性·····	195
§ 2—6 天线的工作频带·····	195
§ 2—7 互易原理·····	196
§ 2—8 天线的有效面积·····	200
§ 2—9 接收天线的噪声温度·····	201
第三章 对称振子 ·····	206
§ 3—1 对称振子上的电流分布·····	206
§ 3—2 对称振子的辐射场·····	207
§ 3—3 对称振子的阻抗特性·····	211
§ 3—4 对称振子的方向性系数及有效长度·····	219
§ 3—5 对称振子的馈电方法·····	220
§ 3—6 折合振子·····	222
第四章 阵列天线 ·····	226
§ 4—1 增强方向性原理和方向性乘积定理·····	226
§ 4—2 天线的互耦·····	245
§ 4—3 地面对天线性能的影响·····	249
* § 4—4 幅度非均匀分布的天线阵列·····	256
§ 4—5 引向天线·····	269
§ 4—6 缝隙天线·····	276
第五章 面天线的基本理论 ·····	289
5—1 概述·····	289
5—2 平面口径远区辐射场的一般公式·····	291
5—3 面天线的方向性系数和面积利用系数·····	292
5—4 同相矩形和圆形口径的辐射场·····	293
5—5 口径场的相位分布对辐射场的影响·····	303
第六章 喇叭天线 ·····	309
§ 6—1 概述·····	309
§ 6—2 矩形喇叭天线的内场·····	310
§ 6—3 矩形喇叭天线口径上的场·····	313
§ 6—4 矩形喇叭天线方向图 and 方向性系数·····	315
§ 6—5 矩形喇叭天线的工程设计·····	320
* § 6—6 圆锥喇叭概述·····	323
* § 6—7 波纹喇叭概述·····	326
* § 6—8 喇叭天线的相位中心·····	331

* § 6—9 圆极化天线概述.....	333
第七章 反射面天线	339
§ 7—1 概述.....	339
§ 7—2 抛物面天线的几何特性.....	340
§ 7—3 旋转抛物面天线的口径场分布.....	343
§ 7—4 旋转抛物面天线的增益.....	347
§ 7—5 抛物面天线的结构.....	351
* § 7—6 赋形波束天线.....	357
§ 7—7 双反射面天线.....	367
第八章 单脉冲天线	381
§ 8—1 单脉冲天线的工作原理.....	381
§ 8—2 单脉冲天线的分析.....	385
§ 8—3 馈源的最佳激励.....	387
*第九章 相控阵天线	392
§ 9—1 概述.....	392
§ 9—2 相控阵天线的工作原理.....	393
§ 9—3 波束扫描特性的分析.....	394
§ 9—4 互耦影响的分析方法.....	396
参考书目	398
附 录 (另册)	

上 篇

引 言

一、微波频率及其应用

微波技术是研究频率范围大致从 10^9 到 10^{12} 赫芝（相当于波长由 30 厘米到 0.3 毫米）的信息处理系统的技术。根据波长的划分可以把微波分为：分米波、厘米波、毫米波。波长小于 1 毫米到百分之几毫米的电磁波，称为超微波，或亚毫米波。

在低频率下，电子设备的尺寸远远小于波长。因此，可以认为稳定状态的电压和电流的效应是在整个系统各处同时建立起来的。当系统的各种不同元件用一定的参量来表征时，所有这些参量既不依赖于时间，也不依赖于空间。这就是把元件视为“集总”参量的电路分析观点。熟知的基尔霍夫定律能圆满地解决实际问题，无须深究系统中复杂的电磁场结构。微波的特点是它的波长短，与所使用的电路尺寸属于同一数量级，这意味着由电路的一点到另一点电效应的传播时间与系统中电流和电荷的振荡周期可以比拟。因此，微波的产生、传输、放大、辐射等问题都不同于低频技术。在微波系统中，元件的性质不能认为是集总的，以基尔霍夫定律和电压电流概念为基础的低频电路分析方法，就不足以恰当地描述微波工程中所发生的电现象，从而必须改用和器件有关的电场和磁场来进行分析。所以在一定意义上来说，微波工程本质上就是应用电磁场工程。

微波所以能够引起人们很大的兴趣，是因为有各种原因的。最根本的原因是由于对无线电频谱空间的需要不断地增长，而只有微波频率的开拓才能解决这一问题。

在近几十年的研究过程中，微波传输设备和微波电子设备，在技术上业已发展得相当完善和成熟了。这些设备不仅在实验室内使用，而且在国防上和国民经济上有着极为重要和极为广泛的应用。其中以雷达，通讯和导航等最为主要。

雷达是在第二次世界大战期间，由于需要有能够对敌机和敌舰船进行探测和定位而迅速发展起来的一门新技术。早期的米波雷达只被用作侦察敌情，搜索敌机和敌舰。有了微波雷达之后，才能发现较小的目标，例如战场上的坦克等。雷达由米波到微波的进展，大大地促进了微波系统的发展，因此在某种程度上可以说微波工程几乎是雷达工程的同义语。在战后，雷达的发展更为迅速，应用更加广泛，现代雷达不仅能够确定出快速飞行体的坐标，而且还能够控制导弹和炮火，跟踪卫星，侦察洲际导弹和宇宙火箭，测定炮位。所有这些都是和微波技术与微波电子学的发展分不开的。

现在，微波频率已经广泛地应用于通讯上，即通常所指的微波接力通讯线路，微波散射通讯。还有另一种更有意义的通讯方式是卫星通讯。

微波能够在通讯上获得广泛应用，是由于微波既是一个频率很高的波段，也是一个频带

很宽的波段。它的频带包含了上千个由 0 到 10^9 赫芝的频带，即比长波、中波、短波和超短波的频带之和还要宽一千倍左右。采用微波可以传递多路电报，电话和电视信号。比如，大量电视节目的传送，就是把这些节目调制到单一的载波上，因为每路黑白电视节目约需 6 兆赫的带宽，所以一百路这种节目就需要 600 兆赫的总带宽；为了便于加工调制载波，调制边带只为载波频率的百分之几，可见，为了在一条线路上有效地传送许多电视节目，载波频率必须在微波范围。再如，在载波频率 10^4 兆赫下，取它的百分之 0.01 频带就有 1 兆赫宽，假使利用单边带传输，可以容纳 10^4 路电话。在这样高的频率下，采用脉冲编码调制是适宜的，这样，传输容量和品质又获得进一步改善。可见，微波通讯不但解决了低通讯波道拥挤的困难，而且还有通讯容量高，抗干扰强等优点。

微波和微波技术在其它科学领域内的应用还在扩展着，许多新兴的学科分支，如无线电光谱学，无线电天文学，无线电气象学，微波固体电子学等，都是建立在微波的基础上的。

用并联元件周期性加载的波导，能保持远小于光速的慢波，因而被用于直线加速器中。在原子和原子核的研究中，用直线加速器可产生高能的带电粒子束。慢电磁行波能十分有效地同具有相同速度的带电粒子束相互作用，从而把能量给予带电粒子束。

利用高灵敏度的微波接收机，可以探测和研究在这一波段由太阳和若干射电星体发出的电磁辐射。利用雷达，也可以把无线电脉冲送到天体，并接收反射回来的脉冲。这就形成了一个新兴的科学分友，即射电天文学，它的发展不仅能够发现过去没有被发现的星体，而且还能使天文学从纯粹观测的科学提高到可以进行一定的实验的程度。

利用高灵敏度的微波接收机，可以探测等离子体辐射的噪声，从所得的数据可供研究者分析和预报形成等离子体辐射的各种机制。

雨、雪、云、雾对微波都有程度不同的吸收和反射，因而，可以利用厘米波和毫米波雷达来观测它们的存在和流动。这种气象雷达可以预报邻近地区的天气情况，包括风速、风向、雨、雪的分布，云层的高度和厚度。

在外加电磁场的周期作用下，分子，原子和核子呈现种种谐振现象。这些谐振现象大多发生在微波范围内。因而，在研究材料的基本性质时，微波是很有力的工具。从这种基础研究中，已经产生了许多有用的器件，比如，某些微波铁氧体非互易器件，几种固体微波放大器和振荡器，如微波量子放大器，参量放大器及相干光发生器等。

最引人注目的是激光器，它基本上是一种单色相干波发生器，这种器件的研制大大引起了人们对光波波长上发展通讯系统的兴趣，并已获得成功。尽管这个波段被称为超微波波段，但是对许多微波工艺作一些改变，就可以用于研制光学系统。因此，熟悉一般的微波理论和器件，将对电磁频谱新领域的工作，打下很好的基础。

此外，微波在医学和工业上也有着广泛的应用。

这里，不可能对微波所有应用作全面的说明，但是，仅就上面的一斑，就足以使读者深信这一段无线电频谱有许多不同寻常的和独有的特征。虽然现在可以认为微波工程领域是一门相当成熟和发达的科学，但是进一步发展微波器件、技术，并应用于无线电工程、工业以及基本科学研究，仍然有极好的机会和广阔的前景。

二、微波电路元件及其分析方法

前面我们业已指出，在微波频率系统的电尺寸与工作波长是同一数量级，有时电系统的

尺寸远大于工作波长，存在于系统中的传播效应就不能忽略了。另外，系统中的联接线、探头等的阻抗，以及分布电容和电感的影响相对地增大了，在尺寸和波长相差无几的未屏蔽电路中，环行的电流辐射电磁现象非常显著。所有这些作用的结果使经常用到的低频元件和电路，多不适用于微波。实际上，它们全然失效。

虽然，实际的低频电阻、电容和电感，在微波频率下的工作状态已不能满足要求，但这并不意味着在微波频率下，就不能制成这种广义意义下的耗能（电阻）和储能（电容和电感）元件。恰恰相反，有许多等效的电容器件和电感器件用于微波频率。它们的几何形状虽不尽相同，但它们可能而且正在被用于颇为相同的目的，如用来构成匹配电路、谐振电路等。在电性能上最明显和最重要的差别是在微波频率下这些等效电感和电容，一般与频率有相当复杂的依赖关系。

对微波电路的重要要求之一，是能够把信号功率由一点传送到另一点而无辐射损耗。这就要求以传播波的形式来输送电磁能。已经存在着能够把电磁波由一点引导到另一点而没有辐射损失的各种各样的导波系统。从理论分析的观点来看，最简单的导波结构是传输线。其中如双导线、同轴线、带线等都是较低微波频率下常用的。在较高的微波频率上，最常用的是矩形波导和圆波导。

传输线的一个特点是：可以把它当作分布参数网络，并通过求解沿线传播的电压和电流波，从而对其特性做出满意的分析。对于其它的波导，虽然它们有某些特性和传输线相似，但必须作为电磁场的边值问题来处理，因而必须求其电磁场的解。对普通波导来说，要作到这一点是不难的。对于波导，由于不可能定义出与传输线具有同样意义的唯一的电压和电流，所以我们才在微波频率上强调场的观点。

在微波频率下，感性和容性元件具有各种形式，最简单的是传输线和波导的短路段。根据线长的不同，它们呈现电纳的大小可由负无穷大到正无穷大变化，因而可以起感性元件和容性元件的作用；它们既可以作为串联连接，也可以作为并联连接。在波导中，各种各样的不均匀性也起并联电纳的作用，它们呈感性还是呈容性，取决于不均匀处边缘场中是储藏的磁能多还是电能多而定。

低频和微波频率都用谐振电路，来控制振荡频率和实现频率滤波。在低频时，这种作用是由电感和电容串联或并联来完成的。当储藏的平均电能和磁能相等时就发生谐振。此能量在振荡的一个周期内，来回交替地储存于电感周围（磁能）和电容两板极之间（电能）。在微波频率下，用一个封闭的导体腔，即空腔谐振器来代替 LC 电路。电能和磁能以场的形式储藏在空腔内。与低频的 LC 谐振电路不同，空腔谐振器存在着无数个分立的谐振频率；在任一谐振频率附近，谐振腔的输入阻抗具有与通常的 LC 谐振电路同样的特性。值得注意的是，空腔谐振器的 Q 值非常高，远大于低频 LC 电路所能得到的 Q 值，往往可达 10^4 。

用几段传输线或波导把若干个微波器件连接起来，就得到微波电路，对这些电路的性能，或者用等效电压波和电流波，或者用传播波的幅度来进行分析。用第一个方法，导致使用等效阻抗来描述，与低频中的分析形式上没有任何差别。而用第二个方法则强调场的波动性质，并归结为散射矩阵形式。在我们以后的讨论中，这两种方法都使用。由于所有微波电路的分析，或者直接地或者模拟地以传输线电路分析作基础，所以这部分内容和能够沿波导传播以及能够存在于谐振腔内的电磁场的分析与求解一样，都应是学习微波技术所必须熟悉和掌握的主要部分。

第一章 微波传输线

在微波频率下，把电磁能量由系统的某处输送到另一处，而不发生能量辐射的系统称之为导波系统。常常使用的导波系统有传输线和波导。通常对传输线和波导有两个最基本的要求，即：在一个宽频带内保证单模传输和沿线能量的传输损耗很小。对不同波段，满足这两个基本要求最常使用的导波系统形式示于图 1.1 中。

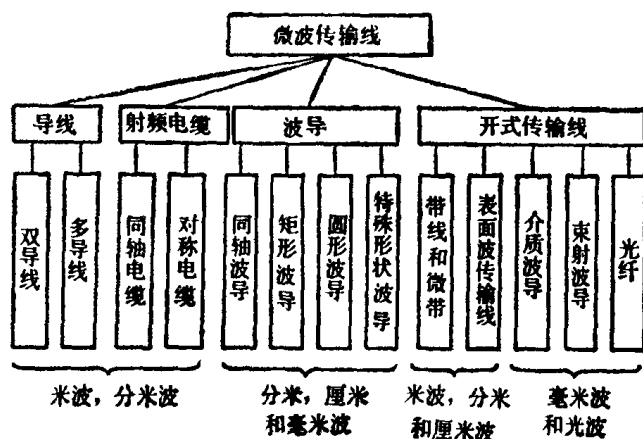


图 1.1 导波系统的类型

就其结构而言，大致可分为三种类型：传输线、闭合的柱形导电管、开式结构。这三种导波系统各有其特点，它们的变化是随着频率的增高而辩证地发展着。

传输线的一般形式是双导线系统。在频率较低时，把能量从源传输到负载只要使用开放的双导线就行了。在频率很高，即波长减小到与两根导线之间距可以比拟时，能量通过导线辐射到空间的部分急剧增大；这样，在高频下双导线犹如天线一般，使得传送到负载的能量大为减小。因此这种双导线不能用来传输频率很高的微波。

为了避免辐射损耗，可采用封闭的双导线或同轴线（如图 1.2 b）。同轴线可看作为以双导线的其中之一为轴，另一导线为母线围绕轴线旋转而形成。这样一来，电磁场就被限制在内、外导体之间的空间里。因此，同轴线是微波范围里广为使用的双线系统。

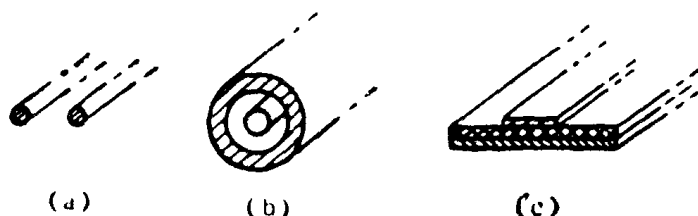


图 1.2 双线传输系统

但是，当频率升高时，同轴线的横向尺寸相应地要减小，随之出现了新的矛盾。同轴线使用在厘米波段中，主要缺点是传输功率受到了限制；另一方面随着波长的减小，存在着比较大的导体损耗，而恰好损耗的主部是来自横向尺寸较小的内导体。基于这些原因，同轴线

不能工作于很高的频率。

既然同轴线中的主要矛盾集中于内导体，那么取掉这个导体，就由同轴线变成了空心的金属管，即波导。波导的通用形式是矩形波导和圆柱形波导（图 1.3 a), b) ）。它的特点与双导线系统比较具有较小的损耗和大的功率容量，不足处是频带较窄。

随着空间技术的发展，设备的体积和重量成为一个主要指标，波导系统呈现出一系列不足，已不能适应发展的需要，于是又出现了微带（图 1.2 c)）等一系列适合微波集成电路要求的双导线或多导线传输线，以及适于准光技术的开式传输系统。

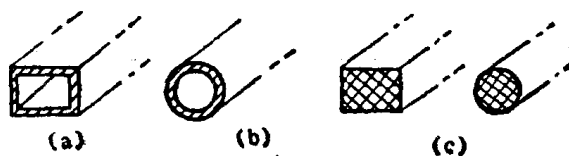


图 1.3 波导

本章我们讨论传输线和空心波导，主要是同轴线和通用波导的基本电磁理论分析。由于被研究的传输线和波导其几何形状在大多数情况下是一柱形系统，假定它们的电特性和横截面形状沿轴线保持恒定，也就是沿轴线系统是均匀的。传输系统所处的空间状态是以媒质的电容率 ϵ 和导磁率 μ 来表征的。

应该指出，一经熟悉对同轴线与通用波导的基本理论分析，经不太复杂的变换与修正就不难把它推广到一些特殊的结构形式。同时，这些基本理论是分析微波无源电路的基础。

§ 1-1 马 克 斯 韦 方 程

一、直角坐标系中的马克斯韦方程

如所周知，电磁场是通过电场强度 $\mathbf{E}$ ，磁场强度 $\mathbf{H}$ 以及电位移 $\mathbf{D}$ 与磁通密度 $\mathbf{B}$ 来描述的，它们的定义也是大家早已熟悉的了。另一方面，由电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 来描述电荷的存在与运动。

这些量是用马克斯韦方程联系起来的，用它可以描述时变电磁场的物理规律。这些方程的绝大部分是由一些研究工作者从实验中得出的，其微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

全书采用 S I 单位制，于是：

$\mathbf{E}$ —(伏/米)

$\mathbf{D}$ —(库/米²)

$\mathbf{H}$ —(安/米)

$\mathbf{B}$ —(特斯拉)

$\mathbf{J}$ —(安/米²)

ρ —(库/米³)

方程(1.1)和(1.4)是麦克斯韦的第一方程组(齐次方程组),而方程(1.2)和(1.3)是第二方程组(含有自由项的方程组)。方程(1.1)-(1.4)是相容的,因为 ρ 和 $\mathbf{J}$ 之间存在如下关系

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.5)$$

即电荷是守恒的。

我们经常研究的是电容率为 ϵ 和磁导率为 μ 的媒质中的电磁现象,并满足

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中 ϵ 的单位为法/米; μ 的单位为亨/米。

真空中的电容率和磁导率为

$$\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12} \quad (\text{法/米})$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.257 \times 10^{-6} \quad (\text{亨/米})$$

空气中的 ϵ 和 μ 与真空中的值非常接近,所以一般可以认为空气中的 $\epsilon \approx \epsilon_0$, $\mu \approx \mu_0$ 。

假定在我们研究的系统内媒质是均匀、线性及各向同性的,即 ϵ 和 μ 与坐标、时间、场强等诸外界因素无关的恒定常数。那么对其可依下式定义相对电容率 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0, \quad \mu_r = \mu/\mu_0$$

同时,假定被研究的空间里既没有电荷,也没有电流即 $\rho = \mathbf{J} = 0$ 的状态。此外,所讨论的电磁过程是时谐的,场随时间依正弦规律变化,用复数 $e^{j\omega t}$ 来表示,其角频率为 ω 。

在这些假定下,我们常使用方程(1.1)-(1.4)的下述形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.4a)$$

由(1.1a)、(1.2a)容易证明,麦克斯韦方程可导得如下的方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

其中 ∇^2 为拉普拉斯算子,在直角坐标系中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。方程(1.7)说明,电磁场在特性常数为 ϵ 和 μ 的媒质中以速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 来传播。尤其是,在真空中电磁场则是以光速 v_0 来传播。这就是已为人们所共知的光学的电磁理论基础。

对于时谐场,方程(1.7)改写为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

即为在媒质中的波动方程。

在真空中, $\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$ 。记号

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

为电磁波在自由空间的相位常数或波数。 k_0 与电磁波的频率 f ,自由空间中的波长 λ 以及真

空气中的光速 $v_c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 之间有如下关系

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi f}{v_c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.9)$$

因此，在真空中 (1.8) 式变为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

这样，很容易求出自由空间中方程 (1.1 a) - (1.4 a) 和由它们导出的方程 (1.10) 的特解，这个解为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \frac{\sin}{\cos} [\omega t - k_0(\xi x + \eta y + \tau z)] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \frac{\sin}{\cos} [\omega t - k_0(\xi x + \eta y + \tau z)] \end{aligned} \quad (1.11)$$

为一单色平面波，其中 ξ 、 η 、 τ 是波传播方向单位矢量 $\mathbf{n}$ 的方向余弦。矢振幅 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$ 的相互关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}_0 &= (\mathbf{n} \times \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{E}_0) \end{aligned} \quad (1.12)$$

这样，场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 是横向的，即两个矢量垂直于波传播方向；此外，在自由空间中电场与磁场矢量彼此正交，而其量值之间的比，由 (1.12) 式可见，在我们所使用的单位制里，恰为自由空间的特征阻抗： $Z_0 = |\mathbf{E}_0|/|\mathbf{H}_0| = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 。

诚然，单色平面波是一个特解，那么还存在许多其它形式的解。然而，由付利叶定理得出，(1.1a)-(1.4a) 方程的所有非奇异解可看作是有限或无限多个单色平面波的迭加。

最后我们回忆一下电磁能和能流密度的定义。在存在电磁场的空间里，每一个电荷元 ρdv 受到电场力 $\rho \mathbf{E} dv$ 的作用，还要受到电磁力的作用，电磁力的大小正比于电荷元处磁场强度 $\mathbf{H}$ 和电荷位移速度 $\mathbf{v}$ 的矢量积。由于电磁力垂直于速度矢量，所以它不作功。因此，在电磁场作用下带电体于 dt 期间所作的功等于

$$dL = dt \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \rho dv = dt \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dv \quad (1.13)$$

假定在无穷远处电磁场等于 0，(1.13) 式中的 $\mathbf{J}$ 由 (1.2) 所得的表示来代替，并计及到 (1.1)，求得：

$$\begin{aligned} dL &= dt \int \mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) dv \\ &= -dt \int \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \right] dv \\ &= -dt \int \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \right] dv \\ &= -dt \int \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] dv \end{aligned} \quad (1.14)$$

考虑到场和感应强度之间满足于 (1.6) 关系，得到

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int \left[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})/2 + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})/2 \right] dv \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) dv \end{aligned} \quad (1.15)$$

值

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}] \quad (1.16)$$

是电磁场的能量密度。

如果被研究的是由封闭表面 S 所限定的有限空间 V ，在其中电磁场不为零，于是求得

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv = \frac{\partial L}{\partial t} + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n d\sigma \quad (1.17)$$

其中 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_n$ 表示 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 矢积垂直于 S 表面的分量。于是，我们看出矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.18)$$

应是穿过单位表面的电磁能通量，这就是坡印亭能流密度矢量。

二、电磁场量的复数表示

在光学和电磁学中，所讨论的场的时间变化函数是简谐的，可以利用复数量使数学分析大为简化。这种方法的基础是欧拉恒等式

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 。此式表明实数正弦型函数和复数指数间的关系。

作为例子，我们取单色平面电磁波中的一个分量 E_x 来进行讨论，由前述设

$$E_x = |E_x^0| \cos[\omega t - k(\xi x + \eta y + \tau z) + \varphi]$$

为了简明起见， z 轴沿波传播方向，这样

$$E_x = |E_x^0| \cos[\omega t - k_z z + \varphi]$$

式中 $|E_x^0|$ 是实常数， φ 也是实数。现在利用复数来表示上式

$$E_x = E_x^0 e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (1.19)$$
$$E_x^0 = |E_x^0| e^{j\varphi}$$

此处 E_x^0 是复振幅，同时包括实振幅 $|E_x^0|$ 和相位 φ 。 $(\omega t - k_z z)$ 函数确定了沿正 z 轴方向传播的波；如果在(1.19)式中以 $-z$ 代替 z ，我们便得到同一频率和同一复振幅，但在负 z 方向上传播的波的复数表示。这样两个相反方向传播波的迭加，便形成了驻波。对驻波而言，

E_x 将正比于 $\frac{\sin}{\cos} k_z z e^{j\omega t}$ 。

当只在线性方程和线性运算中，使用电磁场的复数表示不会发生错误，而且十分方便。但是在非线性关系中，例如在 w 、 $\mathbf{S}$ 的表示式(1.16)和(1.18)中使用复数，则不能导出如同在实数条件下获得的同样结果，所以在分析非线性量值时往往需要回到实数表示去。但是，在讨论高频电磁波时，使用场的复数表示，对于较快地计算类似于(1.16)和(1.18)式的平均值是十分方便的。

假使有一简谐电磁场，在实数描述下，可以把它表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= |\mathbf{E}_0(x, y, z)| \cos(\omega t + \varphi) \\ \mathbf{H} &= |\mathbf{H}_0(x, y, z)| \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.20)$$

式中 $|\mathbf{E}_0|$ 和 $|\mathbf{H}_0|$ 是 x, y, z 的实矢量函数， φ 可以是实常数或 x, y, z 的实函数。现在来计算 w 和 $\mathbf{S}$ ，把(1.20)代入到(1.16)和(1.18)，我们求得

$$w = \frac{1}{2} [\epsilon |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \mu |\mathbf{H}_0|^2 \cos^2(\omega t + \varphi)]$$

$$S = [|E_0| \times |H_0|] \cos^2(\omega t + \varphi)$$

现在用复数表示场量, 通过

$$\begin{aligned} E &= E_0(x, y, z) e^{j\omega t} \\ H &= H_0(x, y, z) e^{j\omega t} \\ E_0 &= |E_0| e^{j\varphi}, \quad H_0 = |H_0| e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (1.21)$$

来代替(1.20), 于是以

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4} [\varepsilon E \cdot E^* + \mu H \cdot H^*] = \frac{1}{4} (\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2) \\ S &= \frac{1}{2} E \times H^* \end{aligned} \quad (1.22)$$

来代替(1.16)和(1.18)。其中“*”号表示复数的共轭值。我们是根据下述原因来采用(1.22)式的: 对于高频电磁场实际观察到的只是 w 和 S 值的时间平均值。如果依(1.20)式来计算平均值, 则求得

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{4} [\varepsilon |E_0|^2 + \mu |H_0|^2] \\ \bar{S} &= \frac{1}{2} [|E_0| \times |H_0|] \end{aligned} \quad (1.23)$$

这些值同我们把(1.21)代入(1.22)式所得的结果完全一致。

于是, 我们看到使用场的复数表达的形式, 由(1.22)式直接得到 w 和 S 的平均值, 这是我们唯一感兴趣的。由于这个原因大家都喜欢采用它。

这里要特别指出, 在近代电磁场的量子理论中, 场的复数表示不只是数学方法, 而具有更深刻的物理意义。在这些理论中(1.22)类型的公式起着重要的作用。

三、正交曲线坐标系中的马克斯韦方程

现在我们引入经常使用的曲线坐标系, 而且在所有被研究的问题中这种曲线坐标系总是正交的(图 1.4)。所以, 我们必须知道马克斯韦方程在这种坐标里的写法。

在正交曲线坐标里, 长度元的平方可以写成为

$$ds^2 = (e_1 du_1)^2 + (e_2 du_2)^2 + (e_3 du_3)^2 \quad (1.24)$$

其中 u_1, u_2, u_3 是三个坐标, 而 e_1, e_2, e_3 是曲线坐标的拉姆系数。

研究属于坐标面中的一个面元, 并应用斯托克斯定理, 容易证明矢量关系

$$A = \nabla \times B \quad (1.25)$$

这些矢量沿所选择曲线坐标轴的分量间的联系, 可以写成为下述三个关系式:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} e_3 B_3 - \frac{\partial}{\partial u_3} e_2 B_2 \right) \\ A_2 &= \frac{1}{e_3 e_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} e_1 B_1 - \frac{\partial}{\partial u_1} e_3 B_3 \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

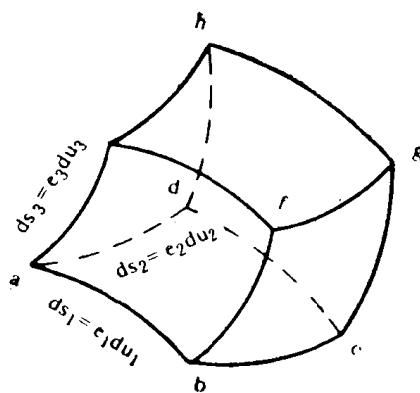


图 1.4 正交曲线坐标

$$A_3 = \frac{1}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} e_2 B_3 - \frac{\partial}{\partial u_2} e_1 B_1 \right)$$

另一方面，于 du_1 、 du_2 、 du_3 三个元所构成的无限小平行六面体运用格林定理，证明

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} e_2 e_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} e_3 e_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} e_1 e_2 A_3 \right] \quad (1.27)$$

这样，在正交曲线坐标中马克斯韦方程为

$$\begin{aligned} -\mu e_2 e_3 \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_2} e_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial u_3} e_2 E_2 \\ -\mu e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_3} e_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial u_1} e_3 E_3 \\ -\mu e_1 e_2 \frac{\partial H_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_1} e_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} e_1 E_1 \\ \epsilon e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_2} e_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial u_3} e_2 H_2 \\ \epsilon e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_3} e_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial u_1} e_3 H_3 \\ \epsilon e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u_1} e_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} e_1 H_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} e_2 e_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} e_3 e_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} e_1 e_2 H_3 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} e_2 e_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} e_3 e_1 E_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} e_1 e_2 E_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

对于时间的简谐场，运用这些方程时，意味着以 $j\omega$ 来代替 $\frac{\partial}{\partial t}$ 。

四、矢量位和赫芝矢量

由 (1.4) 可见 $\mathbf{B}$ 是无源的，可以通过一个矢量 $\mathbf{A}$ 的旋度来表出

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.29)$$

如果将 (1.29) 代入 (1.1)，即得到

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

可见 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 是个无旋矢量，因而可用标量函数 φ 的梯度表示，则有

$$\mathbf{E} = - \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1.30)$$

(1.29) 和 (1.30) 式是通过位函数来表示电磁场矢量 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{E}$ ，其中矢量函数 $\mathbf{A}$ 被叫做矢量磁位，而标量函数 φ 被称为标量位。

把 (1.29) 和 (1.30) 代入含有自由项的马克斯韦方程组，可得到新的方程

$$\begin{aligned} \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi &= \rho / \epsilon + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \\ \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} - \nabla \left(\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

在我们的讨论中只有场才有物理意义，而位函数只是用于简化计算的中间量，因而它们

就具有很大的任意性，即 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 不能唯一地由 $\mathbf{A}$ 、 φ 确定。例如，在矢量 $\mathbf{A}$ 和标量 φ 下，根据(1.29)和(1.30)假定得到已知场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ ，那以在位函数

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla F, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial F}{\partial t}$$

条件下，由(1.29)和(1.30)式得到同样的场。其中 F 是 x 、 y 、 z 、 t 的任意函数。位函数的这种不确定性可用一附加条件而予以限制。洛伦兹所给的限制条件是

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1.32)$$

这样一来，(1.31)式简化为

$$\begin{aligned} \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi &= \rho/\epsilon \\ \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J} \end{aligned} \quad (1.33)$$

可见，在满足(1.32)条件下，位函数在真空中($\rho = \mathbf{J} = 0$)以光速 v_0 传播。

当在 $\rho = \mathbf{J} = 0$ 的无源区进行讨论时，马克斯韦的第二方程组的自由项为 0，因而两组方程之间的不对称性也消失了。此时， $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 。

类似于矢量磁位的讨论，由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ，我们可以引入矢量电位 $\mathbf{A}^*$ ，使

$$\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{A}^* \quad (1.34)$$

把它代入(1.2)式($\mathbf{J} = 0$)，并引入标位 φ^* ，则得到

$$\mathbf{H} = -\left(\nabla \varphi^* + \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right) \quad (1.35)$$

在 $\mathbf{H}$ 的表示式中，符号的变化是由于马克斯韦两组方程间 $\partial/\partial t$ 项的符号不同而引起的。矢量位 $\mathbf{A}^*$ 和标量位 φ^* 之间的洛伦兹条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^* + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = 0 \quad (1.36)$$

则把(1.34)和(1.35)代入马克斯韦的第一方程组(1.1)与(1.4)式，可见

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi^* &= 0 \\ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A}^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

换句话说，矢量位 $\mathbf{A}^*$ 和标量位 φ^* 以光速传播。

现在转到赫芝矢量的讨论。

作为矢量计算，有时我们不取 $\mathbf{A}$ ，而引入一个所谓电赫芝矢量 $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{H}$ 可以取成为

$$\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \varphi = -\nabla \cdot \mathbf{H} \quad (1.38)$$

它满足于(1.32)式，显然在无源的真空中

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.39)$$

$\mathbf{H}$ 以光速 v_0 来传播。把(1.38)式代入(1.29)和(1.30)给出

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \epsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \mathbf{E} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.40)$$