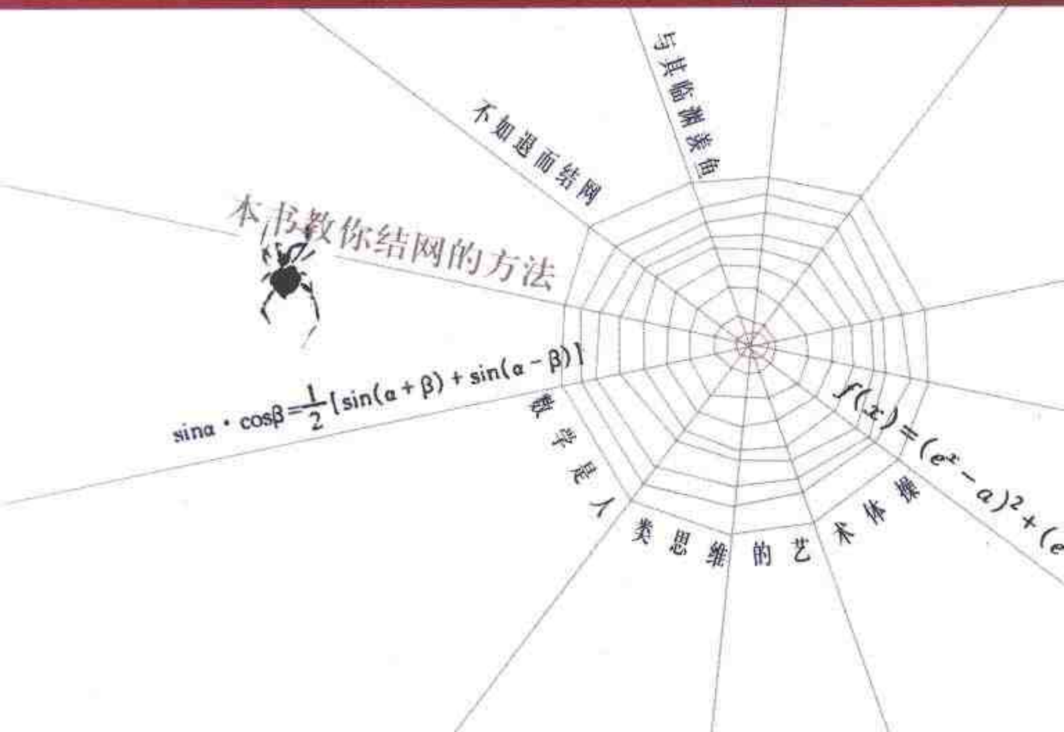
3 数学思维方法

柏均和高中数学指导

柏均和 著



學苑出版社

数学思维方法

柏均和高中数学指导

第三册

柏均和 著

学 苑 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维方法:柏均和高中数学指导(第三册)/柏均和著.
-北京:学苑出版社,2000.3
ISBN 7-5077-0308-8

Ⅰ.数… Ⅱ.柏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07521 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号 100036
高碑店市印刷厂印刷 新华书店经销
850×1168 32 开本 9.395 印张 210 千字
2000 年 3 月北京第 1 版 2000 年 3 月北京第 1 次印刷
印数:5000 册
定价:10.00 元

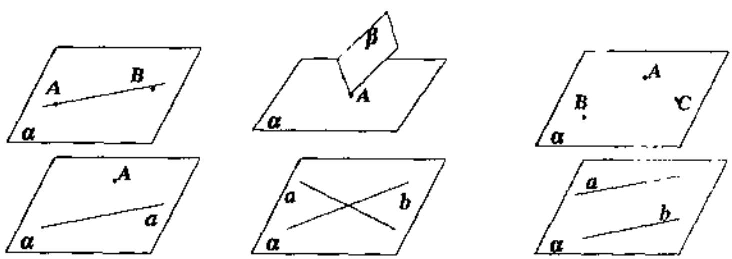
§1　立体几何

一　要点梳理

1　直线和平面

〈1〉一个基础—平面

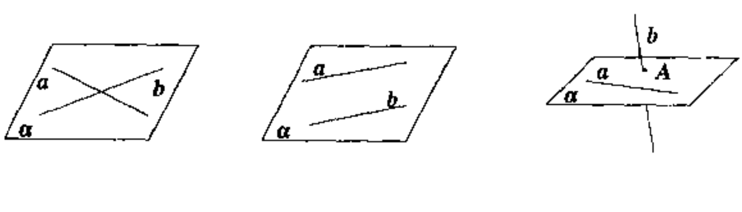
(1)基本性质



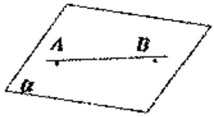
(2)基本作用:立体问题转为平面问题.

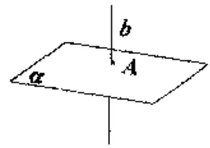
〈2〉三个基本问题

(1)直线与直线的位置关系

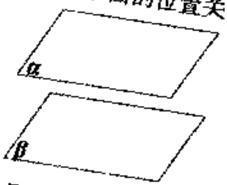


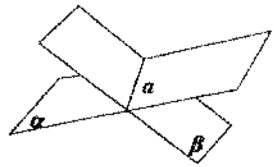
(2)直线与平面的位置关系





(3)平面与平面的位置关系

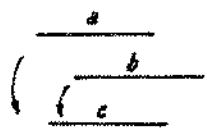


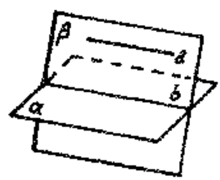


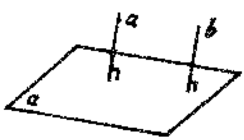
（3）两个基本关系

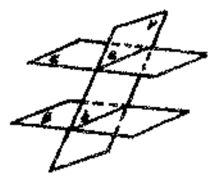
(1)平行关系

i　直线与直线

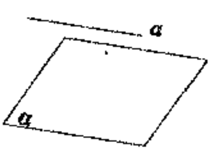




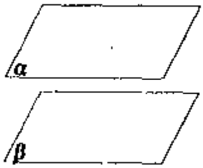


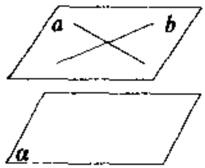


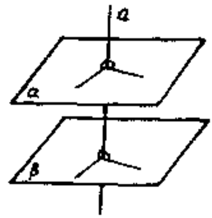
ii　直线与平面



ⅲ　平面与平面

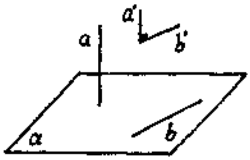


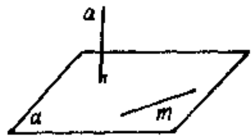


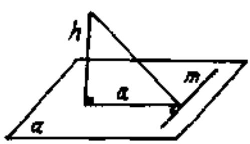


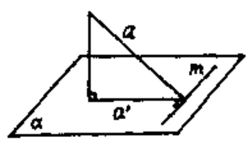
(2)垂直关系

ⅰ　直线与直线

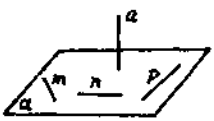


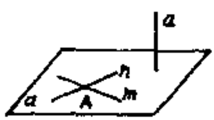


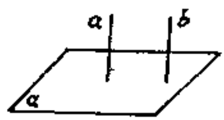


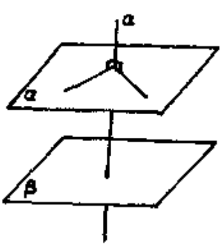


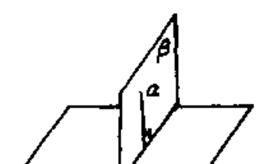
ⅱ　直线与平面



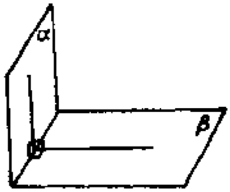


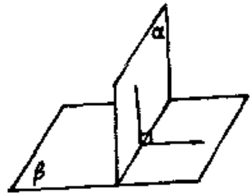






ⅲ　平面与平面

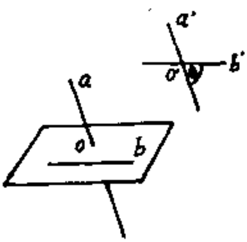


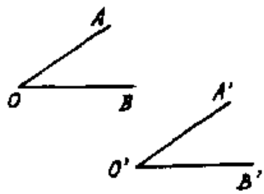


⟨4⟩两个基本概念

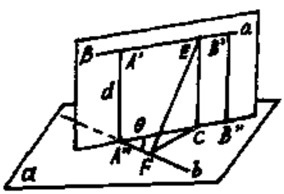
(1)直线与直线

ⅰ　角的概念





ⅱ　距离概念

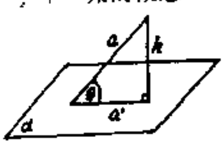


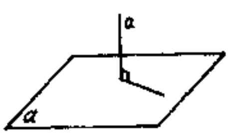
$EF=$

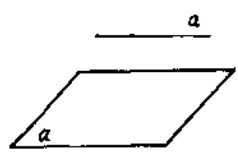
$\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$

(2)直线与平面

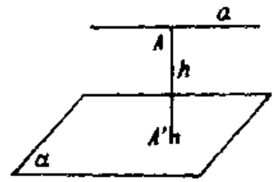
ⅰ　角的概念





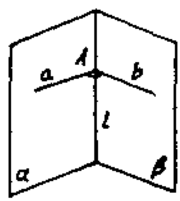


ⅱ　距离的概念

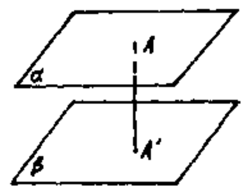


⑵平面与平面

ⅰ　角的概念



ⅱ　距离概念



对上述内容有以下几点说明：

⑴以上共 47 个图，体现了第七章中直线与平面的主要内容与知识系统，且能以图记理．

⑵立体几何的基础是平面，平面的基本性质很关键，即公理一二三及公理三的推论一二三．

⑶立体几何中主要研究三大问题，即便在多面体与旋转体中，还是这三大问题，即线线关系、线面关系、面面关系．

⑷无论研究线线、线面、还是面面又重点研究两类特殊关系，即平行关系与垂直关系．

线线的平行关系中有 5 条，即平行线的定义，公理 4，线面平行则线线平行，同垂直一面的二线平行，二面平行且与第三面相交则交线平行．

线面的平行关系中有 2 条，即线面平行的定义，线线平行则线面平行．

面面的平行关系中有 3 条，即面面平行的定义，如一面内二交线均与另面平行则二面平行，同垂直一线的二面平行．

线线的垂直关系中有 4 条，即二线所成角为直角则二线垂直，线面垂直则线线垂直，三垂线定理，三垂线定理的逆定理．

线面的垂直关系中有 5 条，即线垂直于面内任一线则线面垂直，线垂直于面内二交线则线面垂直，二平行线之一垂直一面则另线也垂直该面，一线垂直二平行面之一也垂直另一面，二面垂直则自一面内引交线之垂线此垂线

必垂直另一面．

面面的垂直关系中有 2 条，即二面角为直角的两个面垂直，经过一面之一垂线的平面与原面垂直．

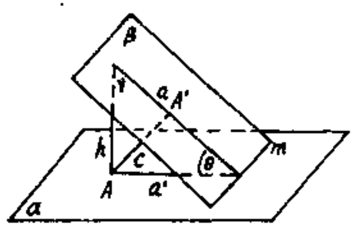
(5)对线线、线面、面面的应用又重点涉及两大概念，即角的概念与距离概念．

线线角的概念有 2 条，即两条异面直线所成的角，要注意该类角的范围为$(0°, 90°]$，此外还有等角定理，线线的距离概念要掌握两条异面直线的公垂线的作图及有关计算公式及公式中正负符号的选取原则(该公式可选学)．

线面角的概念有 3 条，即线面斜交时定义，线面垂直与平行时线面角的规定，线面的距离为专指线面平行时方可研究．

面面角的概念应转为研究二面角的平面角，而二面角的平面角又有了 3 个特征，即顶在棱上，边在面内，边棱垂直，面面之距离为专指面面平行时方可研究．

(6)重点掌握一个模型，如图



h 为面的垂线，

a 为 α 面的斜线，

a'为 a 在 α 面上的射影，

m 为 α 面内一直线，

如 $m \perp a'$，则 $m \perp a$，

如 $m \perp a$，则 $m \perp a'$．

这样 $m \perp a'$，$m \perp a$．

所以 $m \perp \gamma$ 面(即 a 与 a'所确定的平面)

因 α 面过 m，

所以 γ 面$\perp \alpha$ 面，

因 β 面过 m，

所以 γ 面$\perp \beta$ 面，

若由 A 在 γ 面内向 a 引垂线，设垂足为 A'，

则 AA'必$\perp \beta$ 面，

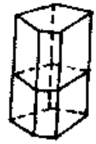
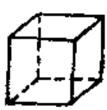
若由 A 向 β 面引垂线，

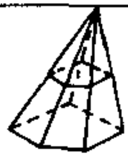
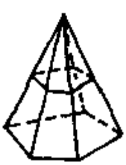
则 AA'必在 γ 面内．

由 m 与 a 与 a'双垂直，

则图中 θ 角为二面角 $\alpha - m - \beta$ 的平面角．

2　多面体和旋转体

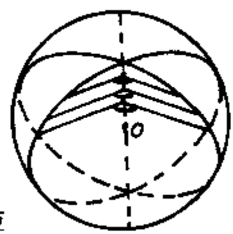
	棱柱	 	有两个面互相平行，其余每相邻两个面的公共边互相平行，由这些面所围成的几何体叫棱柱． 侧棱不垂直于底面的棱柱叫斜棱柱． 底面是平行四边形的四棱柱叫平行六面体．	侧面都是平行四边形． 侧棱都相等，两底面以及平行于底面的截面都是全等的多边形．	$S_{侧}=pl$（p 为直截面的周长，l 为侧棱长）．	$V_{棱柱}=Sh$（S 为底面积，h 为高）．
柱	直棱柱	 	侧棱与底面垂直的棱柱叫直棱柱． 相邻的每两条棱互相垂直的平行六面体叫长方体．	侧棱与高都相等． 侧面是矩形．	$S_{侧}=cl$（c 是底面周长，l 是侧棱长也即为高）．	$V_{长方体}=abc$（a,b,c 分别为长、宽、高）
体	正棱柱	 	底面是正多边形的直棱柱叫正棱柱． 各棱都相等的长方体叫正方体．	侧面都是全等的矩形． 两底面中心的连线垂直于底面．	$S_{全}=S_{侧}+2S_{底}$	$V_{正方体}=a^3$（a 为棱长）．
	圆柱		矩形以它的一边旋转一周而成曲面所围成的几何体叫圆柱．	两底面和平行于底面的截面都是相等的圆面． 过轴的截面是全等的矩形． 两底面中心的连线垂直于底面．	$S_{圆柱}=2\pi rh$（r 是底面半径，h 是高）． $S_{全}=2\pi rh+2\pi r^2$．	$V_{圆柱}=\pi r^2h$（r,h 意义同左）．

锥体	棱锥		有一个面是多边形,其余各面是有公共顶点的三角形,由这些面所围成的几何体叫棱锥.	底面∽平行于底面的截面. 侧棱与高被平行于底面的截面截得成比例的线段. $\frac{S'}{S}=(\frac{h'}{h})^2$. $\frac{V'}{V}=(\frac{h'}{h})^3$.	$S_全=S_底+\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle i}$.	$V=\frac{1}{3}Sh$(S是底面面积,h是高).
	正棱锥		底面是正多边形,顶点在底面的射影是底面正多边形中心,这样的棱锥叫正棱锥.	侧棱相等.侧面是全等三角形. 四个重要直角三角形及相依关系.	$S_侧=\frac{1}{2}ch_1$(c为底面周长,h_1为斜高). $S_全=S_侧+S_底$.	$V=\frac{1}{3}Sh$.
	圆锥		直角三角形以其一直角边为轴旋转一周所成曲面所围成的几何体叫圆锥.	底面和平行于底面的截面是圆面. 过轴的截面是全等的等腰三角形.	$S_侧=\pi rl$(r是底面半径,l是母线). $\theta=\frac{r}{l}\cdot 360°$. $S_全=\pi rl+\pi r^2$.	$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.
台体	棱台		以一个平行于棱锥底面的截面截棱锥,其底面与截面间的部分叫棱台.		$S_{中截面}=\frac{1}{4}(P+Q+2\sqrt{PQ})$($P$为上底面积,$Q$为下底面积).	$V=\frac{h}{3}(P+Q+\sqrt{PQ})$
	正棱台		由正棱锥所截得的棱台叫正棱台.	侧棱相等且延长后相交于一点. 侧面是全等的等腰梯形. 两底面是相似的多边形. 四个重要的直角梯形及其相依关系.	$S_侧=\frac{1}{2}(c+c')h'$(c,c'分为上、下底面周长,h'为斜高). $S_全=S_侧+S_{上底}+S_{下底}$.	$V=\frac{1}{3}h(P+Q+\sqrt{PQ})$
	圆台		直角梯形以其直角腰为轴旋转一周所成曲面所围成的几何体叫圆台.	两底面和平行于底面的截面都是圆面. 母线相等且延长后相交于一点. 过轴的截面是全等的等腰梯形.	$S_侧=\pi(r+r')l$. $S_全=\pi(r^2+r'^2+rl+r'l)$. $\theta=\frac{r-r'}{l}\cdot 360°$.	$V=\frac{1}{3}\pi h\cdot(r^2+rr'+r'^2)$.

球体			半圆以它的直径为轴旋转一周所得曲面叫球面。球面所围的几何体叫球。	球被平面所截的截面是一个圆面，$r=\sqrt{R^2-d^2}$	$S_{球}=4\pi R^2$（R 为球半径）。	$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$（R 为球半径）。
			球面被平面截得的部分叫球冠。		$S=2\pi Rh$（R 是球半径，h 是球冠高）。	
			球被平面截得的部分叫球缺。			$V=\pi h^2(R-\frac{h}{3})=\frac{1}{6}\pi h(r^2+h^2)$（$r$ 为球缺底面半径）。

一些学生在学习对地球的经纬度中立体几何的有关知识感到困难，现将有关规律做如下介绍：

〈1〉经度



(1)经度圈或其部分是球大圆或球大圆弧。

(2)0°—过英国格林威治天文台的经度圈。

分东经 180°，西经 180°，

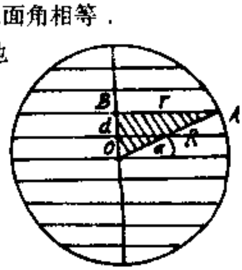
单位为度分秒，60 进位 .

(3)同经度线上弧长就是弧的两个端点的球面距离。

(4)同经度线上两点所确定的弧所对的圆心角为球心角 .

(5)经度角（例如东经 80°，东经 20°，差 60°为这里所指的经度角，反映在各纬度圈为定值）是二面角，根据等角定理，相关的二面角相等 .

(6)各经度圈圆面有公共交线，即为地轴，也是地球直径 .



(7)各纬度圈都被分成东经 180°，西经 180°.

〈2〉纬度

(1)一般是球小圆。

(2)0°—赤道 .

分北纬 90°，南纬 90°.

单位为度分秒，60 进位.

(3)同一纬度圈上的弧长，一般是球小圆的弧长，或地球上一点自转所走过的路程.

(4)各纬度圈圆面均平行.

(5)各经度圈都被分成 0°纬度，北纬 90°，南纬 90°.

(6)纬度角一般指的是线面角

线—纬度圈上的点与球心的连线.

面—赤道平面.

由平行线的内错角，常转为解直角三角形. 如图中阴影所示 $Rt\triangle OAB$.

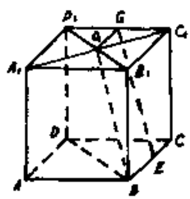
(7)同一纬度圈上两点的球面距离，应指相应的球大圆的弧长，一般不能认为就是纬度圈上的两点间弧长.

二　难点剖析

1　两个基本关系与两个基本概念的应用例析及有关规律

在立体几何中,无论是研究多面体,还是研究旋转体,无论涉及的是线线关系、线面关系、还是面面关系,其两个基本关系,即平行关系与垂直关系,两个基本概念,即角的概念与距离概念都是十分重要的问题,以下通过对典型问题的剖析介绍有关规律.

例1: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F、G、H 分别为棱 BC,CC_1,C_1D_1,AA_1 的中点,求证



(1)EG//平面 BB_1D_1D.

(2)平面 BDF//平面 B_1D_1H.

(3)$A_1O\perp$平面 BDF.

(4)平面 $BDF\perp$平面 AA_1C_1C.

证明:

(1)设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$.连接 O_1G.

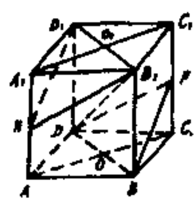
$\because O_1,G$ 分别为 B_1D_1,C_1D_1 中点,

$\therefore O_1G/\!/B_1C_1$,且 $O_1G=\frac{1}{2}B_1C_1$,

$\therefore BEGO_1$ 为平行四边形,

$\therefore EG/\!/BO_1$,

$\therefore EG$//平面 BB_1D_1D.



(2)$\because BB_1\overset{/\!/}{=}AA_1\overset{/\!/}{=}DD_1$,

$\therefore BB_1D_1D$ 为平行四边形,

$\therefore B_1D_1/\!/BD$,

$\therefore B_1D_1$//平面 BDF,

设 $AC\cap BD=O$,$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$.

连接 FO,HO_1,AC_1,

$\because OF/\!/AC_1$,$O_1H/\!/AC_1$,

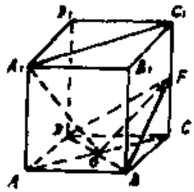
$\therefore OF /\!/ O_1H$,

$\therefore O_1H /\!/$ 平面 BDF,

$\because B_1D_1 \cap HO_1 = O_1$,

$\therefore$ 平面 $BDF /\!/$ 平面 B_1D_1H.

(3) $\because AO$ 是 A_1O 在下底面 $ABCD$ 内的射影,



$\because BD \perp AO$,

$\therefore BD \perp A_1O$(三垂线定理),

设正方体棱长为 a,

则 $A_1C_1 = \sqrt{2}a$, $C_1F = \frac{a}{2}$,

在 $Rt\triangle A_1C_1F$ 中, $A_1F^2 = A_1C_1^2 + C_1F^2 = \frac{9}{4}a^2$,

在 $Rt\triangle A_1AO$ 中, $A_1O^2 = AA_1^2 + AO^2 = \frac{3}{2}a^2$,

在 $Rt\triangle OCF$ 中, $OF^2 = OC^2 + CF^2 = \frac{3}{4}a^2$,

$\because A_1O^2 + OF^2 = A_1F^2$,

$\therefore A_1O \perp OF$,

$\because BD \subset$ 平面 BDF, $OF \subset$ 平面 BDF,

$BD \cap OF = O$,

$\therefore A_1O \perp$ 平面 BDF.

(4) $\because BD \perp AC$,

$\because CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore CC_1 \perp BD$, 即 $BD \perp CC_1$,

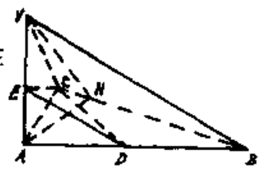
$\because AC \cap CC_1 = C$, $AC \subset$ 平面 AA_1C_1C,

$CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C.

$BD \perp$ 平面 AA_1C_1C,

但平面 BDF 过 BD,

$\therefore$ 平面 $BDF \perp$ 平面 AA_1C_1C.



例 2 四面体 $V—ABC$ 中, $VA \perp \triangle ABC$ 所在平面, $\angle BAC = 90°$, $AC = b$, $AB = a$, $VA = c$, 求

(1) VB 与 $\triangle ABC$ 所在平面所成角的大小,

(2) $V—BC—A$ 这二面角的大小,

(3) 又 AB 中点为 D, 则 CD 与 VB 所成角的大小是多少.

解: (1) $\because VA \perp \triangle ABC$ 面,

$\therefore AB$ 是 VB 在$\triangle ABC$ 面内的射影，

$\therefore VB$ 与$\triangle ABC$ 面所成的角为$\angle VBA$，

$\therefore VA \perp AB$，

$\therefore \triangle VAB$ 为直角三角形，

$\therefore \operatorname{tg} VBA = \dfrac{c}{a}$，则$\angle VBA = \operatorname{arctg}\dfrac{c}{a}$.

(2)从 A 在$\triangle ABC$ 面内作 $AH \perp BC$，连 VH，

$\because VA \perp \triangle ABC$ 面，

$\therefore AH$ 是 VH 在$\triangle ABC$ 面内的射影，

$\because AH \perp BC$，

$\therefore VH \perp BC$，

$\therefore \angle VHA$ 为 $V—BC—A$ 二面角的平面角，

$\therefore VA \perp AH$，即$\triangle VAH$ 是直角三角形，

$\because AH$ 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，

$\therefore AH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\therefore \operatorname{tg} VHA = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$，

$\therefore \angle VHA = \operatorname{arctg}\dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

(3)$\because CD = \sqrt{b^2+\dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2}$，

$ED = \dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{2}$，

$CE = \sqrt{b^2+\dfrac{c^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2+c^2}$，

由 $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，

$\therefore \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore \cos CDE = \frac{CD^2+DE^2-EC^2}{2\cdot CD\cdot DE}$$

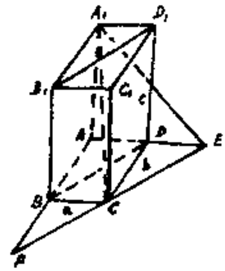
$$= \frac{b^2+\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-b^2-\dfrac{c^2}{4}}{2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(a^2+4b^2)(a^2+c^2)}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+4b^2)(a^2+c^2)}}.$$

$\therefore \angle CDE = \arccos \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+4b^2)(a^2+c^2)}}$.

例 3　在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC=a$，$CD=b$，$DD_1=c$，且 $b>a$，求 A_1C 和 B_1D_1 所成角的大小．

解 1：过 C 作 B_1D_1 的平行线 EF，与 AD，AB 的延长线分别交于 E，F，连 A_1E，



$\because EF \parallel B_1D_1$，

$\therefore EF \parallel BD$，

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形．

$\therefore CE = BD = \sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore DE = BC = a$，

$\therefore AE = 2a$，

在 $Rt\triangle AEA_1$ 中，

$A_1E = \sqrt{AA_1^2 + AE^2} = \sqrt{4a^2+c^2}$，

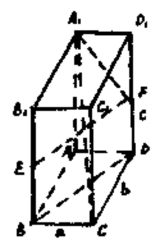
$\because A_1C = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$，

在 $Rt\triangle A_1CE$ 中，

$$\cos A_1CE = \frac{a^2+b^2+a^2+b^2+c^2-4a^2-c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}.$$

$\therefore A_1C$ 与 B_1D_1 所成角是 $\arccos \dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}$.

解 2：设 $A_1C \cap$ 平面 $BD_1 = O$，过 O 作 B_1D_1 的平行线 EF，与 BB_1，DD_1 分别交于 E，F 两点，



连 A_1F，

不难证明 $A_1O = OC$，

$\therefore OA_1 = \dfrac{1}{2}A_1C = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，

在 $Rt\triangle A_1D_1F$ 中，

$A_1F = \sqrt{A_1D_1^2 + D_1F^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+c^2}$，

又 $OF = OE = \dfrac{1}{2}EF = \dfrac{1}{2}B_1D_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，

在 $\triangle A_1OF$ 中，利用余弦定理及反余弦函数可求出 $\angle A_1OF$.