创新思维训练丛书

主 编／翟连林
编 著／叶龄逸 佘新耀

走近高校

高中数学总复习

上 册

ZOU JIN GAO XIAO
GAO ZHONG SHU XUE ZONG FU XI

华夏出版社

主 编 絮 语

为了全面推进以培养创新精神为重点的素质教育，帮助青少年学好科学文化知识，发展思维，增强创新能力和应用意识，由我牵头组织全国各地活跃在教学第一线的骨干教师编写了这套丛书。

《走近高校——高中数学总复习（上）》是根据高中数学教材内容和国家考试中心制定的《数学科考试说明》以及沪津晋赣等省市高考对数学科的要求编写的。全书共12章：集合与命题，函数，不等式，三角比，三角函数与反三角函数，复数，数列、极限与数学归纳法，排列、组合与概率初步，立体几何，向量初步，解析几何以及高中数学专题复习，其中向量初步，概率、统计初步供沪津晋赣等省市考生复习使用。

本书在内容编排上，按教材的章节顺序展开。每节安排有【知识技能导引】、【典型例题精析】和【同步练习精编】三个栏目，每章的最后是单元总结，安排有【单元内容小结】、【典型例题精析】、【综合拓展创新】和【知识能力检测】四个栏目。

本书在编写思想上，熔进最新的教学观点，注意总结常用的数学思想和数学方法；在知识处理上，对高考重点内容及容易混淆的概念，进行细致的分析和清晰透彻的讲解；在题目的设计上，选题典型而新颖，知识覆盖面广，难度紧扣高考要求，不超纲，增加应用题的分量；在层次安排上，本着“启发诱导”、“典型引路”、“巩固提高”、“拓展发散”几个步骤，使学生掌握和强化基础知识，熟悉常用的数学思想和数学方法，提高分析问题和解决问题的能力，增强应用意识，培养创新精神，使本书每个环节都体现素质教育的思想。

本书适合自学及课外阅读，不但高三毕业班学生可以用作复习用书，高一、高二的学生也可以用作同步辅导教材，还可以作为中学数学教师教学参考用书。

这本书的编著者叶龄逸校长，是上海市劳动模范，上海市数学特级教师，上海市张堰中学校长（区重点），长期在教学第一线，具有丰富的教学经验，特别是指导高三毕业班复习，经验丰富，成绩显著。

本书的另一位编著者余新耀老师，长期从事高三毕业班的复习工作，积累了丰富的教学

经验，高考成绩优异，余老师现任浙江秀永经济信息专修学院副教务长兼高中部主任。

这两位作者，在数学普及读物编写中有着极为丰富的经验，他们都出版过多部数学著作，并发表多篇论文。

本书的由余新耀老师执笔编写的有：第一章集合与命题，第二章函数，第三章不等式，第六章复数，第七章排列、组合与概率初步，第八章数列、极限与数学归纳法以及第十二章高中数学专题复习的函数思想，应用题和分类讨论。由叶龄逸老师执笔编写的有：第四章三角比，第五章三角函数与反三角函数，第九章立体几何，第十章向量初步，第十一章解析几何以及第十二章高中数学专题复习的点的轨迹探求。

此外，张宁生（首都师范大学）、胡晓梅（北京35中）二位老师执笔编写了§8.5概率初步和§8.6统计初步．林东波老师（南宁13中）执笔编写了§9.5空间的距离、§9.7圆柱、圆锥、圆台和球。马家甫老师（南宁13中）执笔编写了§11.7坐标平移、§11.8参数方程和极坐标、§11.9单元总结课的【同步练习精编】与【知识能力检测】，马家甫老师还把2001年全国的以及沪津晋赣等省市的高考题分类编入本书各有关章节。上海张堰中学的沈宝琪、吴均，上海张堰二中的唐林，上海前圩中学的于洪利以及我的助手郎艳茹、高瑞芳、翟华、柳莎、牛保华、韩志庚、翟英、郎红艳、马龙、申学华等同志，他们有的提供资料，有的绘图，有的核算，有的配备练习题，有的更换例题、习题，都做了大量的工作，在此一并致谢。

由于时间仓促，加之水平所限，本书肯定存在不少缺点和错误，欢迎使用本书的师生以及阅读过本书的同行提出宝贵意见，我们一定认真修改，使之逐步完善，以求为学生提供一本实用的高质量的复习用书。

最后，值得提及的是，本书能在两个多月的时间出版面市，得益于华夏出版社领导的鼎力支持和责任编辑、印制人员的出色工作，在此我谨代表丛书全体编委和作者致以衷心的感谢！

《创新思维训练丛书》主编　翟连林

2001年7月于北京

内容简介

本书是根据高中数学教材内容和国家考试中心制定的《数学科考试说明》以及沪津晋赣等省市高考对数学科的要求编写的。全书共12章：集合与命题，函数，不等式，三角比，三角函数与反三角函数，复数，数列、极限与数学归纳法，排列、组合与概率初步，立体几何，向量初步，解析几何以及高中数学专题复习，其中向量初步，概率、统计初步供沪津晋赣等省市考生复习使用。内容编排按教材的章节顺序展开。每节安排有［知识技能导引］、［典型例题精析］和［同步练习精编］，每章的最后是单元总结，安排有［单元内容小结］、［典型例题精析］、［综合拓展创新］和［知识能力检测］。全书适合自学及课外阅读，不但高三毕业班学生可以用作复习用书，高一、高二的学生也可以用作同步辅导教材，还可以作为中学数学教师教学参考用书。

ISBN 7-5080-2507-5

9 787508 025070 >

ISBN 7-5080-2507-5/G·1162

定价：25.00元

目　录

* 供上海、天津、山西、江西等省市考生阅读.

第一章　集合与命题

§1.1 集　合

【知识技能导引】

高考对集合的考查包括两种方式：一是对集合自身的考查，重点是集合的交、并、补运算；二是将集合作为工具考查集合语言与集合思想的运用，如函数的定义域、值域、方程与不等式的解集，解析几何中的曲线交点的表示等等，这些分散在其他各章中．

复习集合时，还应抓住元素这个关键及注意数形结合解题．

【典型例题精析】

例 1　选择题

(1)集合$\{1,2,3\}$的子集共有　　　　（　）

(A)7 个　(B)8 个　(C)6 个　(D)5 个

【分析】集合的子集包含：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，共计 8 个，因此选择 B.

【另解】事实上，上面的做法是：$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8$；亦可如下方法理解：依照乘法原理，集合$\{1,2,3\}$的子集都是 1,2,3 这三个元素的“取”与“不取”，因此共有 2^3 种$=8$ 种．

(2)若 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$，$N=\{1,a^2-6a+10,3\}$，且 $M\cap N=\{2,3\}$，则 a 的值是（　）

(A)1 或 2　(B)2 或 4　(C)2　(D)1

【分析】由元素的互异性，解方程组 $\begin{cases}a^2-3a+5=3,\\a^2-6a+10=2\end{cases}$ 得 $a=2$，故应选 C.

(3)集合 $M=\{x\mid x^2+2x-a=0,x\in\mathbf{R}\}$，且$\varnothing\subset M$，则实数 a 的范围是　　　　（　）

(A)$a\leqslant-1$　(B)$a\leqslant1$　(C)$a\geqslant-1$　(D)$a\geqslant1$

【分析】$\because$ $\varnothing\subset M$，$\therefore$ M 至少含有一个元素，则 $\Delta=4+4a\geqslant0$，$\therefore$ $a\geqslant-1$，故选 C.

例 2　填空题

(1)设 A,B,M,N 为非空集合，$A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，则 $M\cap N=$____．

【分析】此题不要混淆了集合元素和子集的概念，M,N 是分别由 A,B 的真子集构成的集合，M,N 的元素都是集合，显然空集$\varnothing$既是 M 又是 N 的元素，即$\varnothing$是 M,N 的两个集合的公共元素，故 $M\cap N=\{\varnothing\}$.

(2)若集合 $A=\{$直线的倾斜角$\}$，$B=\{$直线与平面所成的角$\}$，$C=\{$两条异面直线所成的角$\}$，$D=\{$复数的辐角主值$\}$，则这些集合间的关系是__________．

【分析】$\because$ $A=\{\alpha\mid0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ\}$，$B=\{\alpha\mid0^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ\}$，$C=\{\alpha\mid0^\circ<\alpha\leqslant90^\circ\}$，$D=\{\alpha\mid0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ\}$，故 $C\subset B\subset A\subset D$.

(3)若集合 $A=\{y\mid y=x^2-2x-3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2+2x+13,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$______.

【分析】 A、B 为两数集，分别为二次函数 $y=x^2-2x-3$ 和 $y=-x^2+2x+13$ 的值域，显然 $A=[-4,+\infty)$，$B=(-\infty,14]$，故 $A\cap B=\{y\mid -4\leqslant y\leqslant 14,y\in\mathbf{R}\}$.

例 3 解答题

(1)设 $A=\{x\mid \sqrt{x-1}\leqslant 3-x\}$，$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$.

①若 $A\supset B$，求实数 a 的取值范围；②若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【解】 (1)$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid (x-1)(x-a)<0\}$.

①若 $A\supset B$，则 $1\leqslant a\leqslant 2$；②若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a\leqslant 1$.

(2)已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

【解】 $\because$ $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，$\therefore$ 集合 A 有以下两种情况：

①$A=\varnothing$，则 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，即 $-4<p<0$.

②$A\neq\varnothing$，则方程有两个非正数解，其充要条件是：$p+2>0$ 且 $\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0\Rightarrow p\geqslant 0$.

综上所述，$p>-4$.

(3)已知集合 $A=\{y\mid y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，$B=\left\{y\,\middle|\, y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【解】 $\because$ $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow a^2+1>a$，$\therefore$ $A=\{y\mid y<a$ 或 $y>a^2+1\}$，

又由 $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$，知 $y_{\min}=f(1)=2$，$y_{\max}=f(3)=4$，

$\therefore$ $B=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 4\}$.

若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a\leqslant 2$ 且 $a^2+1\geqslant 4$，即 $a\leqslant 2$ 且 $a\geqslant\sqrt{3}$ 或 $a\leqslant-\sqrt{3}$，故实数 a 的取值范围是 $a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

例 4 综合题

设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\cos\frac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\right\}$求 $A\cap B$.

(2001·上海高考题)

【解】 由已知，得 $\begin{cases}x>0,\\8x-15>0,\\x^2=8x-15.\end{cases}$ 解之，得 $x=3$ 或 5. 即 $A=\{3,5\}$.

又由 $\cos\frac{x}{2}>0$，得 $4k\pi-\pi<x<4k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $B=\{x\mid 4k\pi-\pi<x<4k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})\}$.

$\therefore$ $A\cap B=\{3\}$.

例 5 已知坐标平面内的点集 $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 1\}$，$B_m=\{(x,y)\mid y=-(x-m)^2+2m,m\in\mathbf{R}\}$. 设集合 B 是所有 $B_m(m\in\mathbf{R})$的并集，求 $A\cap B$ 的面积.

【解】 $y=-(x-m)^2+2m$，即 $m^2-2(x+1)m+(x^2+y)=0$　　　(*)

因为 $m\in\mathbf{R}$，所以判别式 $\Delta=4(x+1)^2-4(x^2+y)\geqslant 0$，

即 $2x+1-y\geqslant 0\Rightarrow y\leqslant 2x+1$．且对任何满足 $y\leqslant 2x+1$ 的点 (x,y)，必有实数 m，使（＊）式成立．

因而，点集 B 即是半平面 $\{(x,y)\mid y\leqslant 2x+1\}$．

点集 A 是以 $C(0,2)$ 为圆心，1 为半径的圆形区域，圆心 $C(0,2)$ 到直线 $l:y=2x+1$ 的距离

$$d=\frac{|2-1|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<1.$$

$\therefore$ $A\cap B$ 为弓形，且 l 与圆 C 相交的弦长 $|PQ|=2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

中心角 $\angle PCQ=2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}}=2\operatorname{arc\,tg}2$.

$\therefore$ $A\cap B$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arc\,tg}2\cdot 1^2-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\operatorname{arc\,tg}2-\dfrac{2}{5}$.

【说明】本题为熟悉用集合语言表达几何问题，且利用数形结合方法解题．

【同步练习精编】

一、选择题

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$ （ ）

   (A) $\{0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{0,1,4\}$ (D) $\{0,1,2,3,4\}$

2. 已知集合 $M=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $N=\{x\mid ax=1\}$，若 $N\subset M$，那么 a 的值是 （ ）

   (A) 1 (B) -1 (C) 1 或 -1 (D) 0，1 或 -1

3. 若集合 $A=\{y\mid y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2-2x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

   (A) $\varnothing$ (B) $\mathbf{R}$ (C) $\{-1,3\}$ (D) $[-1,3]$

二、填空题

1. 已知 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，则 $\overline{A}\cap B=$________．
2. 已知 $A=\{x\mid x^2-px+15=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，则 $p+q=$______．
3. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\dfrac{T}{S}=$ __________．

三、解答题

1. 已知 $A=\{x\mid\log_2(x^2-2x-3)>\log_2 5\}$，$B=\{x\mid x^2-ax-2a^2\leqslant 0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围．
2. 已知 $A\subseteq\{x\mid x^2-px+15=0\}$，$B\subseteq\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，又 $A\cup B=\{2,3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$，求 p、q 的值及集合 A、B.
3. 已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a、m 的值．

§1.2 命题、充要条件

【知识技能导引】

这部分内容涉及中学数学中一些重要的逻辑知识，学好它对于我们深刻理解数学中一系

列的重要问题会有很大的益处，这部分内容分散在中学数学课本中，现归纳如下：

(一)命题：可以判断真假的语句叫命题．

1. 正确的命题叫真命题，不正确的命题叫假命题．

2. 常用的逻辑联结词——"或"(或者)、"且"(并且)、"非"(不是).

3. 简单命题与复合命题. 不含逻辑联结词的命题叫简单命题，由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫复合命题．

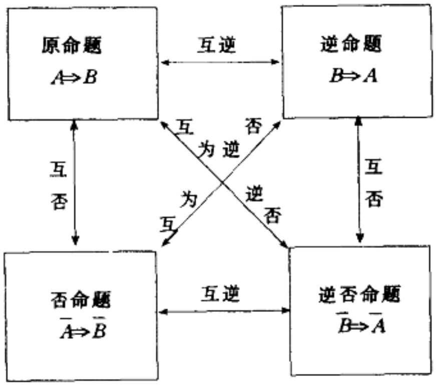
4. 几种常见的复合命题．

用 A、B、C 表示命题，则常见的三种复合命题是：

或命题——"A 或 B"，记作 $A\cup B$；

且命题——"A 且 B"，记作 $A\cap B$；

非命题——"非 A"，记作 $\overline{A}$.



(二)四种命题

1. 四种命题

原命题：若 A 则 B(即 $A\Rightarrow B$)；

逆命题：若 B 则 A(即 $B\Rightarrow A$)；

否命题：若非 A 则非 B(即"$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$")；

逆否命题：若非 B 则非 A(即"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$").

2. 四种命题的关系(如右图)

3. 四种命题的真假

两个互为逆否的命题是等价的，即 "$A\Rightarrow B$"$\Leftrightarrow$"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$".

(三)充要条件

充要条件是现行高中数学教材明确提出的重要数学概念之一，也是高考几乎每年必考的内容之一，一般以选择题形式出现，题型有两大类：一是仅考查充要条件本身的知识，二是考查两个命题的充要条件，这往往涉及代数、几何等多方面的知识．

1. 理解三种类型的含义．

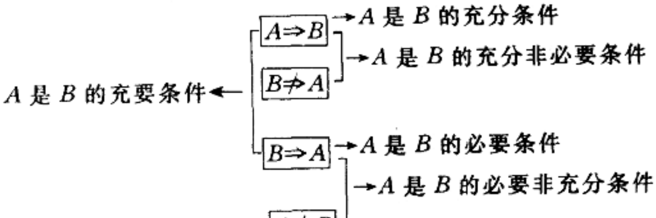
三种类型指：充分而非必要条件，必要而非充分条件，充分且必要条件．

(1)如果 A 成立，那么 B 成立，即 $A\Rightarrow B$，这时就称 A 是 B 的充分条件；

(2)如果 B 成立，那么 A 成立，即 $B\Rightarrow A$，这时就称 A 是 B 的必要条件；

(3)如果既有 $A\Rightarrow B$，又有 $B\Rightarrow A$，这时就说 A 是 B 成立的充要条件．

2. 区分三种类型的条件



根据充要条件的定义，若 A 是 B 的充要条件，反过来又可说 B 是 A 的充要条件，因此 A 与 B 是等价的. 记作 $A\Leftrightarrow B$. 如 $x^2=y^2$ 与 $|x|=|y|$ 在实数集里是等价的.

A 是 B 的充要条件还可叙述成：(1)当且仅当 A 成立时，B 成立；(2)要使 B 成立，必须且只须 A 成立.

例如：直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2=0$(A_1 与 B_1；A_2 与 B_2 不同时为 0)，互相垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

若 a、b、$c\in\mathbf{R}$，则当且仅当 $a=b=c$ 时，$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

要使实系数二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$，对一切实数 x 恒取正值，必须且只须 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$.

中学数学里牵涉到充要条件的问题主要有三个方面：(1)充要条件的证明；(2)求充要条件；(3)等价转换. 将在下面例题中阐析.

【典型例题精析】

例 1 选择题

(1)$a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的 ( )

(A)充分非必要条件　　(B)必要非充分条件

(C)充要条件　　(D)既非充分也非必要条件　　(2001·上海高考题)

【分析】 $a=3$，则直线为 $3x+2y+9=0$ 和 $3x+2y=-4$. 显然两直线平行且不重合.

若两直线平行且不重合，即 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{a-1}\neq\dfrac{3a}{7-a}$，∴ $a=3$ 或 $a=-2$(舍)，故 $a=3$ 是已知两直线平行且不重合的充要条件，因此选 C.

(2)设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的 ( )

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)非充分条件也非必要条件

【分析】 因为 $M\cup P=\mathbf{R}$，$M\cap P=(2,3)$，所以"$x\in M$ 或 $x\in P$"$\Leftrightarrow$"$x\in M\cup P$"，由 $M\cup P\supset M\cap P$，故 $x\in M\cap P$ 时，必有 $x\in M\cup P$，但反之不对，因此选 B.

(3)设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的充要条件，丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件，那么 ( )

(A)丙是甲的充分条件，但不是必要条件　　(B)丙是甲的必要条件，但不是充分条件

(C)丙是甲的充要条件　　(D)丙不是甲的充分条件，也不是必要条件

【分析】 由已知，有甲$\Leftrightarrow$乙$\Leftarrow$丙，乙$\not\Rightarrow$丙，于是丙$\Rightarrow$甲，且甲$\not\Rightarrow$丙，因此选 A.

例 2 填空题

(1)设命题甲为 $\lg x^2=0$，命题乙为 $x=1$，那么甲是乙的________条件.

【分析】 由 $\lg x^2=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$. 由 $x=1$ 可推得 $\lg x^2=0$，由 $\lg x^2=0$ 不能推得 $x=1$. 所以甲是乙的必要非充分条件.

(2)设 X、Y 是两个非空集合，则元素 $\alpha\in(X\cup Y)$是 $\alpha\in(X\cap Y)$的________条件.

【分析】 因为 $X\cup Y\supseteq X\cap Y$，所以 $\alpha\in(X\cap Y)\Rightarrow\alpha\in(X\cup Y)$. 但 $\alpha\in(X\cup Y)\not\Rightarrow\alpha\in(X\cap Y)$，因此元素 $\alpha\in(X\cup Y)$是 $\alpha\in(X\cap Y)$的必要但不充分条件.

(3)已知 A 和 B 是两个命题，如果 A 是 B 的充分条件，那么 B 是 A 的____条件；$\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的____条件．

【分析】 由已知，有 $A\Rightarrow B$，因此 B 是 A 的必要条件，由"$A\Rightarrow B$"可得它的逆否命题"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$"．于是，$\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 的必要条件．

例 3 解答题

(1)求证：若 a、$b\in\mathbf{R}$，当且仅当 $|a|$ 与 $|b|$ 或同大于 1 或同小于 1 时，$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

【证明】 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1\Leftrightarrow\dfrac{(a+b)^2}{(1+ab)^2}<1\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2>0\Leftrightarrow$ $(1-a^2)(1-b^2)>0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2>1\\b^2>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2<1\\b^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1\\|b|>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a|<1,\\|b|<1.\end{cases}$

(2)若 $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，则 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$ 的充要条件是：$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

【分析】 条件是：$\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$，结论是：$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$，而 $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$ 则是前提．

【证明】 充分性．当 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，显然有

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=2\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\qquad(*)$$

必要性．若 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$，(＊)式化为

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

配方，得 $\left(2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}-1$，$\therefore\ \cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 1$，只能 $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm 1$.

因为 $0<\alpha$、$\beta<\pi$，则 $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1$，$\therefore\ \alpha=\beta$. 再代入原式，有

$$2\cos\alpha-\cos 2\alpha=\frac{3}{2}，即\ 2\cos^2\alpha-2\cos\alpha+\frac{1}{2}=0.\ 所以\ \cos\alpha=\frac{1}{2}，\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

(3)设 $x,y\in\mathbf{R}$，求证：$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是：$xy\geqslant 0$.

【分析】 条件是：$xy\geqslant 0$，结论是：$|x+y|=|x|+|y|$.

【证明】 充分性．如果 $xy=0$，不妨设 $x=0$，于是 $|x+y|=|y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$，即 $x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0$.

当 $x>0,y>0$ 时，$|x+y|=x+y=|x|+|y|$；

当 $x<0,y<0$ 时，$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)=|x|+|y|$.

总之，当 $xy\geqslant 0$ 时，有 $|x+y|=|x|+|y|$.

必要性．由 $x,y\in\mathbf{R}$ 及 $|x+y|=|x|+|y|$，得

$$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2，即\ x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2,$$

所以 $xy=|xy|$，由此可得 $xy\geqslant 0$.

例 4 综合题

已知抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2+4$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1(a>0)$，问 a 在什么范围内，这两条曲线有四个交点？

【分析】 $a>4$ 是使两曲线有四个交点的一个充分条件．解题者常常忽视了它的必要性，也就是当 $a\leqslant 4$ 时，是否也会有四个交点？一般地，由充分条件求得的范围过小，会产生遗漏现象．事实上，将 $y=-\frac{1}{4}x^2+4$ 代入椭圆方程，得 $\frac{1}{16}x^4+\left(\frac{9}{a^2}-2\right)x^2+7=0$.

按题意此方程必须有四个不等的实根.

因此关于 x^2 的二次方程必须有两个不等的正根，其充要条件为

$$\begin{cases}\Delta>0\\ 16\left(\frac{9}{a^2}-2\right)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<8-2\sqrt{7}\\ a^2>\frac{9}{2}\end{cases}\text{或 } a^2>8+2\sqrt{7}.$$

所以 $a^2>8+2\sqrt{7}$，由 $a>0$，得 $a>\sqrt{7}+1$.

【同步练习精编】

一、选择题

1. 直线 $x+ay=2a+2$ 与 $ax+y=a+1$ 平行(不重合)的充要条件是　　（　）

　(A)$a=\frac{1}{2}$　(B)$a=-\frac{1}{2}$　(C)$a=1$　(D)$a=-1$

2. 已知 $h>0$，设命题甲为：两个实数 a,b 满足 $|a-b|<2h$；命题乙为：两个实数 a,b 满足 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$，那么　　（　）

　(A)甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件

　(B)甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件

　(C)甲是乙的充要条件

　(D)甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

二、填空题

若 A 表示充分而非必要条件，B 表示必要而非充分条件，C 表示既不是充分条件又不是必要条件，试把适当的代号填入下列各题的空格中．

1. 函数 $y=f(x),x\in[a,b]$有反函数的____是函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上是增函数(或减函数).

2. 非零向量$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}$ 对应复数是 z_1,z_2，则 $z_2=iz_1$ 是$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$ 的__________.

三、解答题

1. 已知 $a、b、c、d\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$. 求证：方程 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$ 有实根的充要条件是：$d^2+abd+b^2c=0$.

2. 数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots(x_i\neq 0,i\in\mathbf{N})$，组成等差数列的充要条件是对任何整数 $k>2$，都有$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{k-1}x_k}=\frac{k-1}{x_1x_k}$.

第二章　函　数

§2.1　函数的概念

【知识技能导引】

函数的实质是非空数集上的映射．定义域、对应法则、值域是函数的三要素．

复习时要注意体会用函数的思想和观点解方程、不等式、数列等问题．要善于总结归纳求函数定义域、值域及函数表达式的一般方法．

1．求函数定义域的三种基本方法

(1)依据函数解析式中所包含的运算(除法、开平方等)对自变量的制约要求，通过解不等式(组)求得定义域；

(2)依据确定函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 对作用对象的取值范围的制约要求，通过解不等式(组)求得定义域；

(3)根据问题的实际意义，规定自变量的取值范围，求得定义域．

如果函数是由一些基本函数通过四则运算构成的，那么它的定义域是使各个部分都有意义的 x 值组成的集合．对于含参数的函数求定义域(或已知定义域，求字母参数的取值范围)时，必须对参数的取值进行讨论．

2．求值域的基本方法

(1)把函数变形为 x 的一元二次方程，因为 $x\in\mathbf{R}$，由判别式法 $\Delta\geqslant0$，从而求得函数的值域．

(2)用逆推法，把 $y=f(x)$ 化为 $x=\varphi(y)$，由 x 的定义域，从而求出函数 y 的值域．

(3)用换元法，把 $y=f(x)$ 变形 $y=\varphi(t)$，从而推得 y 的值域．

其他方法还很多，如利用函数图象的直观性，或三角函数的取值范围，从而求函数值域．

3．求函数的解析式的主要方法

求函数的解析式主要是利用待定系数法、换元法、参数法、凑配法等方法．

如果已知函数解析式的构造时，可以用待定系数法；如果已知复合函数 $f[g(x)]$ 表达式时，常用换元法；当已知表达式较为简单时，也可直接用凑配法求解．

【典型例题精析】

例 1　选择题

(1)已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x+1)=$　　(　　)

(A) $(x+1)^2+\frac{1}{(x+1)^2}$　(B) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$　(C) $(x+1)^2+2$　(D) $(x+1)^2+1$

【分析】 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$，可得 $f(x)=x^2+2$，即 $f(x+1)=(x+1)^2+$

2，故应选C.

(2)如果函数 $f(x)=(x+1)(1-|x|)$ 的图象在 x 轴上方，则 $f(x)$ 的定义域为 ( )

(A) $\{x||x|<1\}$ (B) $\{x||x|>1\}$ (C) $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$ (D) $\{x|x>-1$ 且 $x\neq1\}$

【分析】 由已知 $(x+1)(1-|x|)>0$.

当 $x\geqslant0$ 时，化为 $(x+1)(x-1)<0$，所以 $-1<x<1$，得 $0\leqslant x<1$.

当 $x<0$ 时，有 $(x+1)^2>0$，所以 $x\neq-1$，得 $x<0$ 且 $x\neq-1$.

综上可知，有 $x<1$ 且 $x\neq-1$，故应选C.

(3)函数 $f(x)=-\sqrt{x^2-1}(x\leqslant-2)$ 的反函数的定义域为 ( )

(A) $[0,+\infty)$ (B) $(-\infty,0]$ (C) $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$ (D) $(-\infty,-\sqrt{3}]$

【分析】 反函数的定义域就是原函数的值域. 由原式知 $y<0$，由 $y=-\sqrt{x^2-1}$，得 $y^2=x^2-1$，由 $x\leqslant-2$，知 $x^2\geqslant4$，则 $y^2\geqslant4-1=3$，所以 $y\leqslant-\sqrt{3}$，故应选D.

例2 填空题

(1)函数 $y=\dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$ 的定义域是________.

【分析】 由原式知 $3x-x^2\geqslant0$ 且 $|x-1|-1\neq0$，即 $0\leqslant x\leqslant3$ 且 $x\neq0$ 与 $x\neq2$，故原函数定义域是 $0<x<2$ 或 $2<x\leqslant3$.

(2)函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域是________.

【分析】 令 $t=\sqrt{1-2x}\geqslant0$，且 $x=\dfrac{1-t^2}{2}$，

则 $y=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+1\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 y 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(3)函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的最值是________.

【分析】 函数的定义域为 $[-3,1]$，转化为求闭区间 $[-3,1]$ 上一元二次函数 $u=3-2x-x^2$ 的最值，$u=-(x+1)^2+4$，$\therefore u$ 的最大值为4，即当 $x=-1$ 时，y 的最大值为2.

当 $x=-3$ 时，$y=0$. 当 $x=1$ 时，$y=0$. 故 $y_{最大值}=2$，$y_{最小值}=0$.

例3 解答题

(1)已知 $f(1-\cos x)=\sin^2x$，求 $f(x)$.

【分析】 令 $\begin{cases}v=1-\cos x\\u=\sin^2x\end{cases}\Rightarrow u+(v-1)^2=1$，即 $u=2v-v^2$.

$\because -1\leqslant\cos x\leqslant1$，$\therefore 0\leqslant v\leqslant2$，

$\therefore f(v)=2v-v^2(0\leqslant v\leqslant2)$，即 $f(x)=2x-x^2(0\leqslant x\leqslant2)$.

(2)高为 h，底面半径为 R 的圆柱形容器内，以单位时间内体积为 a 的速度充水，试求出水面 y(用时间 t 表示)的函数式，并求其定义域.

【分析】 由题意，得 $at=\pi R^2y$，即 $y=\dfrac{a}{\pi R^2}t$.

$\because 0\leqslant y\leqslant h\Rightarrow0\leqslant\dfrac{a}{\pi R^2}t\leqslant h$，$\therefore 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi R^2}{a}h$，即所求定义域为 $\left[0,\dfrac{\pi R^2}{a}h\right]$.

(3)已知函数 $f(x)=x^2-4ax+2a+6(a\in\mathbf{R})$.

①若函数的值域为 $[0,+\infty)$，求 a 的值；