高等学校教学用書

微积分学續篇

尼·阿·福罗洛夫著
叶乃膺譯

人民教育出版社

本书是根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教科书出版社（Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР）出版的，尼古拉·阿德利安路維奇·福罗洛夫 Николай Адрианович Фролов）著“数学分析教程第二册”（Курс математического анализа, ч. 2.）1959年版譯出的，原书是福罗洛夫著“微积分学”（中譯本原高等教育出版社1958年初版）的續篇，为使讀者不致誤会起见，中譯本改名为“微积分学續篇”。本书經俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院物理数学系教学参考书。

本书共分三篇，內容計有級数、多元函数、微积分学、微分方程。

微积分学續篇

尼·阿·福罗洛夫著

叶乃膺譯

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

北京外文印刷厂印装

新华书店科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号：13010·906 开本 850×1168 1/32 印张 10 11/16

字数 26,9000 印数 00001—10,000 定价（6）¥1.00

1961年1月第1版 1961年1月北京第1次印刷

序

本书是适用于师范学院物理数学系学生的数学参考书。在本书中讲述了“数学”专业的数学分析教学大綱中沒有編入我过去出版的“微积分学”一书內的那些部分。

承柯罗夫金（П. П. Коровкин）教授不吝指正，对本书的編写工作惠助良多。又承魏因貝格（М. М. Вайнберг）教授在他对拙稿的評論中提出了許多宝貴的意見。我借此机会向柯罗夫金与魏因貝格二位深致衷心的謝意。

尼·福罗络夫

1958年8月25日于莫斯科

目　录

第一篇　級数

第二篇　多元函数

第三篇 微分方程

第一篇　級数

第一章　常数項級数

§1. 基本概念

在初等数学中我們就已經学过无穷多个数的求和法。我們曾經就几何数貫

$$u, uq, uq^2, \cdots, uq^{n-1}, \cdots,$$

提出过求它的所有諸項之和的問題。但是，在这里按通常意义求和已經是不可能的了，因为有无穷多項的緣故，于是我們必須首先約定：当我們把加法施于无穷多个数的时候，和的意义应如何理解。

在初等数学中我們遵循了下述十分合理的途徑来解决几何数之和的問題。

我們首先取出数貫的第一項来，加上第二項，再加上数貫的第三項，以下类推，然后注意：随着項数的增加，**部分和** S_n——数貫前 n 項之和——如何变化；若当項数 n 无限增加时，部分和 S_n 趋于有限的极限，則我們就把这极限当作数貫所有諸項的和。

因为就所給数貫来說，只要 $q\neq 1$，則有

$$S_n = u + uq + \cdots + uq^{n-1},$$

$$S_n q = uq + uq^2 + \cdots + uq^n,$$

$$S_n - S_n q = u - uq^n,$$

$$S_n = \frac{u(1-q^n)}{1-q},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases}\dfrac{u}{1-q}, & \text{当}\ |q|<1\ \text{时},\\ \infty, & \text{当}\ |q|>1^{①}\text{时}.\end{cases}$$

若 $q=1$，則所給数貫的諸項全都等于 u①；在这种情形下，当 $n\to\infty$ 时，$S_n=nu\to\infty$。如果 $q=-1$ 的話，那么，显而易見，$S_{2k-1}=u$，$S_{2k}=0\ (k=1, 2, \cdots)$，因而当 $n\to\infty$ 时部分和 S_n 不仅沒有有限的极限，而且連无限的极限也沒有。

因此，只有在数貫的公比 q 适合条件 $|q|<1$ 时，也就是当几何数貫为递减②的时候，所給数貫所有諸項（按我們所采用的意义)才有和之可言。在这种情形下，我們有

$$\frac{u}{1-q}=u+uq+\cdots+uq^{n-1}+\cdots.$$

无穷几何数貫的諸項构成某种序列。因此，只要在一般情形下也象在几何数貫的情形完全一样地引进和的概念，那么就以几何数貫諸項的求和法作为去求任意序列諸項之和的一般方法是很自然的。由于这样的推广，我們便导出**常数項級数**的概念以及有关的其他概念。

設我們有数列：

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots.$$

只要用加号把所給数列的諸項依次联結起来，我們就得到式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

这个式子称为**常数項級数**。

諸数 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 称为**級数的項**，u_n 称为**級数的一般項**。

級数前 n 項的和称为**級数的第 n 部分和**，記作 S_n：

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

---

① 而 $u\neq 0$ ——譯者。
② 按絕对值来說——譯者。

若当 n 无限增加时，級数(1)的部分和 S_n 存在有限的极限，則級数(1)称为**收斂的**，而数值

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n$$

称为**級数的和**，并且写成

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

如果当 $n\to\infty$ 时，S_n 沒有有限的极限，則級数(1)称为**发散的**。

几何數貫：

$$u+uq+uq^2+\cdots+uq^{n-1}+\cdots$$

可以作为常数項級数的例子。

因为在这里

$$S_n=u+uq+\cdots+uq^{n-1},$$

所以只須 $q\neq1$，則有

$$S_n=\frac{u(1-q^n)}{1-q}.$$

由此可見，若 $|q|<1$，則

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{u}{1-q},$$

这就意味着所給的几何数貫是收斂級数；若 $|q|>1$，則

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$$

(設数貫中 $u\neq0$)；当 $q=-1$ 时，

$$S_{2k-1}=u,\ S_{2k}=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

从而 S_n 沒有极限；因此，当 $|q|>1$ 或 $q=-1$ 时，几何数貫是发散級数。

最后，若 $q=1$，則所給数貫为

$$u+u+\cdots+u+\cdots$$

也是发散級数[①]，因为在这种情形下，

① 設数貫中 $u\neq0$——譯者。

当 $n\to\infty$ 时，$S_n=nu\to\infty$。

由是，几何級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}uq^{n-1}$ 当 $|q|<1$ 时收斂，而当 $|q|\geqslant 1$ 时发散。在 $|q|<1$ 的情形下，我們有：

$$\frac{u}{1-q}=u+uq+uq^2+\cdots+uq^{n-1}+\cdots.$$

二級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

及

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+m}+\cdots \tag{2}$$

要嗎就同为收斂，要嗎就同为发散。实际上，第二級数的部分和 S'_m 恒可表示成第一級数的部分和 S_{n+m} 減去常数 $A=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 的形式，即

$$S'_m=S_{n+m}-A.$$

由此可見，当 $m\to\infty$ 时，部分和 S'_m 与部分和 S_{n+m} 要嗎就同时有极限，要嗎就同时沒有极限。

若二級数(1)与(2)都收斂，則第二級数的和称为第一級数的第 n 余項，并且記作 R_n：

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots.$$

显而易見，收斂級数的和恒可表示成

$$S=S_n+R_n$$

的形式。由此可見，当 $n\to\infty$ 时 $R_n\to 0$。

利用級数收斂及級数之和的定义以及关于极限的定理，不难証明下列命題：

1. 若 c 为一常数，而級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂且其和为 S，則級数

$$cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收斂且其和为 cS。

2. 若二級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

都收斂，且其和分别为 U 及 V，則級数

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收斂，且其和为 $U\pm V$。

在加法的情形下，这一斷語对于任意有限个收斂級数来說都是成立的。

§2. 收斂的必要与充分条件

根据定义，級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

为收斂就是指：当下标 n 无限增加时，部分和 S_n 的极限 S 存在，即部分和所成的序列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots \tag{2}$$

收斂；可見級数(1)为收斂的条件就是数列(2)收斂的条件。由数列极限存在的柯西檢驗法，我們可以說：要使数列(2)收斂于一个极限，必須而且只須对于任一个 $\varepsilon>0$ 都存在这样的下标 N，使对所有的 $n>N$ 及 $m>N$ 来說，不等式

$$|S_m-S_n|<\varepsilon$$

都是成立的。为明确起見，我們設 $n<m=n+p$。于是我們有：

$$S_m-S_n=S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p},$$

并且这里的 p 可以是任何自然数，因为 m 与 n 只要都大于 N 就行了，它們彼此之差却可以随便多少。由是我們得到下述的級数收斂的条件：

要級數

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂，必須而且只須：对于任一个 $\varepsilon>0$ 来說，都存在这样的下标 N，使对所有的 $n>N$ 来說，无論自然数 p 是什么，不等式

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

都是成立的。

这个条件叫做**柯西条件**或**柯西檢驗法**。由是，就特殊情形 $p=1$ 而言，可以推知：要級数收斂，就必須对于所有的 $n>N$，不等式

$$|u_{n+1}|<\varepsilon$$

都是成立的，也就是說，

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

这样一来，我們得出結論：

要級数收斂，就必須当項数 n 无限增加时，級数的一般項趋于零。

这是級数收斂的必要条件，但不是充分条件。称为**調和級数**的

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

可为这事的佐証。

在这里，当 $n\to\infty$ 时 $u_n=\frac{1}{n}\to 0$；但是可以証明調和級数不滿足柯西条件（柯西条件不仅是收斂性的充分条件，而且也是必要条件），因而不可能是收斂級数。对于这一点，我們指出：

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}.$$

由是可見，若 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，而 $p=n$，則对于調和級数来說，无論下标 n 如何大，不等式

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}<\varepsilon$$

都是不成立的。因此，在調和級数的情形下，就不是对于每一个 $\varepsilon>0$ 都可找到如柯西条件中所說的那样的下标 N，可見調和級数是发散的。

这就証明了:条件

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

乃是級数收斂的必要条件,但不是充分条件。

§3. 絕对收斂与条件收斂

我們还要介紹两个概念。

若級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

諸項絕对值所成的級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{2}$$

收斂,則級数(1)称为**絕对收斂的**。

当級数(2)收斂时,級数(1)不可能是发散的,这是因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|,$$

可見,若級数(2)滿足柯西条件,則級数(1)也滿足同样的条件。

这样看来,若級数(2)收斂,則級数(1)也收斂，并且在这种情形下,我們就称之为絕对收斂,以期由此得以强調指出：它之所以收斂是由于一般項的絕对值趋于零相当地快所以致之；而不是有賴于出現了异号諸項,当項数取得相当多的时候,諸項才以某种形式互相抵消,以致使級数的部分和趋于有限的极限。

若級数(1)收斂，但与它对应的級数(2)发散,則称級数(1)为**条件收斂的**。

在实际上，用柯西檢驗法去判定所給級数是否收斂的問題往往是很困难的。因此,重要的是,在研究級数时必須要有一些便于

使用的判别收斂及发散的充分条件。下面我們来讲几种。

首先我們来瞧瞧**交錯級数**，也就是其中任何相邻两项符号都相反的級数。

萊布尼茲定理 若当 $n\to\infty$ 时交錯級数第 n 項的絕对值单調地趋于零，則这級数至少必为条件收斂級数。

証 設所給的交錯級数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots \tag{3}$$

滿足条件
$$u_1>u_2>\cdots>u_n>\cdots$$

及
$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

我們来看这級数的具有偶数指标的部分和所成的序列 $\{S_{2k}\}$。

由关系式

$$S_{2k}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2k-1}-u_{2k}) \tag{4}$$

可見序列 $\{S_{2k}\}$ 是递增的，因为依題設对于所有的 n 来說都有 $u_n>u_{n+1}$，所以在(4)的右边所有的差全是正的。

但同时

$$S_{2k}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2k-2}-u_{2k-1})-u_{2k}, \tag{4}$$

由此可見，序列 $\{S_{2k}\}$ 是上有界的，即对所有的 k，都有

$$S_{2k}<u_1.$$

因而 $\{S_{2k}\}$ 是上有界的增序列，所以存在极限：

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k}=S.$$

因为
$$S_{2k+1}=S_{2k}+u_{2k+1},$$

由題設
$$\lim_{k\to\infty} u_{2k+1}=0,$$

所以我們有：

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty} S_{2k}=S.$$

因此，
$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$

而这就意味着所給級数(3)是收斂的。

至于由級数(3)諸項的絕对值所組成的級数，在所給条件下則可能是收斂的，也可能是发散的。因此，萊布尼茲定理只提供了級数为条件收斂的充分条件，却沒有解决所給級数是不是絕对收斂的問題。

例如，几何級数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots$$

滿足萊布尼茲定理，并且显然是絕对收斂的；但称为**萊布尼茲級数**的級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

虽然也滿足萊布尼茲定理，可是它却仅仅是条件收斂的，因为由它的諸項絕对值所組成的級数是調和級数——是发散的。

最后，我們指出：若用級数(3)的部分和来代替这級数的和，則所产生的誤差的絕对值必小于被抹掉級数第一項的絕对值。

实际上，对于級数(3)，我們有：

$$|S-S_n|=|u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\cdots|=$$
$$=|u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots|<u_{n+1}.$$

下述法則告訴我們檢驗級数的絕对收斂性，特別是檢驗正項級数的收斂性的方法。

級数比較法則 設有两个正項級数：

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \qquad (u)$$
$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \qquad (v)$$

对于所有的 n 都有 $u_n\leqslant v_n$，則由級数(v)的收斂性可推知級数(u)的收斂性，而由級数(u)的发散性可推知級数(v)的发散性。

实际上，設級数(v)收斂，則它滿足柯西条件。但因

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\leqslant v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots+v_{n+p},$$

可見級数(u)也滿足柯西条件，因而收斂。

若級数(u)发散，則級数(v)也必发散。因为要是不然，假若級

数(v)收斂的話，則据所已証明的道理可知級数(u)也将是收斂的，那就与假設矛盾了。

注意：上述法則可以改成**从某項起**(譬如从第 n_0 項起)滿足条件 $u_n<v_n$ 就行了。因为在討論級数的收斂性或发散性的問題上，級数的有限多項不起什么作用，因而当 $n<n_0$ 时不必一定要滿足条件 $u_n\leqslant v_n$。

我們再来瞧瞧級数的两个收斂檢驗法，它們都是基于与几何数貫相比較而来的。

达朗貝尔檢驗法 我們先証明下述断語。

設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

从某一項(第 n_0 項)起所有諸項都滿足条件：

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<q<1, \tag{5}$$

則級数(1)必絕对收斂。

实际上，由条件(5)我們有：

$$\left|\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right|<q,\ \left|\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right|<q,\ \cdots,\ \left|\frac{u_{n_0+m}}{u_{n_0+m-1}}\right|<q,\ \cdots.$$

由此即得

$$|u_{n_0+1}|<|u_{n_0}|q,\ |u_{n_0+2}|<|u_{n_0}|q^2,\ \cdots,\ |u_{n_0+m}|<|u_{n_0}|q^m,\ \cdots. \tag{6}$$

因为級数

$$|u_{n_0}|q+|u_{n_0}|q^2+\cdots+|u_{n_0}|q^m+\cdots$$

是几何数貫，它的公比 q 适合 $0<q<1$，所以是收斂級数，因此，由級数比較法則与諸不等式(6)可知級数

$$|u_{n_0+1}|+|u_{n_0+2}|+\cdots+|u_{n_0+m}|+\cdots \tag{7}$$

也必收斂。由此也推知級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{2}$$

收斂，因为級数(7)乃是級数(2)的余項之故。可是級数(2)收斂就意味着所給級数(1)絕对收斂。

注意：若对于級数(1)来說，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=k<1,$$

則級数(1)滿足条件(5)，因而級数(1)絕对收斂。

实际上，若我們取定适合条件 $k<q<1$ 的某一数 q，則因当 $n\to\infty$ 时 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to k<q$ 之故，所以当 n_0 充分大时，对于所有的 $n\geqslant n_0$ 来說，不等式

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<q$$

都是成立的。

如果对于級数(1)来說，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=k>1,$$

則当 n_0 充分大时，对于所有的 $n>n_0$ 来說，不等式

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$$

都是成立的，也就是說

$$|u_{n+1}|>|u_n|,$$

由此可見，当 $n\to\infty$ 时 u_n 不趋于零，即級数(1)不滿足收斂的必要条件，从而是发散的。

若对于級数(1)来說，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1,$$

則級数(1)可能是收斂的，也可能是发散的。例如：对于调和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 来說，显然 $k=1$；我們知道，调和級数是发散級数。可是，对

于莱布尼兹級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 来說，虽然它也有 $k=1$，但却是(条件)收斂的。

这样看来，我們有下述的級数收斂檢驗法。

达朗貝尔檢驗法 若对于級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

来說，存在

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=k,$$

則当 $k<1$ 时級数是絕对收斂的，而当 $k>1$ 时級数是发散的。如果 $k=1$，那就需要用别的方法来判别級数的收斂性。

柯西檢驗法 我們証明下述断語，

設級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

从某一項(第 n_0 項)起所有諸項都滿足条件

$$\sqrt[n]{|u_n|}<q<1, \tag{8}$$

則級数(1)必絕对收斂。

实际上，由条件(8)我們有：

$$|u_n|<q^n,\ n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots,\ n_0+m,\ \cdots. \tag{9}$$

因为由諸不等式(9)的右边部分构成的級数

$$q^{n_0}+q^{n_0+1}+\cdots+q^{n_0+m}+\cdots$$

是收斂的，所以由級数比較法則可知：由諸不等式(9)的左边部分构成的級数

$$|u_{n_0}|+|u_{n_0+1}|+\cdots+|u_{n_0+m}|+\cdots \tag{10}$$

也必收斂。由此又推知級数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{2}$$

的收斂性。这就意味着級数(1)絕对收斂。

注意：若对于級数(1)来說，存在