

名校好题

名校名师 绝妙好题 专题专练 打造高分

高中 数学分册

解析几何与立体几何

稳
操
胜
券

最好的题目
最详尽的讲解
最完备的知识体系
最苛刻的选取题目的标准

mingxiaohaoti

开明出版社
press

名校好题

高中数学分册

解析几何与
立体几何

主编 刘学勇

mingxiaohaoti

开明出版社

名校好题编委会

黄文选	张德利	冯燕英	李松文
李家智	李隆顺	李宝林	陈立华
陈英杰	林文俊	赵 环	赵 玮
卢 明	曹柏树	刘学勇	蓝 洋
张绍田			

本册主编 刘学勇
编 者 李义国 田 圆 杨少平
魏烈斌 刘荣显

总 策 划 焦向英
策划执行 马小涵 林水平
责任编辑 马小涵

名校好题
高中数学分册
解析几何与立体几何
刘学勇 主编

*

开明出版社出版发行
(北京海淀区西三环北路 19 号外研社大厦 邮编 100089)

保定市印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本:787×1092 1/16 印张:8.25

2002 年 2 月北京第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-80133-590-2/G·516 定价:9.00 元

[素质教育≠不考试]

素质教育作为培养跨世纪人才的教育思想与模式已成为我国教育界的共识，然而推行素质教育决不是要摒弃考试。迄今为止，在全世界的教育领域内，考试仍不失为一种最有效的教育质量评价和人才选拔的工具。正如英国著名数学家G. H. 哈代所说：“了解一个人的惟一方法是考试，无论是数学、文学，还是哲学……无一例外。”我们真正要扭转的是普通教育“片面追求升学率”的应试教育现状，反对一切为了应付考试的“题海战术”，还学生以自主学习的动力。

[高分≠题海战术]

中、高考的试题改革，已从考察学生掌握知识的情况，转移到考察学生掌握学习方法，综合运用各种知识的能力。淹没在题海中会毁掉学生，死记硬背拿不了高分。素质教育归根结底要教给学生点金术，在培养学生的思维能力上下扎扎实实的功夫。实践证明，决不能只一味地让学生一道道题做下去，关键要教给他们解题的思路、方法、步骤，提高他们举一反三、触类旁通的能力。

正是基于以上对教育教学的深入思考，我们组织教学一线的诸位专家，精心编写了这套《名校好题》丛书系列，以帮助广大学生以最短的时间、最好的效果，高效率掌握知识提高能力，在科学方法的指导下，聪明地考出好成绩。

致读者

mingxiao

《名校好题》“好”在这里

[第一，书中所选均是“一可当十”的名题好题。]

入选《名校好题》的题目出自以下范围：

① 1991~2001年北京、上海高升学率、高教学质量地区以及重点学校的质量检测题、期中期末测试题、高考模拟题；

② 1991~2001年湖北、湖南、江苏、浙江、东北等各省高升学率、高教学质量的市、区以及重点学校的质量检测题、期中期末测试题、高考模拟题；

③ 近年的全国高考试题、全国春季高考试题、上海高考试题；

④ 近年全国各类学科竞赛中难度适合的精彩名题；

⑤ 《名校好题》编委会为广大考生度身定制的综合性和精华好题。

这些题目均“出身名门”，且又经过了编者严格的层层筛选，其具体选题标准为：例题要求有代表性，利于全面剖析知识点，涵盖该知识点的各种考查角度；习题要求题型新颖有特色，力求将知识点可以考查到的重点、难点全部给以反映；题目综合性要强，以培养学生融会贯通的能力，迎合目前高考综合考试的大趋势。

[第二，编写体系完善科学，使诸多好题“物尽其用”，“好”副其实。]

《名校好题》基于小学到中学各个学科的知识体系，按照知识专题编写而成。高中按专题将每科细分为两到三册；初中和小学则一科一册，在册内划分专题。这样既适于配合学习巩固新知，又适于临考复习，学生也可以挑选自己的薄弱学科专题进行强化训练，适用范围相当广泛。

本丛书以中、高考要求为导向，以基础知识为依托，以好题为载体，以创新思维为核心，以能力运用为宗旨，全方位引导学生对同一个问题，从不同角度进行剖析，使学生学会辨析概念、综合概括并解决实际问题，最终形成流畅变通的思维方式。

书中每科知识点依中、高考要求的难度层次，给出一至三道例题，在对例题的分析解答中，提供了“进入→攻击→解答→回顾→扩展”这一整套科学的思考方式，提出两种以上解题思路和方法，充分发掘所选好题的内在精华，达到启发学生思路，培养创造性思维能力的目的。更为实用的是，本丛书要求读者亲自参与每个题目的练习，并且在练习后的“提示·分析·解答”中至少给出一种详细的全过程解答，将学生解题过程中的疑惑转化为经验，并最终形成科学的思维习惯。

一流的编写队伍

本丛书的编写者们，都是在教学一线，具有五年以上带升学班级经验的特高级教师，他们来自：北京四中、北大附中、人大附中、北京五中、黄冈中学、荆州中学等。这些老师们在选取题目、构造题目、解读题目等方面煞费苦心，使本书的编写质量不同一般。

作为立足于教育领域，积极策划出版教学辅导书的我们，殷切期望读者与我们多交流，多提宝贵意见和建议，使我们的图书质量更高，使我们的服务质量更高。

由于编写时间有限编写者们水平有限，不妥之处，请读者不吝赐教。

编者
2001年10月

AMAA11/04

做名校好题，清华、北大等着你！

本书 读

例题1

(2001年上海高考试卷)

将0.1摩尔铝投入含有0.2摩尔NaOH溶液中，加热完全反应后，试解答下列问题：

(1)在标准状况下生成 H_2 多少升？

进入

审题过程：讲解如何审题，如何把握题给条件对问题求解的意义。

解答(试试看)

解答(试试看)：具体给出解答的步骤；或者由读者根据“攻击”的步骤自己尝试写出解答，多为较简单的或者攻击中讲解详细的内容。

推广

题目的延伸：方法的推演通用，知识横向的联系等，有的采用框图等直观的形式。

攻击

具体解题思路：至少清晰详细地表述三种不同的思路，为明确表达，有的采用框图等直观的形式。

回顾

对此例题进行总结，包括方法、知识背景等。

例题

每题至少三种解题思路，详细清晰地剖析，涵盖本知识块儿的易考内容，揭示尽可能多的解题方法。

练习

题目已注明出处，多为高升学率的地区、学校的单元练习、模拟自测、升学考试，如江浙、湖北、上海、北京等地区，题型多为问答和计算，题后留有空白，并留有一栏草稿，方便作答并检查。

提示·分析·解答

习题的答案根据代表性和启发性给出提示或至少一种思路，部分题目在解法后给出了举一反三栏目，目的是由此题推展开，促进读者对知识的理解，一通百通，达到熟练解题，熟练运用各种解题思路和方法的目的。

CONTENTS

目 录

第一章 直线和平面	1	例题 3	
		练习	
		提示·分析·解答	
例题 1			
例题 2			
例题 3			
练习			
提示·分析·解答			
第二章 空间中的距离与角的计算	21	75 第五章 椭圆、双曲线、抛物线	
例题 1		例题 1	
例题 2		例题 2	
例题 3		例题 3	
练习		练习	
提示·分析·解答		提示·分析·解答	
第三章 面积与体积	38	98 第六章 轨迹问题	
例题 1		例题 1	
例题 2		例题 2	
例题 3		例题 3	
练习		练习	
提示·分析·解答		提示·分析·解答	
第四章 直线和圆	51	111 第七章 参数方程与极坐标方程	
例题 1		例题 1	
例题 2		例题 2	
		例题 3	
		练习	
		提示·分析·解答	

第一章

直线和平面

例题 1

(2000 年荆州中学高考模拟试题)

如右图两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 所在平面相交于 AB , $M \in AC$, $N \in FB$, 且 $AM = FN$, 求证: $MN \parallel$ 平面 BCE .



进入

本题旨在证明直线与平面平行.

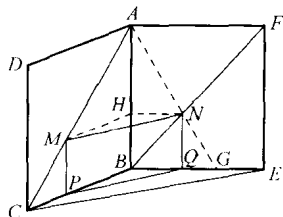


攻击

解决此类问题通常可从以下两方面来思考.

[思路一] 线面平行的判定定理, 即在平面 BCE 内寻求一条直线与直线 MN 平行即可.

[思路二] 面面平行的性质定理, 即须构造一个经过直线 MN 且平行于平面 BCE 的平面亦可.



解答

[方法一] 分别在平面 $ABCD$ 和平面 $ABEF$ 内过 M 、 N 作 $MP \perp BC$ 于点 P , $NQ \perp BE$ 于点 Q . 则 $MP \parallel AB$, $NQ \parallel AB$ 即 $MP \parallel NQ$. $\therefore AC$ 为正方形 $ABCD$ 的对角线 $\therefore \angle ACB = 45^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle CMP$ 中 $MP = CM \cdot \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{2}}{2} CM$. 同理可得: $NQ = \frac{\sqrt{2}}{2} BN$. 由题意知 $AC = BF$, 又 $\therefore AM = FN \therefore CM = BN$ 即 $MP = NQ$, 又 $\therefore MP \parallel NQ \therefore$ 四边形 $MNPQ$ 为平行四边形, 故 $MN \parallel PQ$. $\therefore MN \not\subset$ 平面 CBE , $PQ \subset$ 平面 $CBE \therefore MN \parallel$ 平面 BCE .

[方法二] 连结 AN 交 BE 于点 G . $\therefore AF \parallel BG \therefore \frac{AN}{NG} = \frac{FN}{BN}$ 又 $\therefore AM = FN$ 且 $AC = BF \therefore CM = BN$ 故 $\frac{FN}{BN} = \frac{AM}{CM}$ 即 $\frac{AN}{NG} = \frac{AM}{CM}$. 由平行线分线段成比例定理得 $MN \parallel CG$. $\therefore CG \subset$ 平面 CBE , $MN \not\subset$ 平面 $CBE \therefore MN \parallel$

平面 BCE .

[方法三] 在平面 $ABCD$ 内过 M 作 $MH \parallel BC$ 交 AB 于 H , 连结 NH . $\because MH \parallel BC$
 $\therefore \frac{AH}{AB} = \frac{AM}{AC}$ 又 $\because AM = FN$ 且 $AC = BF \therefore \frac{AM}{AC} = \frac{FN}{BF}$ 故 $\frac{AH}{AB} = \frac{FN}{BF}$
 $\therefore HN \parallel AF$ 即 $HN \parallel BE$. $\because BE \subset$ 平面 BCE $HN \not\subset$ 平面 $BCE \therefore HN \parallel$
 平面 BCE . 同理 $MH \parallel$ 平面 BCE . 故平面 $MNH \parallel$ 平面 BCF . $\therefore MN \subset$ 平
 面 $MNH \therefore MN \parallel$ 平面 BCE .



推广

本题的解题关键是从线面平行的判定定理和面面平行的性质定理两方面来解决问题的. 今后大家遇到类似的证明线线平行, 线面平行, 线面垂直, 面面垂直……问题时亦可从多方位多角度地寻求解决问题的办法.



回顾

本题采用了三种不同的方法即两种不同思路对如何证明线面平行这一问题进行了阐述. 其中方法一、二是采用的思路(一), 方法三是采用的思路(二).

例题 2

(2001 年荆州中学高考模拟试题)

如下图, 已知平行四边形的内角 $C = 60^\circ$, $CD = 2CB$, 又 $BC = a$, 沿对
 角线 BD 将 $\triangle ABD$ 折起, 与面 BCD 成直二面角.

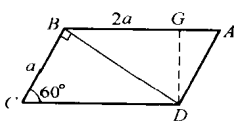
(I) 求 D 点到平面 ACB 的距离.

(II) 求 AC 与 BD 所成的角的正切值.

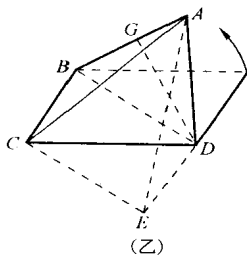


进入

这是个“折叠问题”, 也是立体几何中比较常见的类型题. 为了对照, 常画出没折叠前的平面图(如图甲)和折叠后的直观图(如图乙); 要弄清折叠前后的不变量和变量(主要指线段长和角度)——折痕两边的图形中的量是不变的; 折痕两边图形中的“对应”的量通常是变化的.



(甲)



(乙)



攻击

由“先转后算”的思路——先作出 D 点到平面 ACB 的距离, 再推算; 先作出 AC 与

BD 所成的角,再推算.



解答

[方法一] 作 $DG \perp AB$ 于 G . 因为平面 $ADB \perp$ 平面 BDC , $CB \perp BD$ (由 $\angle C = 60^\circ$, $CD = 2BC$ 推知), 所以 $CB \perp$ 平面 ABD . 故 $DG \perp CB$. 又 $DG \perp AB$, 故 $DG \perp$ 平面 ACB , 所以 DG 的长度为 D 点到平面 ACB 的距离.

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } DG = \frac{AD \cdot BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

[方法二] 作 $CE \parallel BD$, 连结 DE 、 AE , 由 $CE \parallel BD$, 知 AC 与 CE 所成的角就是 AC 与 BD 所成的角.

由 $CE \parallel BD$, 知 $BCED$ 是 $\square$, 故 $DE = BC = a$, $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{2}a$, 因为 $AD \perp$ 平面 $BCED$, $DE \perp CE$, 由三垂线定理, 知 $AE \perp CE$, 所以 $\text{tg}\angle ACE = AE : CE = \sqrt{2}a : \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

即 AC 与 BD 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



推广

今后解决有关“折叠问题”都应抓好两点.

- ① 折叠前后的“变”与“不变”量.
- ② 解题过程中“先转后算”的思维方式.



回顾

此题除了进一步说明“距离”、“成角”的“先转后算”和“距离”、“成角”、“平行”、“垂直”间的相互转化外, 主要揭示“折叠问题”解题的特殊“规律”——最好画出折叠前的平面图, 和折叠后的直观图, 以便对照分析、推算; 二是要弄清折叠前后的不变量和变量 (主要指线段长度和角度): 分别在折痕两边的图形中的量是不变的, 而折痕两边的图形中“对应”的量 (如线段 AC 、 AB 、 AD 的长度) 一般是变的. 解这类题, 经验很重要, 要多做点这方面的题.

例题 3

(2000 年黄冈中学高考模拟试题)

如右图 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体, M 是 AA_1 的中点, 求过 D_1MB 的截面与底面 $ABCD$ 所成角的正切值.



进入

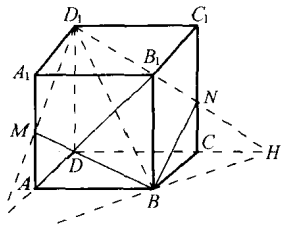
此题实质上是解决关于二面角的平面角正切值的问题.



攻击

[思路一] 此题不仅原图中没有给出二面角的平面角,而且二面角的棱也没有给出.要作出二面角的平面角必须先找到二面角的棱.

[思路二] B 是棱上一点,再找出棱上一个点,就可以了.分别延长 DA 、 D_1M 交于 G ,则 G 是棱上的点.



解答

延长 D_1M 、 DA 交于 G ,分别延长 GB 、 D_1N 交于 H ,连结 D_1H 交 CC_1 于 N ,则平面 D_1GH 与底面 $ABCD$ 所成的角就是截面 D_1MB 与底面 $ABCD$ 所成的角.

在 $\triangle D_1DG$ 中,因 $MA \parallel \frac{1}{2} D_1D$,知 A 是 DG 的中点.即 $GA = AD = AB$,又知 $\angle GAB = 90^\circ$,所以 $\angle ABG = 45^\circ$,又 $\angle ABC = 90^\circ$ 知 $\angle CBH = 45^\circ$,又 $\angle BCH = 90^\circ$,所以 $\angle BHC = 45^\circ$,因而 $CH = BC = CD$,即 C 为 DH 的中点.所以 AC 是 $\triangle DGH$ 的中位线,知 $GH \parallel AC$.

因 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,知:

$$\left. \begin{array}{l} D_1D \perp \text{平面 } ABCD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D_1B \perp AC \\ GH \parallel AC \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D_1B \perp GH \\ DB \perp GH \end{array} \right\} \Rightarrow \angle D_1BD \text{ 是所求二面角的平面角.}$$

$$\tan \angle D_1BD = \frac{DD_1}{DB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \text{过 } D_1MB \text{ 的截面与底面 } ABCD \text{ 所成角的正切值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



推广

本题解题关键在于寻找二面角的平面角.今后对于有关二面角的问题首先是要能找到或作出平面角.当然在此之前更应找到二面角的两个半平面及其棱.



回顾

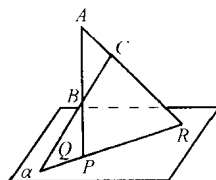
此题主要目的是说明如果要求的二面角的棱在原图中没有给出,通常先需作出棱,然后再作二面角的平面角;其次是平面几何和立体几何中的“平行”、“垂直”的相互转化.

◇ 练 习 ◇

1. 求证:不在平面内的一条直线和这个平面如果有交点则只能有一个.

草 稿

2. 如右图所示,已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外,它的三边所在的直线分别交 α 于 P 、 Q 、 R ,求证: P 、 Q 、 R 在同一条直线上.



草 稿

3. 在空间四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别为 AB 、 BC 、 CD 、 AD 边上的点, 求证:

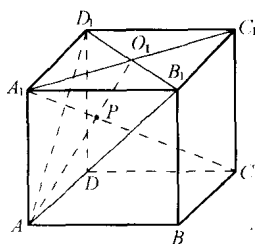
(1) 若 $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{HD} = \frac{CF}{FB} = \frac{CG}{GD}$, 则四边形 $EFGH$ 为平行四边形;

(2) 若 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{AH}{AD} = 1$, 则四边形 $EFGH$ 为梯形.

4. 设直线 a 和 b 为异面直线, 直线 c 和直线 a 平行, 而不和 b 相交. (1) 求证: 直线 c 和 b 为异面直线;

(2) 若 $a \perp b$, 求证: $c \perp b$.

5. 如右图, O_1 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上底面中心, 过 D_1, B_1, A 作一截面, 求证: 这截面和对角线 A_1C 的交点 P 一定在 AO_1 上.

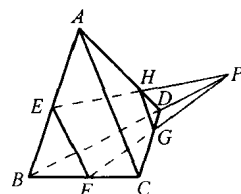


6. 空间四边形 $ABCD$, 连结对角线 AC 和 BD , E, F 分别为 BC, AD 的中点, $AB = BC = CD = DA = AC = BD$.

- (1) 求证: EF 为异面直线 BC, AD 的公垂线;
- (2) 设 $AB = a$, 求异面直线 BC, AD 间的距离.

草稿

7. 如右图,在四面体 $ABCD$ 中, E 、 F 分别为 AB 和 BC 的中点, G 、 H 分别在 CD 和 AD 上,且 $\frac{DG}{DC} = \frac{DH}{DA} = \frac{1}{m}$ ($m > 2$),求证:直线 EH 、 FG 、 BD 相交于一点.



8. S 是正三角形 ABC 所在平面外的点, $SA = SB = SC$ 且 $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 90^\circ$, M 、 N 分别是 AB 和 SC 的中点,求异面直线 SM 与 BN 所成角的余弦值.