无敌®

无敌升学应考系列

无敌高三数学 3

SUPER'S mathematics

全国重点名校名师根据高中教材编写

高中学生应考必备

无此防伪标志皆为盗版

作者 柯珊

高级教师。1960年至1966年就读于北京师大二附中、北京师大实验中学。1982年毕业于北京师范大学数学系。现执教于北京师范大学第二附属中学。曾任西城区兼职教研员。曾参加《名师中考指导手册》丛书及《中国小百科全书》编写工作。

SUPER

名师根据高中教材编写

无敌高三数学

3

mathematics

海豚出版社

mathematics

学数学，原本并不难

编者序

在期待中，辛劳中，喜悦中，责任中，我们同读者一起收获了高中数学。从孕育到生产完成的过程中有无数读者给予了鼓舞与鞭策。在《无敌初中数学》的基础上，我们再邀名师，吸取经验，提炼精华，倾力编写，完成此书，期望“百尺竿头，更进一步”。

数学在中小学课程设置中相当重要，特别是在高考中常是拉分的关键，但长期以来，它一直扮演着“拦路虎”的角色，学生深知其重要，却又畏惧。我们本着“兴趣是最好的老师”,致力于激发同学们对学习的兴趣及热忱，消除其畏惧心理，设计上先以彩色面目引人，而后以精湛翔实内容灌输，做到“华而且实”,如名师在旁，娓娓叙述，既弥补学生课上未及消化的部分，又起到加深巩固的作用。我们的目标是“请君入瓮”,一旦进入，必会发现别有洞天，一有收获，自会激起兴趣，增加信心，便会觉“学数学，原本并不难!”

根据不同年级的特点，我们做了不同的划分。高一数学立足于思路引领、方法指导，并配以详尽的解说，使其“入门有道”;高二数学则重于理论与实践的结合，在实际演练中，将思路拓宽；高三数学则紧跟高考，除了历次高考涉及的各种题型、各种解法的详尽指示，尚有针对各层次学生的应试技巧辅导，精彩题库任你遨游。

学习不是死记硬背，不是搞题海战术，而是应掌握良好的思维习惯。基于此，本套三册书均重于典型题的思路分析，题后的概括总结也起到举一反三的作用。“良好的开始，成功的一半”,高一时播下的良好的种子，经历高二的辛劳耕耘，必会在高三结出累累硕果。

我们在此预祝我们新书的出世能给莘莘学子带来更大的帮助，同时它也期待着与更多新老朋友结识，共创明天的坦途。

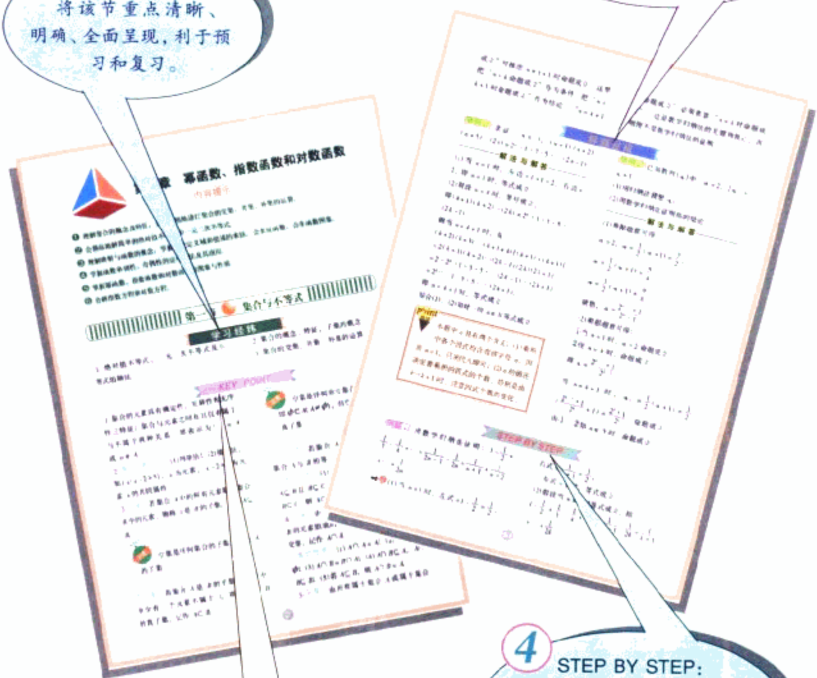
2001 年 7 月 30 日

本书编辑特色

代数

1 学习经纬：
将该节重点清晰、明确、全面呈现，利于预习和复习。

3 解题秘招：
以例题形式讲解本节所涉及之定义、公式、定理、性质……从而帮助学生加深对概念的理解。

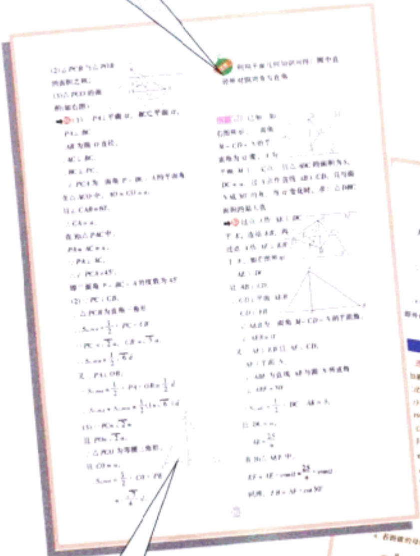


2 KEY POINT：
将教材中必背公式及解题必备技巧特别提炼出来，是学生应牢牢掌握之知识点。

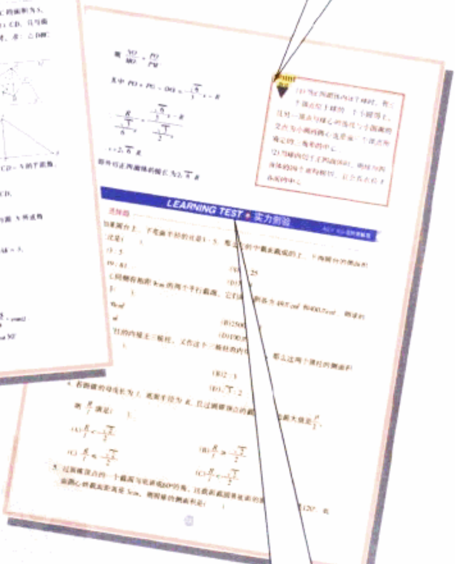
4 STEP BY STEP：
通过对各类题型之详尽解答，于步骤中逐一示范解题技巧，由此举一反三，使数学学习事半功倍。

几何

5 注意：
在学习过程中，随时随地提醒学生应强烈注意的地方，避免细节失误。



7 Point 指导：
将数学的解题思路，方法和易错失分之处特别归纳指出，是应考的提分秘诀。



6 图形：
全部图形均彩色化，不仅清晰明确，更利于理解题目并攻克难题。

8 LEARNING TEST · 实力测验：
采用习题的形式，帮助学生真实检测学习成效，书后附答案及解题思路供参考。

目录

代数

几何

实力测验·答案

第一章 函数

内容提示

❶ 集合的交、并、补集的运算.

❷ 映射与函数的概念.

❸ 函数记号、定义域、值域、反函数的定义，函数记号的使用及求函数的定义域、值域和反函数.

❹ 函数的增减性、奇偶性的定义，用定义证明函数在某区间的单调性和证明函数的奇偶性.

❺ 幂函数的定义、图象及性质.

❻ 指数函数的定义、图象及性质.

❼ 对数的定义、运算性质及换底公式.

❽ 对数函数的定义、图象及性质.

❾ 函数作图的对称、平移的法则，分段函数的作图.

❿ 解指数、对数方程.

KEY POINT

1 集合、子集、真子集、交集、并集、补集的概念

2 映射的概念，函数的概念及定义域、值域的求法

3 反函数的定义　反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域；原函数与反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称；原函数的图象过 (a, b) 点，反函数的图象必过 (b, a) 点，反之也对；在定义域上单调的函数才存在反函数；反函数与原函数的单调性相同；奇函数的反函数也是奇函数，偶函数没有反函数.

4 函数增减性的定义　如果函数 $y=f(t)$，$t=g(x)$ 同为增函数或同为减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数；如果函数 $y=f(t)$，$t=g(x)$ 其中一个是增函数，另一个是减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数.

5 函数奇偶性定义　定义域为以原点为中心的对称区间是函数具有奇偶性的必要条件；奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；奇函数 $y=f(x)$，若在 $x=0$ 有意义，则必有 $f(0)=0$；

运算性质：奇函数 × 奇函数 = 偶函数；偶函数 × 偶函数 = 偶函数；奇函数 × 偶函数 = 奇函数.

6 函数周期性定义　若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(x-a)$，则 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数.

7 函数作图　两条曲线的情况：

函数 $y=f(x)$ 的图象

(1) 与 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称；

(2) 与 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；

(3) 与 $y=-f(-x)$ 的图象关于原点对称；

(4) 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称；

(5) 与 $y=f(2a-x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；

(6)与 $2b-y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=b$ 对称；

(7)与 $2b-y=f(2a-x)$ 的图象关于 (a,b) 点对称；

(8) $y=|f(x)|$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象上半平面部分不变，下半平面部分关于 x 轴上翻得到的；

(9) $y=f(|x|)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象右半平面部分不变，左半平面图象去掉，画右半平面关于 y 轴的对称图象得到的；

(10) $y=f(x)+b$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象上、下平移 $|b|$ 个单位得到的；

(11) $y=f(x+a)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象左、右平移 $|a|$ 个单位得到的；

(12) $y=kf(x)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象每点横坐标不变，纵坐标 k 倍得到的；

(13) $y=f(kx)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 图象每点纵坐标不变，横坐标 $\frac{1}{k}$ 倍得到的．

一条曲线的情况：(1)若 $f(x)=f(2a-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；

(2)若 $f(a-x)=f(a+x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；

(3)若 $f(x)=f(-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

(4)若 $f(x)=-f(-x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称；

(5)若 $f(x)=f^{-1}(x)$，则 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

8 幂函数要会作 $y=x^{-2},x^{-1},x^{-\frac{1}{2}},x^{\frac{1}{3}},x^{\frac{1}{2}},x,x^2,x^3$ 的图象；并会在同一坐标系中作以上图象．

9 指数函数要会作 $y=(\frac{1}{2})^x,2^x,10^x$ 的图象，并由图象知道指数函数的性质．

10 对数计算公式 (1) $a^b=N\Leftrightarrow\log_aN=b$.

(2) $a^{\log_aN}=N$，$\log_aa^b=b$;

(3) $\log_a1=0$，$\log_aa=1$;

(4) $\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$，$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$，$\log_aM^n=n\log_aM$;

(5) $\log_aN=\frac{\log_bN}{\log_ba}$，$\log_{a^n}N^m=\frac{m}{n}\log_aN$，$\log_ab=\frac{1}{\log_ba}$．

11 对数函数要会作 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$\log_2x$，$\lg x$ 的图象，并由图象知道对数函数的性质．

12 指数方程与对数方程的解法 (1)化同底；(2)换元法；(3)取对数；(4)作图法．

解题秘招

一、集合

举例·1 已知 $I=R$，$A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x|x^2-5x\leqslant0\}$，则 $A\cap B=$______，$A\cup\overline{B}=$______．

解法与解答

$\because A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x|x^2-5x\leqslant0\}$，

$\therefore A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant5\}$，

$\overline{B}=\{x|x<0$ 或 $x>5\}$．

$\therefore A\cap B=\{x|0\leqslant x<3\}$，$A\cup\overline{B}=\{x|x<3$ 或 $x>5\}$．

凡需要填集合时，集合记号一定要写正确，否则高考不予给分．

举例·2 已知集合 $A=\{x|x^2+6x+5\leqslant0\}$，$B=\{x|3x^2-4ax+a^2<0\}$，若 $A\supset B$，求实数 a 的取值范围．

解法与解答

$A \supset B \Leftrightarrow B=\phi$ 或 $B\neq\phi$ 且 $B\subset A$.

(1) $B=\phi \Leftrightarrow \Delta=16a^2-12a^2=4a^2\leqslant 0 \Leftrightarrow a=0$,

(2) $B\neq\phi$ 且 $B\subset A=\{x\mid -5<x<-1\}$,

$B=\{x\mid(3x-a)(x-a)<0\}$, 如下图,

只需 $\begin{cases} a\geqslant -5, \\ \dfrac{a}{3}\leqslant -1, \end{cases}$ 解得: $-5\leqslant a\leqslant -3$.

综上所述, $a\in[-5,-3]\cup\{0\}$ 为所求.

由题设 $B\subset A$ 可知 $B=\phi$ 时合题意, 这种情况很容易遗漏, 特别要有分类讨论的意识.

二、函数记号

已知函数 $f(x+1)=x^2+2x$, $g(x)=x+2$, 求 $f[g(x)]$.

解法与解答

设 $t=x+1$, $x=t-1$,

则 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$,

$\therefore f(x)=x^2-1$.

$\therefore f[g(x)]=f(x+2)=x^2+4x+3$.

$f(t)=t^2-1$ 与 $f(x)=x^2-1$ 是相同的函数, 相同函数的标准有二: 一是定义域相同, 二是对应关系相同.

point 指导 已知 $f(x)$ 解析式, 求 $f[g(x)]$ 解析式; 已知 $f[g(x)]$ 解析式, 求 $f(x)$ 解析式, 这两类题须熟练掌握.

举例2 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ \pi, & x=0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(-1)]\}=$ ________.

解法与解答

$\because -1<0$,

$\therefore f(-1)=0$,

$\therefore f\{f[f(-1)]\}=f\{f(0)\}=f(\pi)$.

$\because \pi>0$,

$\therefore f(\pi)=\pi+1$,

$\therefore f\{f[f(-1)]\}=\pi+1$.

当 $\pi>0$, $f(x)=x+1$ 时, 很多学生会忘记将 π 代入 x 求值而造成错解 $f(\pi)=x+1$.

已知 $f(x)$ 是一次函数, 而且 $f[f(x)]=4x+9$, 求 $f(x)$.

解法与解答

设 $f(x)=kx+b$,

$\therefore f[f(x)]=f(kx+b)=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=4x+9$,

$\therefore \begin{cases} k^2=4, \\ kb+b=9. \end{cases}$

解得: $\begin{cases} k=2, \\ b=3, \end{cases}$ $\begin{cases} k=-2, \\ b=-9. \end{cases}$

$\therefore f(x)=2x+3$ 或 $f(x)=-2x-9$.

本例易误解为 $\because f[f(x)]=4x+9$, 设 $f(x)=kx+b$ 后, $f[f(x)]=f(kx+b)=4(kx+b)+9$.

三、定义域

举例·1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{1-x}-1}$；(2) $y=\dfrac{1}{\log_{x-1}(5-2x)}$.

——解法与解答——

(1)依题意可知：定义域 $\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\neq0,\\1-x\geq0,\\\sqrt{1-x}-1\neq0,\end{cases}$

解得：$\{x|x\leq1，且x\neq0,x\neq-1\}$，

即 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)$ 为所求定义域.

(2)依题意可知：定义域 $\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0,\\x-1\neq1,\\5-2x>0,\\\log_{x-1}(5-2x)\neq0,\end{cases}$

解得：$\{x|1<x<\frac{5}{2}且x\neq2\}$.

即 $(1,2)\cup(2,\frac{5}{2})$ 为所求定义域.

定义域是集合，故结果必须写成集合形式或区间形式.

point 指导

函数自变量所受的限制有：(1)分母不为0；(2)偶次根式下的式子大于等于零；(3)零指数或负指数的底数不等于零；(4)对数的真数大于零，底数大于零且不等于1. 另外，关于三角函数及反三角函数的定义域见第六章三角复习.

举例·2 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1,4]$，则 $f(x)$ 的定义域为________，$f(3^x)$ 的定义域为________.

——解法与解答——

$\underline{[3,9]}$，$\underline{[1,2]}$.

$f(2x+1)$ 定义域为 $[1,4]$，即 $1\leq x\leq4$，

$\therefore2\leq2x\leq8$，$3\leq2x+1\leq9$，

则 $f(x)$ 定义域为 $[3,9]$.

$\because f(x)$ 定义域为 $[3,9]$，即 $3\leq x\leq9$，

$\therefore3\leq3^x\leq9$，$\therefore1\leq x\leq2$，

则 $f(3^x)$ 的定义域为 $[1,2]$.

point 指导

已知 $f(x)$ 定义域，求 $f[g(x)]$ 定义域；已知 $f[g(x)]$ 定义域，求 $f(x)$ 定义域，这两类题必须熟练掌握.

四、值域

举例·1 求下列函数的值域：

(1) $y=2x^2-4x+1\ (2\leq x\leq3)$；

(2) $y=2x^2-4x+1\ (-1\leq x\leq2)$.

——解法与解答——

(1) $x_0=\dfrac{-b}{2a}=1\notin[2,3]$，

$\therefore$最大值 $y|_{x=3}=7$，最小值 $y|_{x=2}=1$，

$\therefore$值域为 $[1,7]$.

(2) $x_0=1\in[-1,2]$，

$\therefore$最大值 $y|_{x=-1}=7$，最小值 $y|_{x=1}=-1$，

$\therefore$值域为 $[-1,7]$.

值域是集合，故结果必须写成集合形式或区间. 另外，当 x_0 属于指定区间时，距 x_0 远的区间端点取得另一最值.

二次函数在指定范围内的值域要首先计算抛物线顶点横坐标是否在指定范围内，因而最大、最小值的取值点有所不同.

举例·2 求下列函数的值域：

(1) $y=-2x+1\ (0\leqslant x\leqslant 2)$；

(2) $y=\lg(x^2+2x+3)$.

——解法与解答——

(1) $\because y=-2x+1$ 是减函数.

$\therefore$ 最大值 $y|_{x=0}=1$，最小值 $y|_{x=2}=-3$，

$\therefore$ 值域为$[-3,1]$.

(2) $\because t=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$，而 $y=\lg t$ 是增函数，

$\therefore$ 最小值 $y|_{t=2}=\lg 2$，

$\therefore$ 值域为$[\lg 2,+\infty)$.

> **point 指导** 已知函数在指定区间为单调函数，则区间端点的函数值为值域的最大、最小值.

举例·3 求下列函数的值域：

(1) $y=x-\sqrt{1-x}$；

(2) $y=2\cdot 3^x+9^x+1$.

——解法与解答——

(1)设 $t=\sqrt{1-x}\geqslant 0$，

$\therefore x=1-t^2$，

则原函数化为 $y=1-t^2-t=-t^2-t+1$ $(t\geqslant 0)$，$t_0=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{1}{2}\notin[0,+\infty)$.

$\therefore$ 最大值 $y|_{t=0}=1$，

$\therefore$ 值域为$(-\infty,1]$.

(2)设 $t=3^x>0$，则原函数化为 $y=t^2+2t+1=(t+1)^2\ (t>0)$，

$\therefore y>1$，即值域为$(1,+\infty)$.

> **point 指导** 用换元法求函数的值域时，新元的取值范围一定要考虑.

举例·4 求下列函数的值域：

(1) $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$；

(2) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$.

——解法与解答——

(1) $y=\sqrt{-(x+1)^2+4}$，

$\because$ 右边是算数根的记号，当 $x=1$ 时显然可取到最小值 $y=0$；又当 $x=-1$ 时，可取到最大值 $y=2$，

$\therefore$ 值域为$[0,2]$.

(2) $y=\dfrac{5}{2(x-1)^2+1}$，该分式当分母最小时，即当 $x=1$ 时，分母有最小值 1，y 就有最大值 5. 另外，分母取值范围为$[1,+\infty)$，当分母$\to+\infty$时，y 就从正方向$\to 0$.

$\therefore$ 值域为$(0,5]$.

> **point 指导** 凡是函数解析式中出现自变量 x 处，若仅是 x 的二次函数，一般可用"配方观察法"求值域.

举例·5 求下列各式的值域：

(1) $y=\dfrac{3-2x}{x+2}$；

(2) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$；

(3) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

——解法与解答——

(1)反解 $yx+2y=3-2x$，

$\therefore (y+2)x=3-2y$，

$\therefore x=\dfrac{3-2y}{y+2}$，

由函数定义知原象 x 必存在，

$\therefore$ 对 y 的限制应是 $y\neq -2$，

即值域为$\{y|y\neq -2\}$.

(2)反解 $2yx^2-4yx+3y-5=0$,

由函数定义知原象 x 必存在.

∴对 y 的限制为① $y=0$, 此时原关于 x 的方程化为 $-5=0$, 原象 x 不存在, 故 $y\neq 0$;

② $\begin{cases} y\neq 0, \\ \Delta=16y^2-24y^2+40=-8y^2+40\geqslant 0, \end{cases}$

解得: $\begin{cases} y\neq 0, \\ 0\leqslant y\leqslant 5. \end{cases}$ $\therefore 0<y\leqslant 5.$

综上所述, 值域为$(0, 5]$.

(3)反解 $yx^2-2x+y=0$,

由函数定义知原象 x 必存在.

∴对 y 的限制为① $y=0$, 则原关于 x 的方程化为 $-2x=0$, 解得 $x=0$, 原象存在,

$\therefore y=0$ 可取;

② $\begin{cases} y\neq 0, \\ \Delta=4-4y^2\geqslant 0, \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} y\neq 0, \\ -1\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$

$\therefore -1\leqslant y\leqslant 1$ 且 $y\neq 0$.

综上所述, 值域为$[-1, 1]$.

凡分式函数中分子或分母至少有一个为二次函数时, 反解后出现的关于 x 的一个方程若二次项系数含有字母 y, 一定要分类讨论.

point 指导

凡分式函数均可用"反解原象存在法"求值域, 尤其当分子、分母中至少有一个为二次式时, 还可求出函数的最大、最小值.

举例·6 求函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$的值域.

解法与解答

当 $x>0$ 时, $y=x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$,

当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$, 即 $x=1$ 时取得等号;

当 $x<0$ 时, $y=x+\dfrac{1}{x}=-\left[(-x)+\dfrac{1}{(-x)}\right]$

$\leqslant -2\sqrt{(-x)\dfrac{1}{(-x)}}=-2$,

当且仅当 $-x=\dfrac{1}{-x}$时,

即 $x=-1$ 时取得等号.

综上所述, 值域为$(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$.

point 指导

用均值定理求值域在此仅举一例, 利用均值定理变形技巧性要求较高, 在第二章不等式复习中再详尽介绍.

五、反函数

举例·7 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt{x}+1$;

(2) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$;

(3) $y=2x^2+4x-3$ $(x\leqslant -1)$;

(4) $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$;

(5) $f(x)=\begin{cases} -x, & 0<x\leqslant 1, \\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$

解法与解答

(1) $y-1=\sqrt{x}$, $(y-1)^2=x$,

$\therefore y=(x-1)^2$.

又∵原函数 $y=\sqrt{x}+1$ 可观察出值域为$[1, +\infty)$, 即为反函数的定义域,

$\therefore f^{-1}(x)=(x-1)^2$ $(x\geqslant 1)$.

(2) $yx+2y=2x-1$，$(y-2)x=-2y-1$，

$x=\dfrac{2y+1}{2-y}$，

$\therefore y=\dfrac{2x+1}{2-x}$.

由反解原象存在法得原函数的值域为 $y\neq 2$，即反函数的定义域为 $x\neq 2$，

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{2-x}\ (x\neq 2)$.

(3) $2x^2+4x-y-3=0$，由二次方程的求根公式有 $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+8y+24}}{4}$

$=-1\pm\dfrac{\sqrt{2y+10}}{2}$.

注意到已知 $x\leqslant -1$，

$\therefore x=-1-\dfrac{\sqrt{2y+10}}{2}$，

$\therefore y=-1-\dfrac{\sqrt{2x+10}}{2}$.

由配方观察法求原函值域，$y=2(x+1)^2-5\geqslant -5$，即值域为$[-5,+\infty)$，

$\therefore$反函数的定义为$[-5,+\infty)$，

$\therefore f^{-1}(x)=-1-\dfrac{\sqrt{2x+10}}{2}\ (x\geqslant -5)$.

(4) $ye^{2x}-y=e^{2x}+1$，$(y-1)e^{2x}=y+1$，

$e^{2x}=\dfrac{y+1}{y-1}$，

$\therefore 2x=\ln\dfrac{y+1}{y-1}$，$x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，

由反解原象存在法得：$x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y+1}{y-1}$中，

y所受限制为$\dfrac{y+1}{y-1}>0$，

$\therefore y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$为值域，即反函数的定义域，

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\ (x<-1$ 或 $x>1)$.

> 以无理数 $e=1.7\cdots$为底的对数符号记为 ln.

(5)当 $y=-x\ (0<x\leqslant 1)$时，反解 $x=-y$，

$\therefore y=-x$，

原函数值域由单调性可知为 $y\in[-1,0)$，即为反函数的定义域，

$\therefore f^{-1}(x)=-x\ (-1\leqslant x<0)$；

当 $y=x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$时，反解 $x=\pm\sqrt{y}$，

注意到 $-1\leqslant x\leqslant 0$.

$\therefore$取 $x=-\sqrt{y}$，

$\therefore y=-\sqrt{x}$，原函数的值域由二次函数在指定范围内的求法知 $y\in[0,1]$，

$\therefore f^{-1}(x)=-\sqrt{x}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

综上所述，$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$

> 分段函数的反函数的求法是：分段求，综合写结果.

> **point 指导**
> 求反函数的步骤为：(1)反解，(2)交换自变量与函数的字母，(3)求出反函数的定义域. 要求反函数的定义域必须先求原函数的值域.

举例·2 已知$f(x+1)=x^2-3x+2\ (x<\dfrac{3}{2})$，求 $f^{-1}(x)$.

——解法与解答——

设 $t=x+1$，则 $x=t-1$，

$\therefore$原函数式化为 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)$

$+2=t^2-5t+6.$

$\because x<\frac{3}{2}$,

$\therefore t=x+1<\frac{5}{2}$,

$\therefore f(x)=x^2-5x+6\ (x<\frac{5}{2})$.

即 $y=x^2-5x+6$，$x^2-5x-y+6=0$.

由二次方程求根公式有

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+4y-24}}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{4y+1}}{2}.$$

注意到 $x<\frac{5}{2}$,

$\therefore$ 取 $x=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{4y+1}}{2}$.

$\therefore y=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{4x+1}}{2}$.

又由二次函数在指定范围的求值域方法可得 $f(x)=x^2-5x+6\ (x<\frac{5}{2})$的值域为 $y\in(-\frac{1}{4},+\infty)$，即为反函数的定义域，

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{4x+1}}{2}\ (x>-\frac{1}{4})$.

六、增减性

举例·1 运用定义证明 $f(x)=\frac{-3x}{x^2-1}$在$(-1,1)$上是增函数.

解法与解答

任取 $-1<x_1<x_2<1$,

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{-3x_2}{x_2^2-1}-\frac{-3x_1}{x_1^2-1}$$

$$=\frac{-3x_2(x_1^2-1)+3x_1(x_2^2-1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

$$=\frac{-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+3x_2-3x_1}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

$$=\frac{3x_1x_2(x_2-x_1)+3(x_2-x_1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

$$=\frac{3(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_2+1)(x_2-1)(x_1+1)(x_1-1)}.$$

$\because -1<x_1<x_2<1$,

$\therefore x_2+1>0$，$x_2-1<0$，$x_1+1>0$，$x_1-1<0$，$x_2-x_1>0$，且 $-1<x_1x_2<1$.

$\therefore x_1x_2+1>0$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

因式分解要分解到底，若分母 x_2^2-1 不再分解，理由是 $-1<x_2<1$，故 $0<x_2^2<1$，$x_2^2-1<0$，实质上是用了 $y=x^2$ 幂函数的性质证明，而不符合题目要求的用“定义”证明增减性.

举例·2 运用定义证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$(0,+\infty)$上是增函数.

解法与解答

任取 $0<x_1<x_2$,

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$$

$$=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

$\because 0<x_1<x_2$,

$\therefore x_2-x_1>0$，又$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$显然成立，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

point 指导

凡无理函数证明增减性，分解因式的方法是“有理化”.

举例·3 用定义证明 $f(x)=3x^3+1$ 在 R 上是增函数.