

创新思维训练丛书

主 编 / 翟连林

编 著 / 梁瑞兴

走近高校

高中数学总复习

下 册

ZOU JIN GAO XIAO
GAO ZHONG SHU XUE ZONG FU XI

华夏出版社

创新思维训练丛书编辑委员会

主 编 翟连林

副主编 刘 冰 叶龄逸 谭 甬

编 委 (以姓氏笔画为序)

马家甫 毛维平 王乾岭

叶龄逸 刘 冰 朱亚烈

李焕廉 佘新耀 杨志刚

岳明义 林福堂 赵光礼

施英杰 秦智琳 黄丽娟

梁瑞兴 谭 甬 翟连林

主 编 絮 语

为了全面推进以培养创新精神为重点的素质教育,帮助青少年学好科学文化知识,发展思维,增强创新能力和应用意识,由我牵头组织全国各地活跃在教学第一线的骨干教师编写了这套丛书。

《走近高校——高中数学总复习(下)》是根据高中数学教材内容和国家考试中心制定的《数学科考试说明》进行编写的。全书共分五部分:第一部分 单元训练题,第二部分 高考模拟试题,第三部分 单元训练题与高考模拟试题解答,第四部分 小巧题、易错题评析与易错知识点提示,第五部分 2001 年高考十份数学试题汇编及详解(含选择、填空题详解),附录 相约在 2008。

本书根据高考最新要求,编写了十六套高中数学单元训练题,五套高考模拟试题;精编了各章节中最具代表性的小巧题、易错题七十题进行评析;而数学科易错知识提示六十四条,则为考生高考前所必读。

本书包括 2001 年高考数学试题的所有选择题,填空题和解答题都给出较详细的解答,便于读者自学及课外阅读。本书不但高三毕业班学生可以用作第二轮复习用书,高一、高二的学生也可以用作同步学习训练教材,还可以作为中学数学教师教学参考用书。

本书编著者梁瑞兴老师是福建省南平一中数学教研组长,高级教师,中国数学奥林匹克一级教练员,从教三十余年,具有丰富的教学经验,特别是指导高考复习的经验,高考成绩优异,曾荣获地区高中毕业班理科教学质量一等奖,2000 年在苏步青数学教育奖评选活动中获第三届福建省数学教育奖。梁老师有多部著作面市,他主编的《高中数学单元过关与综合训练》等深受广大高三毕业生的欢迎。

本书在编写过程中，马家甫（广西南宁 13 中）、胡晓梅（北京 35 中）、张宁生（首都师范大学）、翟英（河北丰南二中）、黄丽娟（贵州贵阳卫校）以及我的助手邸艳茹、高瑞芳、胡盛凤、柳莎等同志倾注了大量心血，做了大量工作。他们有的提供资料，有的绘图，有的核算，有的配备训练题，有的更换题目及解答等等，在此一并致谢。

由于时间仓促，加之水平所限，本书肯定存在不少缺点和错误，欢迎使用本书的师生以及阅读过本书的同行提出宝贵意见，我们一定认真修改，使之逐步完善，以求为学生提供一本实用的高质量的学习用书。

最后，值得提及的是，本书能在两个多月的时间出版面市，得益于华夏出版社领导的鼎力支持和责任编辑、印制人员的出色工作，在此我谨代表丛书全体编委和作者致以衷心的感谢！

《创新思维训练丛书》主编 翟连林

2001 年 8 月于北京

内 容 简 介

本书是根据高中数学教材内容和国家考试中心制定的《数学科考试说明》以及沪津晋赣等省市高考对数学科的要求编写的。全书共分为五部分：单元训练题、高考模拟试题、单元训练题与高考模拟试题解答、小巧易错题评析与易错知识点提示、2001年高考10份数学试题汇编及详解（含选择、填空题详解）。书中根据高考最新要求编写了16套高中数学单元训练题、5套高考模拟试题、10份2001年全国以及沪津晋赣粤豫等省市高考数学试题，编选高中数学70道小巧易错题进行评析，并归纳提炼出64条易错知识点提示，学生阅读这些内容既能复习巩固数学基础知识，又可提高数学能力，以适应高考要求，在高考中取得好成绩。附录中的短文《相约在2008》从北京申奥成功，围绕数字“2008”展示数学的情趣，有益于提高学生学习数学的探索精神。本书不但可以作为高三毕业班学生第二轮复习用书，高一、高二的学生也可以用作同步学习训练教材，还可以作为中学数学教师教学参考用书。

ISBN 7-5080-2508-3



9 787508 025087 >

ISBN 7-5080-2508-3/G · 1169

定价：18.00元

目 录

第一部分 单元训练题	(1)
第一单元 集合与函数训练题	(1)
第二单元 幂函数、指数函数与对数函数训练题	(5)
第三单元 不等式训练题	(9)
第四单元 数列训练题	(12)
第五单元 数列的极限与数学归纳法训练题	(15)
第六单元 复数训练题	(19)
第七单元 排列与组合、二项式定理训练题	(22)
第八单元 三角函数图像与性质训练题	(25)
第九单元 两角和差的三角函数训练题	(28)
第十单元 反三角函数、三角方程和解三角形训练题	(31)
第十一单元 直线和平面训练题	(35)
第十二单元 多面体和旋转题训练题	(39)
第十三单元 曲线和方程、直线和圆训练题	(43)
第十四单元 椭圆、双曲线和抛物线训练题	(47)
第十五单元 圆锥曲线训练题	(51)
第十六单元 参数方程和极坐标训练题	(55)
第二部分 高考模拟试题	(59)
模拟试题(一)	(59)
模拟试题(二)	(63)
模拟试题(三)	(67)
模拟试题(四)	(70)
模拟试题(五)	(74)
第三部分 单元训练题与高考模拟试题解答	(78)
第一单元 集合与函数训练题解答	(78)
第二单元 幂函数、指数函数与对数函数训练题解答	(80)
第三单元 不等式训练题解答	(83)
第四单元 数列训练题解答	(85)
第五单元 数列的极限与数学归纳法训练题解答	(88)
第六单元 复数训练题解答	(91)
第七单元 排列与组合、二项式定理训练题解答	(94)
第八单元 三角函数图像与性质训练题解答	(95)

第九单元 两角和差的三角函数训练题解答	(98)
第十单元 反三角函数、三角方程和解三角形训练题解答	(102)
第十一单元 直线和平面训练题解答	(105)
第十二单元 多面体和旋转体训练题解答	(108)
第十三单元 曲线和方程、直线和圆训练题解答	(111)
第十四单元 椭圆、双曲线和抛物线训练题解答	(114)
第十五单元 圆锥曲线训练题解答	(117)
第十六单元 参数方程和极坐标训练题解答	(121)
模拟试题(一)解答	(124)
模拟试题(二)解答	(127)
模拟试题(三)解答	(130)
模拟试题(四)解答	(134)
模拟试题(五)解答	(138)
第四部分 小巧题、易错题评析与易错知识点提示	(142)
一、小巧题、易错题评析	(142)
二、易错知识点提示	(157)
第五部分 2001 年高考十份数学试题汇编及详解(含选择、填空题详解)	(161)
2001 年普通高等学校招生全国统一考试数学(文史财经类)	
试题、参考解答及评分标准	(164)
2001 年普通高等学校招生全国统一考试数学(理工农医类)	
试题、参考解答及评分标准	(171)
2001 年普通高等学校招生全国统一考试(广东、河南卷)数学	
试题、参考解答及评分标准	(178)
2001 年普通高等学校招生全国统一考试(天津、江西、山西卷)数学	
(文史财经类)试题、参考解答及评分标准	(186)
2001 年普通高等学校招生全国统一考试(天津、江西、山西卷)数学	
(理工农医类)试题、参考解答及评分标准	(194)
2001 年普通高校招生全国统一考试上海文科数学	
(文史类)试题、答案要点及评分标准	(197)
2001 年普通高校招生全国统一考试上海理科数学	
(理工农医类)试题、答案要点及评分标准	(206)
2001 年普通高等学校春季招生考试(北京、内蒙古、安徽卷)数学	
(文史类)试题、参考解答及评分标准	(211)
2001 年普通高等学校春季招生考试(北京、内蒙古、安徽卷)数学	
(理工农医类)试题、参考解答及评分标准	(219)
2001 年全国普通高等学校春季招生统一考试上海数学试卷、答案及评分标准	(224)
附录 相约在 2008	(231)

第一部分 单元训练题

第一单元 集合与函数训练题

一、选择题

- 若 $M=\{1,x\}$, $N=\{2,\log_x 16\}$, 且 $M \cap N = \{2\}$, 则 $M \cup N$ 为 ()
 (A) $\{1,2\}$ (B) $\{1,2,4x,\log_x 16\}$ (C) $\{1,2,-4\}$ (D) $\{1,2,4\}$
- 若全集 $I=\{(x,y)|x,y \in \mathbf{R}\}$, $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1, x,y \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)|y=x+1, x,y \in \mathbf{R}\}$, 则 $\overline{A} \cap B$ 是 ()
 (A) $\overline{A}$ (B) B (C) $\emptyset$ (D) $\{(2,3)\}$
- 同时满足下列条件的非空集合 S , (1) $S \subseteq \{1,2,3,4,5\}$; (2) 若 $a \in S$, 则 $6-a \in S$, 那么 S 的个数是 ()
 (A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 31
- 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-6x^2+x+2)$ 的定义域分别为 M, N , $I=\mathbf{R}$, 则 $M \cap \overline{N}$ 等于 ()
 (A) $\{x|\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\}$ (B) $\{x|-1 < x < 1\}$
 (C) $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\}$ (D) $\{x|-1 < x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{x|\frac{2}{3} \leq x < 1\}$
- 与函数 $y=2x^2+1$ 不相同的函数是 ()
 (A) $y=|x^2|+|x^2+1|$ (B) $y=\sqrt{(2x^2+1)^2}$
 (C) $y=|2x^2+1|$ (D) $y=\frac{(2x^2+1)(x+1)}{x+1}$
- 与函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 相同的函数是 ()
 (A) $y=\log_2 x$ (B) $y=\log_2 4x$ (C) $y=\log_2 \frac{1}{x}$ (D) $y=\log_2 (x+1)$
- 在区间 $(0,1)$ 上是增函数的只有 ()
 (A) $y=-x^2+2x-1$ (B) $y=-\sqrt{x}$ (C) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (D) $y=\frac{1}{x}$
- 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$, 那么当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 函数表达式为 ()
 (A) $f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$ (B) $f(x)=-x(1+\sqrt[3]{x})$
 (C) $f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$ (D) $f(x)=-x(1-\sqrt[3]{x})$
- 函数 $y=\frac{x-2}{x+a}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 则 a 的值为 ()
 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2
- 若 $f(x+1)=x^2-5x+4$, 则 $f(x)$ 等于 ()
 (A) $x^2-7x-10$ (B) $x^2+7x-10$ (C) x^2-4x+6 (D) $x^2-7x+10$

11. 若 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = f^{-1}(x)$, 则 $g(-x)$ ()
 (A) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数 (B) 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是增函数
 (C) 在区间 $(1, +\infty)$ 上是减函数 (D) 在区间 $(-\infty, -1)$ 上是减函数
12. 若把函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴向左平移 3 个单位再沿 y 轴向下平移 2 个单位, 得到 $y=2^x$ 的图像, 则 ()
 (A) $f(x) = 2^{x-2} - 2$ (B) $f(x) = 2^{x-2} + 2$ (C) $f(x) = 2^{x-3} + 2$ (D) $f(x) = 2^{x-2} - 3$
13. 命题甲: $a > b > 0$, 命题乙: $\lg a^2 - \lg b^2 > 0$, 那么甲是乙的 ()
 (A) 充分且不必要条件 (B) 必要且不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
14. 函数 $f(x) = 2^{\sqrt{1-3x}} - x$ 的值域为 ()
 (A) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (B) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ (D) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$
15. 设 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 关于 x 的方程 $f(x) = f^{-1}(-x)$ 成立时, 以下结论正确的是 ()
 (A) 仅当 $a > 0$ 时, 方程有惟一解 (B) 方程必有惟一解
 (C) 仅当 $0 < a < 1$ 时, 方程有惟一解 (D) 方程无解

二、填空题

16. 集合 $\{a, b, c\}$ 的全体子集有 _____ 个, 其中真子集有 _____ 个.
17. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{9-x^2}\}$, $B = \{(x, y) | y = x+m\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是 _____.
18. 若函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与函数 $y = 3x^2 + 2x - 1$ 的图像关于原点对称, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
19. 函数 $y = \sqrt{kx^2 - 8x + (k-6)}$ 的定义域为全体实数, 那么 k 的取值范围为 _____.
20. 函数 $y = 4 - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ 的最大值是 _____, 最小值是 _____.
21. 设有三个函数, 第一个函数是 $y = f(x)$, 它的反函数是第二个函数, 而第三个函数与第二个函数的图像关于原点对称, 那么第三个函数是 _____.

三、解答题

22. 若 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 又 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 求 p 的取值范围.

23. 已知集合 A, B 各含有 12 个元素、它们的交集含有 4 个元素, 求同时满足下面条件的集合 C 的个数. (1) $C \subset A \cup B$; (2) $C \cap A \neq \emptyset$; (3) C 中恰有三个元素.

24. 设 $P(1, 0)$ 关于直线 $y=kx$ 的对称点为 Q , 直线 OQ 的斜率记为 $f(k)$

(1) 写出关于 k 的自变量的函数 $f(k)$ 的表达式并写出其定义域;

(2) 判定 $f(k)$ 的奇偶性; (3) 当 $k \in (1, +\infty)$ 时, 判定 $f(k)$ 的增减性.

25. 已知 $y=f(x)$ 是函数 $y=(0.5)^x-1$ 的反函数, 求证: $3f(x) \leq f(3x)$ 并指出 x 为何值时, 等号成立.

26. 若 $y=\log_3(x^2-ax-a)$ 在 $(-\infty, 1-\sqrt{3})$ 上是减函数, 求实数 a 的取值范围.

27. 某工厂生产的商品 A, 若每件定价为 80 元, 则每年可销售 80 万件, 政府税务部门在市场销售的商品 A 要征收附加税, 为了增加国家收入又要利于生产发展和市场活跃, 必须合理的确定征税的税率. 根据调查分析, 若政府对商品 A 征收附加税率为 $p\%$ (即每 100 元征收 p 元), 每年销售量将减少 $10p$ 万件. 据此问:
- (1) 若税务部门对商品 A, 每年所收的税金不少于 96 万元, 求 p 的范围.
- (2) 若税务部门仅仅考虑每年所获的税金最高, 求此时 p 的值.

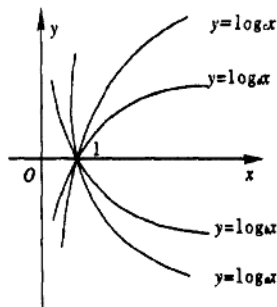
28. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意 x_1, x_2 都满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 且 $f(2) = 3$
- (1) 试判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性;
- (2) 当 $Q \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(\cos 2\theta - 3) + f(4m - 2m \cos \theta) > 0$ 对所有 θ 均成立, 求实数 m 的取值范围.

第二单元 幂函数、指数函数与对数函数训练题

一、选择题

1. 右图是 $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x, y=\log_d x$ 的图像, 则 a, b, c, d 的大小关系是 ()

(A) $a < b < 1 < c < d$ (B) $b < a < 1 < d < c$
(C) $b < a < 1 < c < d$ (D) $a < b < 1 < d < c$



2. 函数 $f(x)=2^{-|x|}$ 单调增区间是 ()

(A) $(-\infty, +\infty)$ (B) $(0, +\infty)$
(C) $(-\infty, 0)$ (D) 不存在

3. $x > y > 1, 0 < a < 1$, 下列不等式正确的是 ()

(A) $\log_a x > \log_a y$ (B) $x^{-a} > a^{-y}$
(C) $a^x > a^y$ (D) $x^a > a^y$

4. 若函数 $f(x)=ax^3+b\log_2(x+\sqrt{x^2+1})+2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有最小值 -5 , 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 ()

(A) 有最大值 5 (B) 有最小值 5 (C) 有最大值 3 (D) 有最大值 9

5. 若函数 $y=3+2^{x-1}$ 的反函数的图像过 P 点, 则 P 的坐标为 ()

(A) $(2, 5)$ (B) $(1, 3)$ (C) $(5, 2)$ (D) $(3, 1)$

6. 已知集合 $M=\{(x, y) | x+y=1\}$, 映射 $f: M \rightarrow N$, 在 f 的作用下, 点 (x, y) 的像是 $(3^x, 3^y)$, 则 N 集是 ()

(A) $\{(x, y) | x=3^x, y=3^y\}$ (B) $\{(x, y) | xy=3\}$
(C) $\{3^x, 3^y, x+y=1\}$ (D) 都不是

7. 方程 $\log_a x = x-1 (0 < a < 1)$ 的实数解的个数是 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

8. 设 $f(x)=2^x, g(x)=4^x$ 且 $g[g(x)] > g[f(x)] > f[g(x)]$, 则 x 的取值范围是 ()

(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(0, 1)$

9. $y=\log_a x$ 在 $x \in (2, +\infty)$ 上恒有 $|y| > 1$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $a > 2$ 或 $0 < a < \frac{1}{2}$ (B) $a \geq 2$ 或 $0 < a \leq \frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{2} < a < 2$ 且 $a \neq 1$ (D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ 且 $a \neq 1$

10. 若 $a > 1, -1 < b < 0$, 则 $y=a^x+b$ 的图像经过的象限为 ()

(A) 一, 三, 四 (B) 一, 二 (C) 一, 二, 三 (D) 不确定

11. $f(x)=x^2-bx+c$ 且 $f(0)=3, f(1+x)=f(1-x)$, 则有 ()

(A) $f(b^2) \geq f(c^2)$ (B) $f(b^2) < f(c^2)$ (C) $f(b^2) \leq f(c^2)$ (D) 不确定

12. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的奇函数且 $f(-1)=1$, 则 $f(5)+f(4)$ 的值是 ()

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 不确定

13. 下列四个命题:

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a)=f(a-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

(2)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a)=f(a-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称

(3)函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(a-x)$ 的图像关于 y 轴对称

(4)函数 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称

其中正确的命题是()

(A)(1),(2) (B)(3),(4) (C)(2),(3) (D)(1),(3)

14. $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x+2)=-f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)=x$, 则 $f(7.5)$ 等于()

(A)0.5 (B)-0.5 (C)1.5 (D)-1.5

15. 已知奇函数 $y=f(x)$ 满足条件 $f(x+1)=f(x-1)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)=2^x-1$, 那么 $f(-\log_2 6)$ 的值等于()

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{5}{2}$ (C) $-\frac{5}{6}$ (D) $-\frac{23}{24}$

二、填空题

16. 不等式 $(1+x^2)^x < \log_2 \sqrt{4x-x^2}$ 的解集是_____.

17. 当 $x \geq 0$ 时, 若 $f(x)=4^x-2^{x+1}$, 则 $f^{-1}(0)=$ _____.

18. $f(e^x)=x^2-2x$, 则 $f(x)$ 取最小值的 $x=$ _____.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}+a$ ($x \neq 0$) 是奇函数, 则 a 的值等于_____.

20. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(x^2-3)}$ 的定义域是_____.

21. 已知函数 $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x+a)$ 的图像经过原点, 且 $f(x-3)$, $f(\sqrt{2}-1)$, $f(x-4)$ 成等差数列, 则 x 的值为_____.

三、解答题

22. 讨论函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ ($a>0, b>0$) 的增减性, 并证明你的结论.

23. 定义在开区间 $(-1, 1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 是单调递减的, 如果 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$, 求 a 的取值范围.

24. 某商品每件降价 x 成(即 1 成为 10%), 则售出数量就增加 mx 成($m \in \mathbb{R}^+$, m 为常数)

(1) 如果规定价每件 a 元, 售出 b 件, 试写出降价后的营业额 y 与每件降价 x 成之间的函数

式, 并求当 $m = \frac{5}{4}$ 时, 要使营业额最大, 每件应降价多少?

(2) 为使营业额增加, 求 m 的范围.

25. 已知 $y = f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x > 1)$

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(2) 根据函数单调性的定义证明: $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数;

(3) 如果 $(1 - \sqrt{x}) \cdot f^{-1}(x) > m(m - \sqrt{x})$ 对 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 上的每一个 x 的值恒成立, 求实数 m 的取值范围.

26. 设二次函数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像以 y 轴为对称轴, 已知 $a + b = 1$, 而且若 $P(x, y)$ 在 $y = f(x)$ 的图像上, 则点 $O(x, y^2 + 1)$ 在函数 $g(x) = f[f(x)]$ 的图像上.

(1) 求 $g(x)$ 的解析式.

(2) 设 $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$, 问是否存在这样的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使 $F(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上是减函数, 而在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 上是增函数, 并说明理由.

27. 已知函数 $y = f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($a > 1, x \geq 1$)

(1) 求它的反函数 $f^{-1}(x)$, 并指出它的定义域;

(2) 若 $f^{-1}(n) < \frac{2^n + 2^{-n}}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), 求 a 的取值范围;

(3) 设 $b_n = f^{-1}(n)$, $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 求证:

当 a 在 (2) 取值范围时对任意自然数 n 都有 $S_n < 2^n - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

第三单元 不等式训练题

一、选择题

- 不等式 $1 \leq |2x-1| < 2$ 的解集是 ()
 (A) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ 或 } 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$ (B) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ 且 } 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$
 (C) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 0 \text{ 或 } 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$ (D) $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 0 \text{ 且 } 1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$
- 若 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 有负值, 则 a 的值是 ()
 (A) $a > 2$ 或 $a < -2$ (B) $-2 < a < 2$ (C) $a \neq 2$ 且 $a \neq -2$ (D) $a \geq 2$ 或 $a \leq -2$
- 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0 (k \in \mathbb{R})$ 的两个实数根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的最大值是 ()
 (A) 19 (B) 18 (C) $5\frac{5}{9}$ (D) 不存在
- 若使不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ 和 $x^2 - 6x + 8 < 0$ 同时成立的 x 值使关于 x 的不等式 $2x^2 - 9x + a < 0$ 也成立, 则 ()
 (A) $a > 9$ (B) $a = 9$ (C) $a \leq 9$ (D) $0 < a \leq 9$
- 如果 $\log_x 3 > \log_y 3 > 0$, 那么 ()
 (A) $1 < x < y$ (B) $1 < y < x$ (C) $0 < x < y < 1$ (D) $0 < y < x < 1$
- $x > 1$ 是 $\frac{1}{x} < 1$ 的 ()
 (A) 充要条件 (B) 必要非充分条件 (C) 充分非必要条件 (D) 不充分也不必要条件
- 已知 $A = x \cos^2 \theta + y \sin^2 \theta, B = x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta$, 那么 AB 与 xy 的大小关系是 ()
 (A) $xy \leq AB$ (B) $xy \geq AB$ (C) $xy > AB$ (D) 不能确定
- 若 $a < b < 0$, 则下列不等式关系中不能成立的是 ()
 (A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ (C) $|a| > |b|$ (D) $a^2 > b^2$
- 下列函数中最小值为 2 的函数是 ()
 (A) $y = x + \frac{1}{x}$ (B) $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ (C) $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$ (D) $y = \tan \theta + \cot \theta (\theta \in \mathbb{R})$
- 当点 (x, y) 在直线 $x + 2y + 1 = 0$ 上移动时, 函数 $z = 2^x + 4^y$ 的最小值为 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 不存在
- 已知 $a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 < (|a| + |b|)^2$ 成立的一个必要但非充分条件是 ()
 (A) $ab < 0$ (B) $a + b < 0$ (C) $ab \neq 0$ (D) $a < 0 < b$
- 与集合 $\{x \mid \sqrt{2x-1} > x-2\}$ 相等的集合是 ()
 (A) $\{x \mid 2x-1 \geq 0\} \cup \{x \mid 2x-1 > (x-2)^2\}$
 (B) $\{x \mid 2x-1 > (x-2)^2 \text{ 且 } x-2 \geq 0\} \cup \{x \mid 2x-1 \geq 0 \text{ 且 } x-2 < 0\}$
 (C) $\{x \mid 2x-1 > (x-2)^2 \text{ 且 } 2x-1 \geq 0\} \cup \{x \mid x-2 < 0\}$
 (D) $\{x \mid 2x-1 > (x-2)^2 \text{ 且 } x-2 \geq 0\} \cap \{x \mid 2x-1 \geq 0 \text{ 且 } x-2 < 0\}$
- 已知 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $3x + 4y$ 的最大值是 ()

(A)3 (B)6 (C)5 (D)4

14. 若不等式 $x^2 - \log_a x < 0$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $\left[\frac{1}{16}, 1\right)$ (B) $\left[\frac{1}{16}, 1\right)$ (C) $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ (D) $\left(0, \frac{1}{16}\right]$

15. a 为常数, θ 为任意角, $A = \{(x, y) | x = a + \cos \theta \text{ 且 } y = \frac{a}{2} + \sin \theta\}$. 若 $A \subset \{(x, y) | x^2 + y^2 < 4\}$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $0 < a < 3$ (B) $-\frac{2\sqrt{15}}{5} < a < \frac{2\sqrt{15}}{5}$ (C) $|a| \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5} < a < \frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、填空题

16. 已知 $f(x^2 - 4) = \lg \frac{x^2}{x^2 - 8}$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是 _____.

17. 若直线 $ax + y - 2a + 1 = 0$ 不经过第一象限, 则 a 的取值范围是 _____.

18. 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则不等式 $a^{\log_b(x-3)} < 1$ 的解集为 _____.

19. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 则 $|x-1| |\lg \sin \alpha| > |\lg \sin^2 \alpha|$, 则 x 的取值范围是 _____.

20. 函数 $y = x + \frac{1}{x-1} (x > 1)$ 的值域是 _____.

21. 若 m, n 是大于 1 的正整数, 且 $\log_3 m \log_3 n \geq 4$, 那么 $m+n$ 的最小值为 _____.

三、解答题

22. 已知方程 $\sin^2 x + \cos x + t = 0$ 有解, 求实数 t 的取值范围.

23. 已知 $A = \left\{x \mid 1 + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{2}{\log_5 x} < 0\right\}, B = \left\{x \mid \left(\frac{1}{3}\right)^{a \log_3 2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)}, a \in \mathbf{R}\right\}$, 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.