水文地质工程地质

SHUIWENDIZHI GONGCHENGDIZHI

中国地质科学院水文地质工程地质研究所

限国内发行

5

地质出版社

出 版 说 明

大面积地区地下水资源评价问题，是当前国内外水文地质工作者正在探索解决的重要课题。

近年来，在教学、科研、生产部门的共同努力下，初步尝试应用有限单元法评价大面积地区地下水资源，取得了一定的效果。

本文是新疆大学吴嘉瑞同志在水文地质工程地质研究所举办的水文地质计算学习班上的讲稿，为了满足广大水文地质工作同志的需要，经由我组编辑出版。

水文地质工程地质研究所科情组
1977年4月

水文地质工程地质
第 五 辑
有限单元法在水文地质中的应用
（专 题 讲 座）
中国地质科学院水文地质工程地质研究所编
（限国内发行）
国家地质总局书刊编辑室编辑
地 质 出 版 社 出 版
地 质 印 刷 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
1978年3月北京第一版·1978年3月北京第一次印刷
统一书号：15038·新244·定价0.80元

前　　言

随着我们伟大祖国社会主义建设突飞猛进的发展和人民生活的不断提高，对供水量的要求也在迅速增长。由于地下水有一系列的优点，它始终在供水工作中占有十分重要的地位。特别是在我国华北、东北广大地区，海防前线无数海岛和辽阔的西北内蒙等边界地区，地下水更是一个极其重要的水源，不少地方几乎是唯一的水源。因此，查清地下水的分布，阐明其资源，便是党和人民赋予我们水文地质工作者的一个极为光荣而重要的任务。

建国以来，在水文地质调查研究工作方面，取得了许多成绩，累积了宝贵的经验。但是，与此同时，我们面前的任务还很大，有待我们努力去解决的课题还很多，大面积地区地下水资源评价问题便是这些课题之一。

大面积地区地下水资源评价不仅是我们所面临的重要课题，而且在国际上也是水文地质工作中尚未解决的一个课题。

所谓地下水资源，曾经有过多种定义，例如大家熟悉的四大储量，就是其中之一。实践已经证明，这个四大储量分类方法并不恰当，其中有些概念不符合唯物辩证法的观点。我们这里所讲的“资源评价”的含义是：指在某一开采区当要求开采一定数量地下水时，该区地下水浸润面（或压力面）的变化不致影响正常开采，并且不造成其他有害后果时，这个预定的开采量就是可以容许的，否则就应采取其他补救措施，或者压缩开采量。因此，我们认为资源评价的计算过程实际上可归结为：给定开采量，要求预测地下水浸润面（或压力面）的变化情况；或者反过来，限定地下水浸润面（或压力面）的变化下限，计算地下水可开采量。

大面积地区地下水资源评价工作的困难有两个方面：一是评价方法问题；另一个问题是资料问题。不论用什么方法，都要有一定精确程度和一定数量的原始资料，经常遇到的矛盾是资源评价要求很急迫，而原始资料却很贫乏，在这种情况下，往往迫使我们只能作出比较粗略的估计。因此，要想比较精确地解决大面积地区地下水资源评价问题，就必须努力提高水文地质研究程度。

就评价方法而言，过去相当长一个时期内，水文地质工作者采用稳定流理论和按四大储量分类法对城市工矿供水作过许多资源评价，并且也据此对大面积地区地下水资源作过一些试算。实践使我们认识到稳定流的情况在自然界只是特殊情况，多数情况下地下水的运动是非稳定流运动，因而稳定流理论只能在有限的情况下适用。无产阶级文化大革命以来，大面积地区地下水资源评价曾经试用过的方法主要有：用非稳定流理论的泰斯公式作单井迭加计算、差分法、数理统计方法等等。单井迭加计算法因为计算区域往往不能满足“初始水位（或压力水头）为水平”及“含水层为均质”这二个条件而受到限制，而且当边界过于复杂时也难以计算，差分法又不能很好地适应不规则的边界和井群，数理统计方法则因要求有较长的动态观测历史和方法本身带来的不能外推过长等问题而受到局限。

近年来，数学工作人员和水文地质工作人员相结合，数学、科研、生产相结合，在实践中试用并逐步推广用有限单元法解二维承压水（或潜水）非稳定流问题，预测大面积地

区水位变化，同时，又针对水文地质参数资料不足等困难，利用有限的长期观测资料反算、校核大面积地区水文地质参数，推断水文地质条件，取得了一定效果。

所谓有限单元法，是解二维非稳定流偏微分方程初、边值混合问题的一种近似解法。这种方法可应用到水文地质学中去解决大面积地区地下水浸润面（压力面）预报问题，其优点是能适用于不规则的边界及分布不规则的井群，且不受含水层必须均质、初始水位（水头）必须水平等条件的限制。因此有限单元法比起上述其他方法就有着更大的优越性。使用有限单元法需要一定的原始资料，要求已知计算区内含水层的分布、埋深、厚度；掌握一定数量的水文地质参数资料（如km值、a值，s值或μ值）；掌握计算时期的初始水位（水头）资料和计算区内各井的开采水量、水位动态等资料。它的缺点是：为了求出计算区内将来某一时间的水位（水头）分布情况，需要预先给定在这个预报时间同时的边界上的水位（水头）情况，而这个条件因为同属某一个将来时刻的未知情况而常常难以做到。此外，方法本身的误差理论现在没有来得及仔细推敲。因此，还有待我们在今后的实践中不断发展、丰富和完善这一方法。

利用有限单元法预测地下水浸润面（或压力面）的计算公式很长，是整整一批公式，称为“水位预报方程组”，而这个方程组中每一部分的推导过程则更长。为避免这复杂冗长的过程，我们先用比较简单通俗的方法给出这个水位预报方程组，说明这些公式中每一部分的含义，所需的原始数据以及计算方法等等，第二部分再介绍这个方程组的推导过程。介绍推导过程时，我们也避免了较难的数学概念，而尽量从大家所熟悉的水文地质知识出发，利用一些比较一般的、大家曾学习过的高等数学知识导出结果，并把必须补充的数学知识附录于最后，自学时不妨提前先学附录。对于没有学过微积分的读者来说，阅读第一篇不会有什么困难，但是要确切了解有限单元法，还应再参考有关高等数学书籍，阅读第二篇，第一、第二篇难免有些重复之处，这是为了扩大读者面的需要，有基础的同志，不妨直接从第二篇开始阅读。第三部分是介绍利用DJS-6型电子计算机进行承压水水头预报和潜水水位预报问题的计算程序及其实例。有关电子计算机、算法语言等知识就不作介绍了。对于没有接触过这些方面的同志们，直接看这一部分就会比较困难，而收入这些材料又会使篇幅过多，因此建议在学这一部分之前，可先学习北京工业大学1974年12月编印的DJS-6机算法语言讲义。

符 号 和 说 明

为了阅读本文的方便，这里把后面常用的部分符号作些规定和说明，另外的一些符号则在有关部分说明。

G——xy 平面上渗透性具有各向异性的有界含水层区域。

Γ——区域 G 的整个边界。

Γ_1——边界 Γ 上已知水头（水位）变化规律的地段，称为第一类边界。

Γ_2——边界 Γ 上已知侧向补给量的地段，称为第二类边界。Γ_1 和 Γ_2 在 Γ 上是可以穿插分布的。

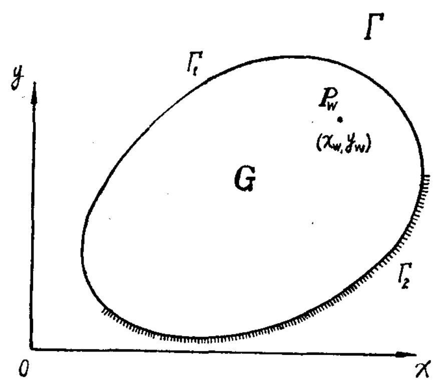


图 0-1

T_1、T_2——分别为 x 方向和 y 方向的导水系数。如含水层厚度是 M，x 方向和 y 方向的渗透系数分别是 K_1、K_2，那么 $T_1=K_1M$，$T_2=K_2M$。导水系数的量纲是 $[L]^2[T]^{-1}$，这里 $[L]$ 是长度量纲，$[T]$ 是时间量纲。水文地质上通常认为 T_1、T_2 是常数，但这里可把它们看作点 (x,y) 的函数。

S——承压含水层弹性释水系数或称储水系数，无量纲。水文地质通常认为它是常数，这里把它看作点 (x, y) 的函数。

μ——潜水的给水度，无量纲。可看作点的函数。

h——即水头（水位）函数 $h(x, y, t)$，用来表示 G 上每点每一时刻的水头（水位）标高，它可采用相对标高。量纲是 (L)。

ε——G 内每点每一时刻的垂向越流补给强度，表示单位时间单位面积上补给的水量。量纲是 $[L]^3/[T]/[L]^2=[L][T]^{-1}$。它是点和时间的函数。

Q_w——G 内第 w 口井单位时间内的抽水量（开采量）。量纲是 $[L]^3/[T]^{-1}$。用 (x_w, y_w) 或 P_w 记井的位置。

$\delta(x-x_w, y-y_w)$——二维 δ-函数，简记为 $\delta(P-P_w)$，其中 (x_w, y_w) 是 P_w 的坐标，(x, y) 是任意点 P 的坐标。δ-函数不是通常意义下的函数，是一种广义函数，它的定义如下：

$$\delta(x-x_w, y-y_w)=\begin{cases}\infty(\text{无穷大}) & P=P_w,\\ 0 & P\neq P_w,\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_w, y-y_w)dxdy=1.$$

δ-函数的重要性质是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\delta(x-x_w,\ y-y_w)dxdy=f(x_w,\ y_w).$$

δ-函数通常用来描述平面上质量、冲量等物理量的集中分布。这里我们把井的抽水量看做是集中在井点的，用δ-函数来刻划每口井在平面上单位面积抽水量的分布。

如果在 $P_w(x_w,\ y_w)$ 点的井，半径是 r，抽水量是 Q_w，那么在井径范围内每点的平均单位面积抽水量为$Q_w/\pi r^2$，由于这口井在井口外任一点处并不抽水，所以这量是零。如果我们引入辅助函数

$$\delta_r(x-x_w,\ y-y_w)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & P\text{点在}P_w\text{为中心、}r\text{为半径的圆内,}\\ 0 & \text{圆外各点}\end{cases}$$

那么单位时间里平均单位面积抽水量是 $Q_w\delta_r(x-x_w,\ y-y_w)$。因为在大面积上井只能看做一个点，所以应该令半径 r 趋于零，这样单位面积抽水量为

$$\lim_{r\to 0} Q_w\delta_r(x-x_w,\ y-y_w)=Q_w\delta(x-x_w,\ y-y_w)=\begin{cases}\infty & P=P_w\\ 0 & P\neq P_w\end{cases}$$

但是在任何一个包含着P_w作为内部一点的区域Ω（它可以是全平面）上来说，这井的总抽水量仍应是Q_w，即有

$$\iint_\Omega Q_w\delta(x-x_w,\ y-y_w)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_w\delta(x-x_w,\ y-y_w)dxdy=$$

$$=Q_w\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_w,\ y-y_w)dxdy=Q_w\cdot 1=Q_w.$$

于是我们就可用 $Q_w\delta(x-x_w,\ y-y_w)$ 来表示井P_w在平面上单位时间内单位面积上抽水量的分布。

由上可见，δ-函数可看做辅助函数 δ_r当$r\to 0$时的“极限”，而且它的量纲是$[L]^{-2}$。

Q——有时记作$Q(x,\ y,\ t)$，表示 Γ_2 上的点(x,y)处在时刻 t 的侧向补给强度，即单位时间内通过单位长度的边界进入区域G 的水量，量纲为$[L]^2[T]^{-1}$。

目　录

第 一 篇

地下水水头和水位预报方程组

地下水压力面或浸润面是一个光滑的复杂曲面，精确预报这个曲面随时间的变化往往很困难，有限单元法是一个近似预报方法，它的实质是把计算区分成许多小块，例如分成许多小三角形，把每个三角形顶部的压力面或浸润面近似地看成是一个平面——即一块倾斜的三角板（见图1-1），整个计算区内的地下水压力面或浸润面也就近似地用许多这种倾斜方向、倾斜角度和形状大小不同的三角板拼凑起来的一个带棱带角的板面所代替（见图1-2）。

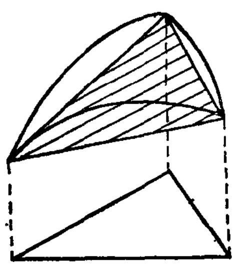
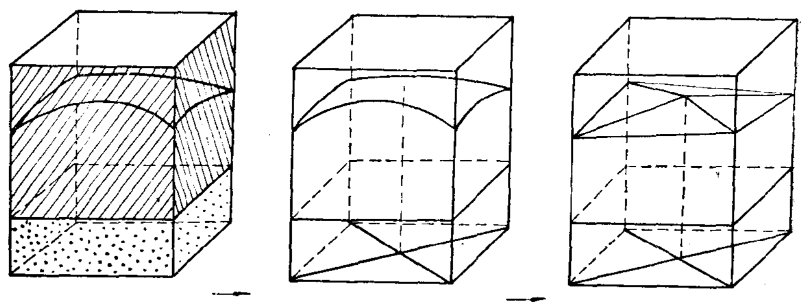


图 1-1



计算区划分成若干三角形　　用板面近似代替压力曲面

图 1-2

显然，计算区三角形分得越多，这个带棱带角的板面就越近似真正的压力曲面或浸润曲面。由于每个三角形顶部的三角板是空间一平面，可以由三点完全确定，因此我们只需知道这三角形三个顶点上水头或水位的变化情况，就可以确定三角板的变化情况，也就是确定了这个三角形范围内的近似压力面（浸润面）的变化情况，由此，预报整个计算区的水头或水位问题就变成了预报这个区内的一批点上的水头或水位变化问题。每个点上初始水头（水位）已知，未知的只是它的末水头（水位），M个这样的点就有M个未知数，因此要建立M个方程式用以确定这M个未知数，所以预报水头或水位的是一组方程式，称之为水头（水位）预报方程组。又因我们面临的地下水运动是非稳定流，即水头（水位）随时间不断变化，而且假设在垂直方向上各种水量及参数不变，所以全称是平面（二维）非稳定流水头（水位）预报方程组。

导出方程组过程中用到了有限单元法，实际上该方法是平面非稳定渗流偏微分方程定解问题的一种近似解法，这些都将在下一篇中介绍，本篇将直接给出方程组的最终结果。

我们先介绍平面非稳定的承压水水头预报方程组。这里要限定计算区域是有限的，并且含水层顶底板呈水平或近似水平。区域的边界不一定要求是水文地质上的自然边界，只要求它有过去及将来时刻水头变化或侧向补给量变化的资料。已知水头变化规律的边界称

为第一类边界，常水头边界是这类边界的一个特例；已知侧向补给量变化规律的边界称为第二类边界，隔水边界是这类边界的一个特例。最后，水文地质参数 T、S 及含水层厚度要求是已知的。

为了建立水头预报方程组，第一个步骤是作出计算区域的“剖分图”（图1-3）。剖分图的作法是：先在计算区的边界上选一批包括第一类和第二类边界交界点在内的井点（即抽水井或观测井，下同）及虚井点（即事实上不存在的，虚设的井点，下同），用它们顺次联接成的折线代表这区域的边界，整个边界记作 $\widetilde{\Gamma}$，这时第一类和第二类边界被分别用折线段 $\widetilde{\Gamma}_1$ 和 $\widetilde{\Gamma}_2$ 表示。然后在 $\widetilde{\Gamma}$ 所圈的范围 $\widetilde{G}$ 内再选一批井点和虚井点作为需要计算预报水头变化的计算点。这些选好的点都称为“节点”。在 $\widetilde{G}$ 内的叫“内节点”，在 $\widetilde{\Gamma}$ 上的叫“边界节点”，简称“外节点”。外节点中知道水头变化规律的叫做“第一类外节点”，它们都在 $\widetilde{\Gamma}_1$ 上。$\widetilde{\Gamma}_1$ 与 $\widetilde{\Gamma}_2$ 的交界点必须是第一类外节点。外节点中的另一类叫“第二类外节点”，它们的两侧边上给出了某时段的平均补给量。其中第二类外节点因其将来的水头变化情况仍属未知，所以它们是计算点。节点选好之后，要把区域 $\widetilde{G}$ 划分成以节点为顶点的许多小三角形单元，它们的大小、形状可各不相同，只是角不要太尖，而且每个三角形单元的三边上只能有三个节点，也就是说，不允许某个三角形单元的顶点落在另一三角形单元某一边的中间（见图 1-4）。单元的大小和节点的疏密有关，节点密，单元划分得小，反之则大，水头变化剧烈处节点可适当多选些。节点和三角形都需要编号。节点编号的一般方法是先从内节点编号，内节点编完号后接着就顺序为第二类外节点编号（必要时，这二类节点也可混合编号），如果这两种节点一共是 M 个，那应剩下的第一类外节点就从 $M+1$ 编到 N 为止（图1-5）。小三角形在编号后我们将用 Δ_β 表示第 β 个三角形和它的面积。剖分图

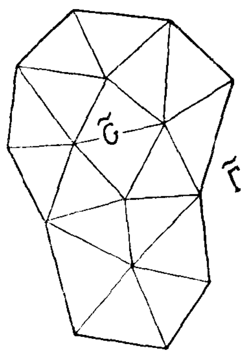
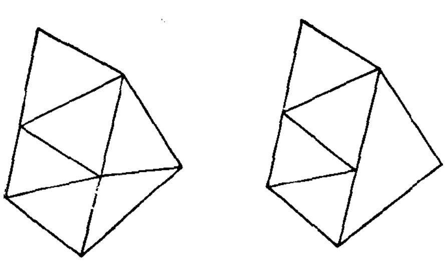


图 1-3
计算区的剖分



正确的剖分　　不正确的剖分

图 1-4

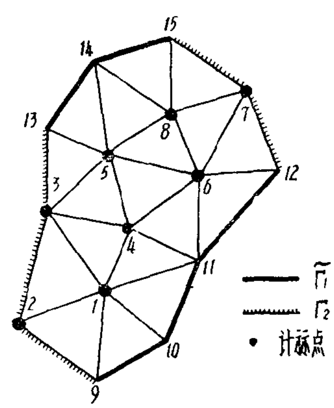


图 1-5　节点编号

1、4、5、6、8—内节点；2、3、7—第二类外节点；9至15—第一类外节点

做完后就知道一共有多少个三角形单元、节点和计算节点。最后，不在节点上的生产井也要编号。例如按三角形的编号顺次编或单独编号。

现在，我们假设一个时间段$\Delta t=t_1-t_0$，其中：

t_0——这个时间段的初始时刻；

t_1——这个时间段的末时刻；

Δt，t_0，t_1都以日（昼夜）为单位。

如果已知计算区域$\widetilde{G}$内以及边界$\widetilde{\Gamma}_1$、$\widetilde{\Gamma}_2$上的下列资料：

1．各三角形单元里的T、S值。这些参数在不同三角形里可以不一样，但是假定含水层的渗透性到处都是各向同性的。由此，在第β个三角形Δ_β里，其参数为T_β和S_β。

2．t_0时刻N个节点上的初始水头值$h_{i,0}$（$i=1, 2, \cdots\cdots, N$）。如有一张t_0时刻的等水头线图，从图可获知各节点的$h_{i,0}$。

3．第一类外节点上t_1时刻的水头值(即末水头)h_i（$i=M+1, \cdots\cdots, N$），有时用$h_{i,1}$来表示这批已知量，以区别于未知的$h_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,M)$。

4．第二类边界$\widetilde{\Gamma}_2$的每一段$\overline{i,j}$上在Δt时间内的平均日侧向补给强度Q_{ij}。

5．每个三角形单元里，Δt时间内的平均日垂向越流补给强度ϵ_β。

6．区域$\widetilde{G}$内每口井在Δt时间内的平均日抽水量Q_w，w为井的编号。

7．节点和井的相对座标。

上述要求已知资料中的水头值，可以是相对标高，这时求出的水头值也为相对标高。为使原始水头数据准确，所以选节点时最好选观测孔，不得已时才用生产井和虚井，虚井的原始数据只能用插值方法给出。

根据上述已知资料，我们就可以计算出t_1时刻M个计算点（因$M+1$到N为第一类外节点，其末水位$h_{i,1}$已知）的水头值$h_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,M)$。因为未知数为$M$个，所以需要列出$M$个方程，也就是说，对每一个计算点需要列一个方程式。

对M个计算点所列出的M个方程式，实际上是每个计算点上的水量平衡式。

我们先讨论任意一个三角形Δ_β，显然，Δ_β上含水层的水量平衡公式为：

$$q_s=-q_T+q_\perp+q_b-q_w \qquad (1-1)$$

式中：

q_s——Δ_β上含水层在Δt时间内的储存或释放水量，规定储存为正。

$q_\perp$——Δ_β上含水层在Δt时间内的垂向越流补给量，规定补给为正。

q_w——Δ_β上在Δt时间内开采本含水层各井的抽水量，规定抽水为正。

q_T及q_b——在Δt时间内经过Δ_β三个边上含水层断面的侧向径流量。其中：

q_T——当Δ_β各边不在边界$\widetilde{\Gamma}_2$上，经这些边上含水层断面在Δt时间内的侧向径流量，规定流入Δ_β为负；

q_b——当Δ_β有一个至二个边在边界$\widetilde{\Gamma}_2$上，经这些边上含水层断面在Δt时间内的侧向径流量，也就是Δ_β范围内的第二类边界补给（排泄）量（在Δt时间内），规定流入Δ_β为正。

因此，当Δ_β三个边都不在边界上时$q_b=0$，只有q_T；当Δ_β有一至二个边在$\widetilde{\Gamma}_2$上时，流入Δ_β的侧向径流量为$-q_T+q_b$。

如上所说，我们需要对内节点和第一类外节点等M个计算点建立其水量平衡式。可以

证明，每个计算点上的各种水量是以该点为公共顶点的诸三角形的各种水量、各按一定法则分配给这点的结果。记 i 点上由此而得的各种水量为q_T^i，q_s^i，$q_\perp^i$，，q_w^i，q_b^i，于是任一计算点 i 的水量平衡方程式即为：

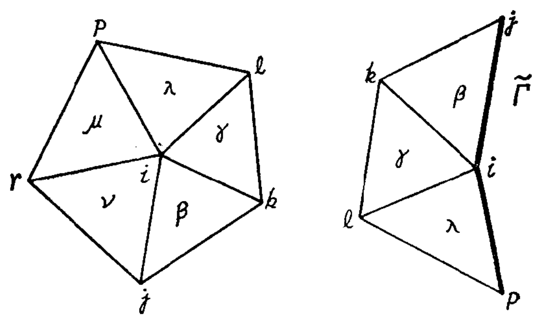
$$q_s^i = -q_T^i + q_\perp^i + q_b^i - q_w^i \tag{1—2}$$

要强调说明的是：我们所说的水量分配是抽象分析的结果，在客观实际中并不存在，所以不能解释其水文地质意义。本篇只说明存在这种分配，并给出各种水量的具体分配法则，关于这些分配的由来过程及证明将在第二篇中给出。

到此，可以看出，本来是预报整个计算区内的压力面问题，现离散为预报一批计算点上的水头值问题，本来是各个 Δ_β 上的水量平衡问题，也离散为各个计算点上的水量平衡问题。

下面，介绍上式中每一项的具体内容和水量分配的具体法则。

在谈到分配法则时，假定Δ_β的三个顶点 i、j、k 都是计算点。为了叙述的方便，把以 i 为公共顶点的三角形组成的多角形记为Ω_i，并设这些三角形号码是β、γ、λ、μ、ν等，也用$\tau(i)$或τ简记它们。又设这些三角形上的其它节点（围绕着 i 的一圈节点）是 j、k、l、p、r等，也用$j(i)$或 j 简记它们（图1—6）。



i 是内节点　　　　i 是第 类外节点

图 1-6

一、垂向越流补给量的分配及$q_\perp^i$

如果Δ_β里在Δt时间内平均日垂向补给强度是ε_β，于是平均日垂向补给量为$\varepsilon_\beta\Delta_\beta$，把这个量平均分给三节点，每节点获得$\frac{1}{3}\varepsilon_\beta\Delta_\beta$。

计算点 i（见图1-6）获得来自Ω_i的这种水量为

$$q_\perp^i = \frac{1}{3}(\varepsilon_\beta\Delta_\beta + \varepsilon_\gamma\Delta_\gamma + \varepsilon_\lambda\Delta_\lambda + \varepsilon_\mu\Delta_\mu + \varepsilon_\nu\Delta_\nu) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{\tau(i)=\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu} \varepsilon_{\tau(i)}\Delta_{\tau(i)} = \frac{1}{3}\sum_{\tau(i)} \varepsilon_\tau\Delta_\tau.$$

例 1：如剖分图1—7，所有七个节点都是计算点（即边界上全给出第二边值），那么将$q_\perp^i$代入（1-2）式，对七个节点可得七个方程：

$$q_T^1+q_s^1=\frac{1}{3}(\varepsilon_{\mathrm{I}}\Delta_{\mathrm{I}}+\varepsilon_{\mathrm{II}}\Delta_{\mathrm{II}}+\cdots\cdots+\varepsilon_{\mathrm{VI}}\Delta_{\mathrm{VI}})+q_b^1-q_w^1,$$

$$q_T^2+q_s^2=\frac{1}{3}(\varepsilon_{\mathrm{I}}\Delta_{\mathrm{I}}+\varepsilon_{\mathrm{VI}}\Delta_{\mathrm{VI}})+q_b^2-q_w^2,$$

$$q_T^3+q_s^3=\frac{1}{3}(\varepsilon_{\mathrm{I}}\Delta_{\mathrm{I}}+\varepsilon_{\mathrm{II}}\Delta_{\mathrm{II}})+q_b^3-q_w^3,$$

……………………………………………

$$q_T^7+q_s^7=\frac{1}{3}(\varepsilon_{\mathrm{V}}\Delta_{\mathrm{V}}+\varepsilon_{\mathrm{VI}}\Delta_{\mathrm{VI}})+q_b^7-q_w^7.$$

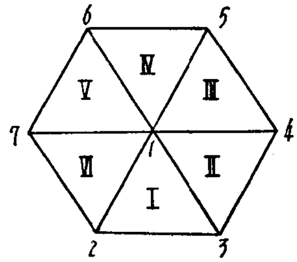


图 1-7

如果仅$\overline{7,2}$、$\overline{2,3}$、$\overline{3,4}$是第二类边界，那么4、5、6、7都是第一类外节点，只有1、2、3是计算点，这样就只需要上面前三个方程。

二、第二边界段上平均日侧向补给量的分配及q_b^i

因为侧向补给强度只在$\widetilde{\Gamma}_2$上给出，所以只涉及$\widetilde{\Gamma}_2$边界段上这种水量的分配。

如果图 1-8 中$\overline{j,k}$是$\widetilde{\Gamma}_2$上一段，长度为$L_{j,k}$，Δt内平均日侧补给强度是$Q_{j,k}$，那么平均日侧补给量是$Q_{j,k}L_{j,k}$，将该水量平分给j、k两点。这也就是说内节点不能分得任何侧向补给量，只有第二类外节点分得它相邻两侧边界段上侧向补给量之半。所以：

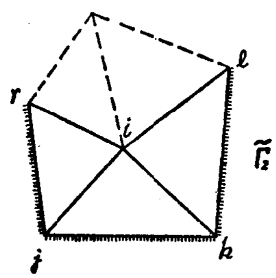


图 1-8

$$q_b^i=0\ (i\text{ 是内节点}),$$

$$q_b^j=\frac{1}{2}(Q_{r,j}L_{r,j}+Q_{k,j}L_{k,j}),$$

$$q_b^k=\frac{1}{2}(Q_{j,k}L_{j,k}+Q_{l,k}L_{l,k}),$$

（j，k是第二类外节点）

在例 1 中（图1-7），如4、5、6、7是第一类外节点，那么将对1、2、3三点的q_b^i表达式代入相应方程中得：

$$q_T^1+q_s^1=q_{\perp}^1+0-q_w^1,$$

$$q_T^2+q_s^2=q_{\perp}^2+\frac{1}{2}(Q_{7,2}L_{7,2}+Q_{2,3}L_{2,3})-q_w^2,$$

$$q_T^3+q_s^3=q_{\perp}^3+\frac{1}{2}(Q_{2,3}L_{2,3}+Q_{3,4}L_{3,4})-q_w^3.$$

如$\overline{kl}$是第二类边界段（图1-8），但l是第一类外节点，那么$\overline{k,l}$上侧向补给量$Q_{k,l}\cdot L_{k,l}$只用到给k的一半，而另一半用不着，因为对l点不列方程。如果所有外节点都是第一类的，那么整个这项不存在。

三、生产井平均日开采量的分配及q'_w

在Δ_β上的生产井P_w平均日开采量Q_w按井点在这三角形里对于三个顶点的面积坐标分配给这三个点，不过有时Q_w要略加修改。

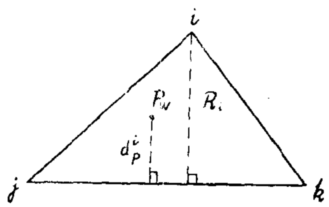


图 1-9

Δ_β上的点P（图1—9）到三个边的距离分别与这三边上的高之比叫做P点属于相应顶点的面积坐标。如i点的对边是$\overline{j,k}$，P到这边的距离是d_P^i，i到$\overline{j,k}$的距离（即这边上的高）是R_i，于是$\varphi_i^\beta(P)=\dfrac{d_P^i}{R_i}$就是$P$点属于顶点$i$的面积坐标（因为由$P, j, k$构成的三角形$\Delta_P^i$和$\Delta_\beta$有相同的底边，它们面积的比值$\Delta_P^i/\Delta_\beta$正好是$d_P^i/R_i$，所以叫面积坐标）。同理$P$点属于$j,k$的面积坐标分别是$\varphi_j^\beta(P)=\dfrac{d_P^j}{R_j}=\dfrac{\Delta_P^j}{\Delta_\beta}$及$\varphi_k^\beta(P)=\dfrac{d_P^k}{R_k}=\dfrac{\Delta_P^k}{\Delta_\beta}$，由这三式可以看出一个点的三个面积坐标有下列关系：

$$\varphi_i^\beta(P)+\varphi_j^\beta(P)+\varphi_k^\beta(P)=\frac{\Delta_P^i+\Delta_P^j+\Delta_P^k}{\Delta_\beta}=\frac{\Delta_\beta}{\Delta_\beta}=1,$$

可以看出当P就是i点时，因为$\varphi_i^\beta(P_i)=\dfrac{d_i^i}{R_i}=\dfrac{R_i}{R_i}=1$，所以$\varphi_i^\beta(P)$值为1，而$P$在$i$点的对边$\overline{j,k}$上时，因为$d_P^i=0$，所以$\varphi_i^\beta(P)$值为0，特别是当$P$是$j$及$k$点时$\varphi_i^\beta(P)$的值为0。$\varphi_j^\beta(P)$及$\varphi_k^\beta(P)$有完全相似的性质：在对边上其值是0，在自己这点上值为1。

1．P_w在Δ_β内部时（Δ_β的内井）（图1-9），Q_w看作全在Δ_β内抽出，于是i点分得$Q_w\varphi_i^\beta(P_w)$；j点分得$Q_w\varphi_j^\beta(P_w)$；k点分得$Q_w\varphi_k^\beta(P_w)$。以i点为例，可以看出P_w点离i点越远则i点分得越少。

2．P_w在Δ_β的一个边上，例如在$\overline{i,j}$上（图1-10），这时水量看作在Δ_β内只抽出一半，另一半在Δ_β外抽出，于是在Δ_β内只用$\dfrac{1}{2}Q_w$，这样就规定：

$$i\text{ 点分得}\quad \frac{1}{2}Q_w\varphi_i^\beta(P_w);$$

$$j\text{ 点分得}\quad \frac{1}{2}Q_w\varphi_j^\beta(P_w);$$

$$k\text{ 点分得}\quad \frac{1}{2}Q_w\varphi_k^\beta(P_w)=0.$$

因P_w点在k的对边上$\varphi_k^\beta(P_w)=0$，P_w对k点没有影响。注意这时P_w点分$\overline{i,j}$为两段，其长度为$l_{P,j}$及$l_{P,i}$，于是根据相似三角形原理$\varphi_i^\beta(P_w)=\dfrac{d_P^i}{R_i}=\dfrac{l_{P,j}}{L_{i,j}}$，同样$\varphi_j^\beta(P_w)=\dfrac{d_P^j}{R_j}=\dfrac{l_{P,i}}{L_{i,j}}$，当在相邻的$\Delta_\gamma$中分配$P_w$的另一半水量给$i$，$j$时，其比例系数$\varphi_i^\gamma(P_w)=$

$\frac{h_p^i}{H_i}=\frac{l_{j,p}}{L_{i,j}}=\varphi_i^\beta(P_w)$，同样$\varphi_i^\gamma(P_w)=\varphi_i^\beta(P_w)$。

3．P_w是Δ_β的一个顶点时（节点井）（图1-11），例如是节点i，这时认为水量在Δ_β中只抽出$\frac{\alpha_i^\beta}{2\pi}Q_w$，其中$\alpha_i^\beta$是$\Delta_\beta$中角$i$的弧度，于是

$$i\text{ 点分得}\quad \frac{\alpha_i^\beta}{2\pi}Q_w\varphi_i^\beta(P_i)=\frac{\alpha_i^\beta}{2\pi}Q_w;$$

$$j\text{ 点分得}\quad \frac{\alpha_i^\beta}{2\pi}Q_w\varphi_j^\beta(P_i)=0;$$

$$k\text{ 点分得}\quad \frac{\alpha_i^\beta}{2\pi}Q_w\varphi_k^\beta(P_i)=0.$$

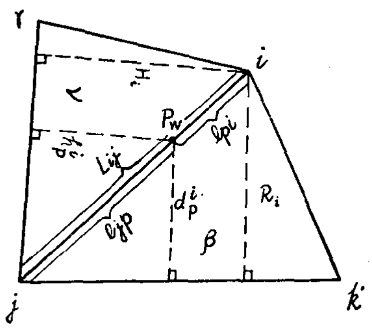


图 1-10

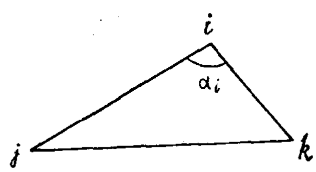


图 1-11

这是因为$\varphi_i^\beta(P_i)$在i点上为1，在其它两点上为0。这也就是说在某节点上的井的开采量只分给它自己，并且只给这个角中的那部分。

例如在一正三角形Δ_β的重心处有一井P_1（图1-12），因为它到各边的距离与边上的高的比都是1/3，所以Δ_β的三个顶点各分得$\frac{1}{3}Q_1$的水量。又如井P_2在$\overline{i,j}$边上而且将$\overline{i,j}$边分成1:2，即$\overline{i,P_2}$的长度是$\overline{P_2,j}$长度的一半，于是P_2对i点的面积座标是2/3，所以i点得到$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}Q_2=\frac{1}{3}Q_2$，而$P_2$对$j$点的面积坐标是1/3，所以$j$点得到$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}Q_2=\frac{1}{6}Q_2$，$k$点得到的是0。假如井在$\Delta_\beta$的一个顶点$i$上，而这角是60°，那么$i$点得到的水量为$\frac{60}{360}Q_i$，即得到$\frac{1}{6}Q_i$，而其它两点所得为0。

按上述分配法则不难得出Ω_i上i点所得的q_w^i，不过这时最好把Ω_i上的井分做三类：i处的节点井、Ω_i内部的内井（包括两个三角形公共边上的井）和Ω_i边界上的井，并且也要把节点分成内节点和第二类外节点来写出q_w^i。

节点井 i 的开采量分配：对内节点 i 来说，自各Δ_τ所得的开采量是$\frac{\alpha_i^\tau}{2\pi}Q_i$，相加后因

$$\sum_{\tau(i)}\frac{\alpha_i^\tau}{2\pi}=\frac{\alpha_i^\beta+\alpha_i^\gamma+\cdots+\alpha_i^\nu}{2\pi}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$$(图1-6)，所以总计仍为 Q_i；对第二类外节点 i 来说，$\sum_{\tau(i)}\frac{\alpha_i^\tau}{2\pi}<1$，所以只得到$\frac{\alpha_i^\beta+\alpha_i^\gamma+\alpha_i^\lambda}{2\pi}Q_i$（图1-13）。

各内井的开采量分配：如井P_w在某个Δ_τ内部，显然分给 i 为 $Q_w\varphi_i^\tau(P_w)$；如 P_w 是在两个三角形的公共边上（图1-10），例如说 P_w 在$\overline{i,j}$上，那么在 Δ_β 中给 i 点$\frac{1}{2}Q_w\cdot$

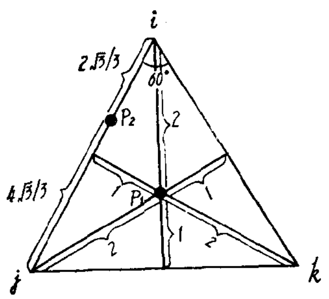


图 1-12

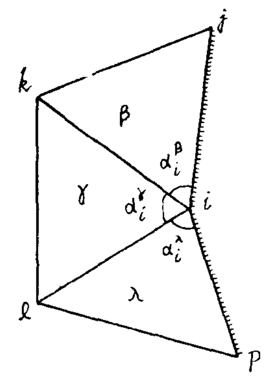


图 1-13

$\varphi_i^\beta(P_w)$，在 Δ_γ 里它给 i 点$\frac{1}{2}Q_w\varphi_i^\gamma(P_w)$，相加时注意 $\varphi_i^\beta(P_w)=\varphi_i^\gamma(P_w)$ 就得到 $\left(\frac{1}{2}\cdot Q_w+\frac{1}{2}Q_w\right)\varphi_i^\beta(P_w)$，结果仍为 $Q_w\varphi_i^\beta(P_w)$，所以这种井可以看成是只在 Δ_β 里的内井。以上其实都是Ω_i的内井。

Ω_i边界上的井的开采量分配：对内节点 i 来说，这种井全在各Δ_τ的 i 的对边上，所以对 i 不起作用（图1-14）。对第二类外节点 i 来说，只有它和它两侧边上的两个外节点联线上的井P_u（亦即$\widetilde{\Gamma}_2$上的井）给它分配$\frac{1}{2}Q_u\varphi_i^\tau(P_u)$ 的开采量（图1-15）。

最后我们可以列出q_w^i如下

	节点井	Ω_i 的内井	Ω_i 边界上的井	
内节点	$q_w^i=Q_i$	$+Q_w\varphi_i^\tau(P_w)+\cdots\cdots$	$+\ 0$	（图1—14）
第二类外节点	$q_w^i=\frac{\alpha_i^\beta+\alpha_i^\gamma+\alpha_i^\lambda}{2\pi}Q_i$	$+Q_w\varphi_i^\tau(P_w)+\cdots\cdots$	$+\frac{1}{2}Q_u^k\varphi_i^k(P_u)+\cdots\cdots.$	（图1—15）

因为$\widetilde{\Gamma}$上的生产井开采量分配时有丧失，所以剖分时避免在$\widetilde{\Gamma}$上有开采井。

例 2：井分布如图1-16所示。Ω 为正六边形，各三角形都是正三角形。各节点井平均日开采量是$Q_i(i=1,2\cdots,7)$。Δ_1的重心处有井 P_8，$\overline{2,7}$ 及 $\overline{3,4}$ 上有井 P_9、P_{10}，这三井在

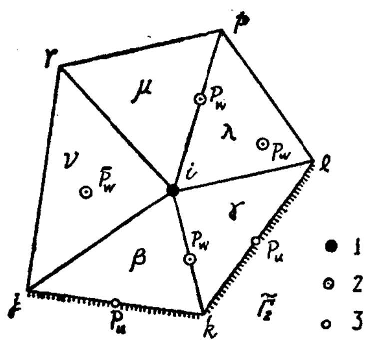


图 1-14

1—节点井；2—内井；3—边界井

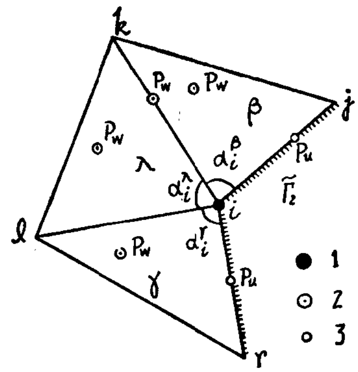


图 1-15

1—节点井（在Γ_2上）；2—内井；3—边界井

平行$\overline{2,3}$的直线上，$\overline{1,4}$上的井P_{11}分它为4:1，$\overline{1,7}$上的井P_{12}分它也是4:1，它们的开采量各为$Q_i(i=8,9,\cdots,12)$。如只有1、2、3为计算点，那么根据（1—2）式可得平衡方程组为：

$$q_T^1+q_s^1=q_\perp^1+q_b^1-Q_1-\frac{1}{3}Q_8-\frac{1}{5}Q_{11}-\frac{1}{5}Q_{12},$$

$$q_T^2+q_s^2=q_\perp^2+q_b^2-\frac{1}{3}Q_2-\frac{1}{3}Q_8-\frac{1}{3}Q_9,$$

$$q_T^3+q_s^3=q_\perp^3+q_b^3-\frac{1}{3}Q_3-\frac{1}{3}Q_8-\frac{1}{3}Q_{10},$$

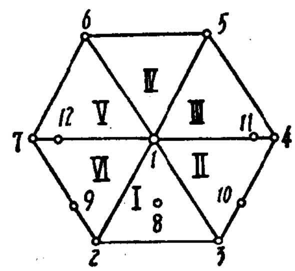


图 1-16

如果其它点也是计算点，那么不难看出 $q_w^4=\frac{1}{3}Q_4+\frac{1}{6}Q_{10}+\frac{4}{5}Q_{11}$；$q_w^5=\frac{1}{3}Q_5$；$q_w^6=\frac{1}{3}Q_6$，$q_w^7=\frac{1}{3}Q_7+\frac{1}{6}Q_9+\frac{4}{5}Q_{12}$。

更复杂的例可以参看第二篇中有关部分。

四、平均日弹性存储或释放水量的分配及q_s^i

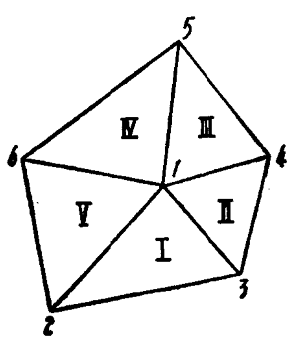


图 1-17

设一任意剖分图，如图1-17。其中任一三角形，如Δ_{I}，在t_0到t_1的Δt时间内，在其三个顶点处水头变幅是$\Delta h_1=h_1-h_{1,0}$，$\Delta h_2=h_2-h_{2,0}$，$\Delta h_3=h_3-h_{3,0}$，那应在Δ_{I}上水头平均变幅是$(\Delta h_1+\Delta h_2+\Delta h_3)/3$。设$\Delta_{\mathrm{I}}$上含水层厚度是$B_{\mathrm{I}}$，$S_{s\mathrm{I}}$是$\Delta_{\mathrm{I}}$上单位体积含水层水头升高（降低）一个单位时的弹性储水（释水）量，那么在Δ_{I}上平均单位时间内含水层弹性存储或释放的水量为