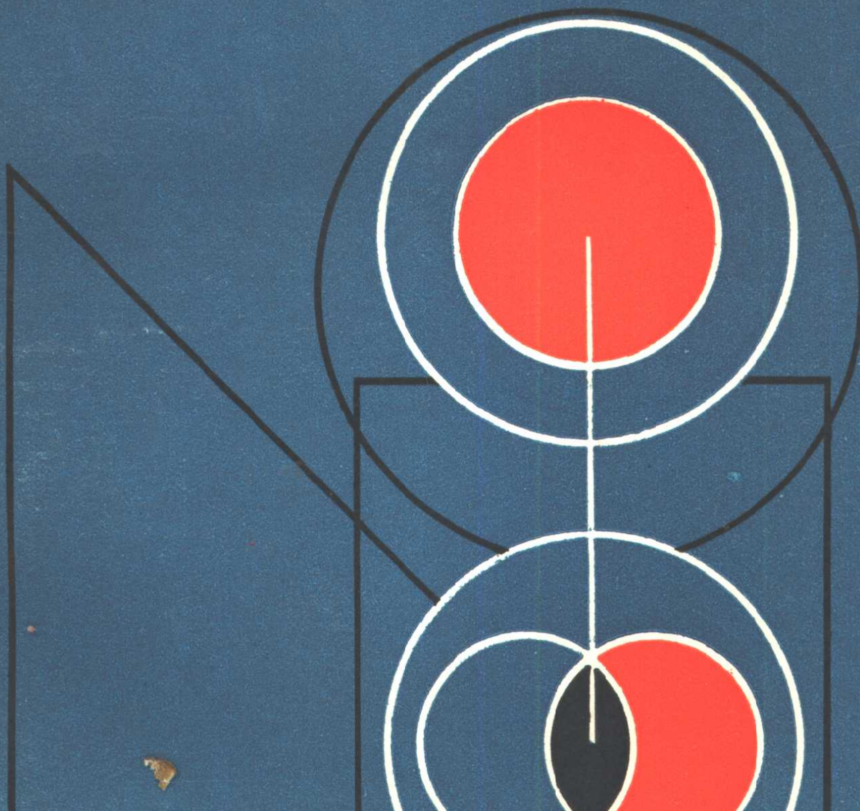
CHUDENGJIHELUN

初等集合论

K. T. Leung
Doris L. C. Chen 著



广西人民出版社

初等集合论

K.T.Leung 著
Doris L.C.chen

阎金童 译　　张锦文 审校

广西人民出版社

KAM-TIM LEUNG AND DORIS LAI-CHUE CHEN

ELEMENTARY SET THEORY

HONG KONG UNIVERSITY 1981

初等集合论

K.T.Leung 著

Doris L.C.Chen

阎金童 译

张锦文 审校

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 5 印张 108 千字

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数：1—9,400册

书号：7113·535 定价：1.15元

中译本序言

集合论是一门现代数学，属于纯数学领域．它是离散数学、连续数学乃至一切数学分支(除范畴论外)的基础，它在计算机科学、语言学、心理学以及智能工程等方面，都有广泛的应用．

目前我国大学数学系(包括师范院校数学系)的教学大纲，集合论的内容是多次重复出现的，数学分析、高等代数、抽象代数、概率论、实变函数、拓扑学等都用到集合论的基本知识，每门课开始时都用一定篇幅讲授集合论知识．这样，一方面重复太多，另一方面学时不集中，不可能使学生系统地掌握集合论的基本内容．为了弥补这一不足之处，许多高校的数学系，近几年来都先后开设了集合论选修课．

国内外也有若干高校数学系在一年级学生中开设集合论基础课，以代替各门数学分支课程中所讲授的集合论基本知识．美国加州大学 H. B. Enderton 所著的《集合论原理》(Elements of Set Theory) 和香港大学 K. T. Leung、Doris L. C. Chen 合著的这本《初等集合论》(Elementary Set Theory) 是较好的两本教材．这本《初等集合论》不仅通俗易懂，便于初学者阅读，对数学系一年级学生讲授它很适宜，而且陈述严谨，合乎现代集合论的基本标准．本书第一章通俗地讲授了命题演算，不仅是本书的严谨的逻辑基础，而且也向学生讲授了数理逻辑的这一初等部分．在其余几章的集合论部分中，作者是按介于公理法与描述法之间的方案来论述这一理论的，其中的概念(卡氏积、关系、函数、有序集合、良序集合、序数和基数等)和运算(并、交、幂和族的并与交等)，对于数学的许多分支来讲都是必要的．香港大学数学系从 1959 年以来，就把本书作为一年级学生的基础课之一进行讲授，借以统一数学的基础概念、记号和术语．我认为这种作法是很好的，是值得学习

的．这也正是翻译出版本书的目的．

校对全书译稿之后，我完全同意这样一种看法，就是“作者选材仔细，紧扣目的，以使人乐于接受的新颖的方式来叙述概念”，“两位作者在撰写这本书的过程中所使用的许多独创的新方法已经获得成功”．我觉得，本书的不足之处是把关系与映射（函数）这两个概念作了较繁琐的描述，这对于初学者有不便之处．采用本书作教材的教师，对于这两个概念的简洁的描述，可参阅我的《集合论浅说》（科学出版社 1984 年出版）中的定义．

我认为，这本《初等集合论》是一本适时的教材，对高校数学系的学生来说，从中将会得到裨益．

张锦文

1983 年 8 月于北京

前　　言*

现代数学最显著的特点是其较大的统一性和普遍性．在现代数学中，不同领域间的界限已经变得模糊不清．过去分开而不相互联系的学科，如今往往变成某一学科的一些特殊情形．这些影响深远的变化，形成了某些很重要的、数学上大部分领域内经常用到的基础概念、记号和术语．

到 1959 年，我觉得对香港大学来说，把那些基础概念、记号和术语中最基本而且比较初等的部分，列为大学一年级数学课程之一，以作为大学许多数学课程的基础，这种做法的时机已经成熟．我们称这门课程为“数学基本概念”．我们先介绍的基本概念是集合理论和某些代数基本运算．现已转到香港中文大学任教的 S. T. Tsou 博士为这些材料写了讲授纲要．这个纲要后经 D. Chen 博士修改补充，把符号逻辑原理包括进去．1961 年，我们进一步改革一年级数学课程，把代数基本运算放进了更一般化的线性代数结构中去．关于这方面内容，1950 年到香港大学任教的 K. T. Leung 博士写了详细的讲稿．于是，现在我们在一年级讲授的数学课程主要是基本概念、线性代数和微积分．对我们来说，这些都是大学本科数学教育的新尝试，然而我们深信这种改革途径的正确性，并从迄今所获得的极其令人欢欣鼓舞的成果中得到了极大的激励．

在此期间，要求改革中学数学的呼声开始在世界各国引起反响，一致同意在中学应该讲授符号逻辑和集合理论．于是在 1962 年，我们决定把这两个课题列入香港大学入学考试的普通和高级数学提纲之内．遗憾的是，还欠缺适宜向中学六年级学生讲授这两个“复杂”课题的教科书，许多中学师生恳求我们给予帮助．为

---

* 为第一篇 1964 年版本所写．

满足这种急需，K. T. Leung 和 D. Chen 两位博士把他们讲稿的第一部分扩充成一本书，供大学一年级学生和中学六年级学生使用.

拜读本书全部手稿后，我发现作者选材仔细，紧扣目的，以使人乐于接受的新颖方式来叙述概念. 我认为，事实上两位作者在撰写本书的过程中所使用的许多独创的新方法已经获得成功. 此书汇集了法国、德国、英国和中国数学教本的优点. 这是一本适时的教科书，我们深信，该书将会使香港和其他地方的学生大受裨益.

Y. C. Wong

1964 年 10 月于香港大学

序　　言*

本书是我们自1959年以来，每年向香港大学数学系一年级学生讲授的"数学基本概念"课程讲稿的扩充，大约安排25次讲座，目的是给数学系学生提供有利于他们继续学习所需要的符号逻辑和集合论方面最起码的知识．香港大学1964年的入学考试大纲添加了命题演算和集合理论，结果导致了中学都讲授本课程的部分内容．因此，本书不仅可用于大学，也可用于中学．

本书第一章是命题演算——简述数学中用到的逻辑语言，其余八章专门介绍集合理论．在这八章中，我们按介于公理法与描述法之间恰当的折衷方案来论述集合理论．"集合"和"属于"看作不加以定义的原始概念，支配这两个概念的那些公理，在理论的发展过程中的不同阶段按情况需要而陆续提出．全书经常用到数学的常用语，但不涉及元数学上的问题．该书每章末给出难度不一的习题，较难的打上*号．读者不必解出全部习题，但应该把每道题目仔细看一看，以便获得所述理论进一步可能发展的某些观念．

本书分为两篇，分别适应于香港中学生和大学生的需要．第一篇为1964年胶印版的修订本，这次修订，我们考虑了香港大学入学考试高级大纲的需要．在这里第一次印行的第二篇，包括了"数学基本概念"这个课程的全部内容，以及为大学一年级学生进一步阅读的材料．

Y. C. Wong 教授审阅了我们第一篇的原稿，提出了许多宝贵的改进意见．我们为此感谢他，同时感谢他为第一篇的1964年版所写的前言．我们也感谢我们的同事 Y. M. Wong 先生和 Y. H. Au-Yeung 先生，他们提供了宝贵的帮助．最后，我们还要感

---

* 为第一、二篇1967年版所写．

谢 K. W. 何先生打印了原稿。

K. T. Leung
Doris L. C. Chen
1966年3月于香港大学

目　录

第　一　篇

第　二　篇

第　一　篇

第一章　命题演算

A. 命　　题

所谓命题(或陈述句)，它意味着去说其含义是真的或者是假的. 显然，下列各语句都是命题:

地理学是一门科学.

孔夫子是一个士兵.

张三死了且李四在坐牢.

2 小于 3 且 3 是一个素数.

方向盘失灵或司机喝醉了.

如果约翰在这里，那么这本书就不是他的.

然而，按上述意义而言，下列任何一个语句都不能看作是命题:

数 3 是迟钝的.

朋友们，罗马人，同胞们，请听我讲.

爱克瑟特的老表，阁下想些什么?

本章主要讨论各种命题. 这里，我们将扼要地叙述与命题有关的问题. 在本章的命题演算中，除了 K 节和 L 节外，我们都不考虑命题的主语和谓语间的关系，而把命题本身作为整体来处理，并研究把命题复合成另外一些命题的方式. 举一些例子也许能更清楚地说明这点.

考虑命题

(1) 地理学是一门科学.

作为一个命题，(1)不为真则为假. 若它为真，我们就说(1)以真值作为它的真值；若它为假，我们就说命题(1)以假值作为它的

真值． 于是，这种真值表明了语句(1)的主语和谓语间的一种关系，从而区别该语句的真假性．对我们来说，“地理学是一门科学”这个语句，只不过是能够有意义地赋予其真值的一个命题罢了．

命题

(2) 2小于3

(3) 3是一个素数

都是算术真命题．连结(2)与(3)，我们就可以构成一个新命题

(4) 2小于3且3是一个素数．

对于(4)，我们主要关心的是它的真值与(2)和(3)的真值的关系．作为一个算术命题，(4)是真的，因为(2)与(3)两个都是算术真命题．

这种命题以及类似的问题，下几节将进一步充分讨论．

B. 合 取

在普通语言中，我们经常用且这个词把两个命题连接起来．考察命题

(1) 张三死了且李四在坐牢．

我们说，(1)以命题“张三死了”作为它的第一个组成部分，以命题“李四在坐牢”作为它的第二个组成部分，并由连接词且连结这两个部分组成． 我们认为，象(1)这样的命题，如果它的两个组成部分都为真，它就是真的，否则它就是假的．与用连接词且连接两个命题这种复合方式相对应，在命题演算中，我们有合取的概念．

在数理逻辑的记号法中，两个命题X和Y的合取用$X \wedge Y$表示，读作“X与Y”或“X且Y”． $X \wedge Y$是一个这样的命题：当X与Y均为真时它才是真的，当X与Y不全为真时它就是假的．于是合取$X \wedge Y$的真值由它的两个组成部分X和Y的真值唯一确定．这种情形可用一个“真值表”简便地表示如下(其中，“T”表示真，“F”表示假)：

第一部分 X	第二部分 Y	合　取 $X \wedge Y$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

C. 析　　取

第二个相当熟悉的复合方式就是用连接词或来连结两个命题即两个部分．很遗憾，“或”这个词的意思是含糊的，有时人们在可兼的意义上用它，意味着两者之一，或两者都成立；有时人们又在互斥的意义上用它，意味着不是这个就是那个，而不是两个．一般习惯大概赞成可兼意义的“或”．例如，在汽车手册中，我们会发现如下警告：

如果您在油位或水位过低时开动，就会损坏发动机．

很清楚，这不仅劝告司机在油位过低或水位过低时不要启动发动机，而且劝告司机在油位和水位都过低时也不要启动发动机．这个问题便是用具有可兼意义的“或”这个词的实际例子．另外，尤其是在正式的文件中，象“或两者”、“与(或)”这样的词组暗示了其

第一部分 X	第二部分 Y	X“或”Y 可兼	 互斥
T	T	T	F
F	T	T	T
T	F	T	T
F	F	F	F

中那个"或"应理解为互斥的."或"的不同意义，可用真值表的形式表示出来(见上表).

在数理逻辑中，析取是用相应于可兼意义的"或"的符号"∨"把两个命题即两个部分连接起来的一种复合. 对于任意两个命题 X 和 Y 的析取，记为 $X \vee Y$，读作"X 或 Y". 于是析取的真值表如下:

第一部分 X	第二部分 Y	析 取 $X \vee Y$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

在数理逻辑中，"或"的互斥用法是不重要的，所以不必给出专有的名称和符号. 事实上，我们可以把"或"的互斥用法表示为一个多重复合. 这种多重复合将在下几节里介绍.

附注 按通常的用法，英文中的 or，法文中的 ou，德文中的 oder 都有两种解释. 在拉丁文中，aut 和 vel 分别对应于互斥意义的 or 和可兼意义的 or. 这就部分地说明了关于析取符号∨的选取缘由.

D. 否 定

因为合取和析取都是由两个命题结合而成的新命题，所以我们说它们是二元结构. 另一方面，由于否定恰好把一个命题变成另一个新命题，所以我们把否定称为一元结构. 表示否定的通常方法就是看情况把"不"这个词插进句子中，或把"不"这个词从句子中抽出. 例如，"孔夫子是个士兵"这个命题的否定为"孔夫子不是士兵". "黄不在这里"这个命题的否定便是"黄在这里". 然而，构造一个命题的否定还有别的方法. 例如

“香港有时下雨”其否定为“香港从来不下雨”；

“所有的猫都是恶的”其否定为“有些猫不恶”；

“凡狗都不顺从人”其否定为“某些狗听话”；

“张三与李四高声喧闹”其否定为“张三或李四(即他们当中至少有一个)不高声喧闹”.

这几个例子也说明命题的否定的真值，恰为原命题的真值的反面.

在数理逻辑中，一个命题的否定，由在原命题前加符号～而成，符号～简单读为“非”. 于是“孔夫子是个士兵”的否定可记为“～(孔夫子是个士兵)”，此时可以不用打乱原命题的结构而读作“非(孔夫子是个士兵)”. 否定命题的真值表如下：

组成部分 X	否　定 $\sim X$
T	**F**
F	**T**

E. 条 件 命 题

在普通语言中，象

(1) 若陈在此，则这把刀子不是他的.

这样的“若…则…”组合，为我们提供了另一种重要的二元结构，称为“条件命题”. 一个条件命题有两个组成部分，第一部分称为它的“假设”，第二部分称为它的“结论”. 于是，“陈在此”与“这把刀子不是他的”便是条件命题(1)的假设和结论.

现在我们来研究条件命题的真值. 根据日常生活经验，我们容易理解：若假设为真，结论为真，则条件命题为真；若假设为真，而结论为假，则条件命题为假. 从以下几个例子大家会容易明白这个事实.

(2) 若 $2>1$,则 $3>2$.

(3) 若 $2>1$,则 $3<2$.

(2) 为真命题,而(3)为假命题. 同样，假设为假且结论也假的条件命题可以看作真命题. 例如

(4) 若 $2<1$,则 $3<2$.

就是假设和结论都是假的真命题.

具有假的假设和真的结论的条件命题也可以看作真的. 虽然这常常难于使一些人相信，特别是难于使数学门外汉相信. 我们考虑一个例子：张三看见一辆东歪西扭地开过来的小汽车，他得出的结论是:

(5) 若方向盘不失灵,则司机喝醉了.

后来发现,不仅方向盘失灵而且司机也喝醉了. 不管怎么说，张三的结论还是对的. 事实上,他同样可以把这个结论重述为

(6) 方向盘失灵了或是司机喝醉了.

因此,在方向盘失灵，司机又喝醉的情况下,析取(6)为真，从而条件命题(5)也为真.

于是,一个条件命题只有其假设为真而结论为假时才为假,其余皆真. 在数理逻辑中，条件命题是按照顺序在两个部分之间插入一个箭头→构成的,即“假设→结论”. 条件命题(1)可以记为

(陈在此)→(这把刀子不是他的)

读作“若陈在此，则这把刀子不是他的”，即“仅当刀子不是他的时候,陈才在此”. 条件命题的真值表如下:

假　设 X	结　论 Y	条件命题 $X\rightarrow Y$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T