相似理論

M. B. 基爾皮契夫著

科学出版社

相 似 理 論

M.B. 基爾皮契夫 著

沈 自 求 譯

科 [illegible] 社

內 容 簡 介

本書係根據蘇聯科學院出版社 1953 年出版的基爾皮契夫院士所著“相似理論”(Теория подобия)一書而譯出。

原書對相似理論發展的歷史，自然界中的相似現象，相似第一定理、第二定理、第三定理，以及相似理論在實踐中的重要，都有扼要的講述。

本書是要把相似理論介紹給進行實驗工作的研究者和以模型來研究工程設備的工程師，因為模型的選擇，計算和建造以及實驗工作結果的綜合和整理都是以相似理論為基礎的。

相 似 理 論

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АН СССР 1953г.

原著者	М. В. Кирпичев
翻譯者	沈 自 求
出版者	科 学 出 版 社 北京朝阳門大街 117 号 北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
印刷者	上海大众文化印刷厂
总經售	新 华 書 店

1955年3月第一版　　书号：0158　印張：3

1959年6月第四次印刷　　开本：[illegible]0×1168 1/32

(沪) 4.017—5,226　　字数：60,000

定价：(10) 0.60 元

原　　序

這本關於相似學說的簡述，是要把相似論的理論基礎介紹給進行實驗工作的研究者以及用模型來研究工程設備的工程師。因爲模型的選擇、計算和建造，以及實驗結果的處理和綜合，都是以相似理論作爲基礎的。但在各種不同工程領域中模型法的實例，則不包括在本書之中，而將在 M. B. 基爾皮契夫及 M. A. 米赫耶夫正在編寫中的“熱設備的模型法”一書中加以敍述。

作　者

1953年5月29日

目　錄

00882

第一章　歷史概述

約在一百年以前，科學中產生了一個新的領域——關於相似現象的學說。

這門科學的英明的預見，早在 1686 年已爲牛頓在他的著作 "Principia" 第 II 册中所提出 [1]。但是只有在 1848 年，法國科學院院士別爾特藍 (J. Bertrand) 才首先確定了相似現象的基本性質，構成了相似第一定理，卽關於相似不變量 (инвариант подобия) 存在的定理。

發生在幾何相似系統中的現象，假使在它們所有相似的點上，同類量的比例爲常數時，這種現象就叫做相似。這種同類量的比例，卽所謂相似常數 (константы подобия)，是不能任意選擇的：其原因是由於表示現象特徵的量，一般說來不是互不相關，而是處在爲自然規律所決定的一定關係之中。在許多情况下，這種關係在數學上可以表示爲方程的形式；而對互相相似的現象，這種方程應當具有同一的形式。這種表示現象特性的物理量間 "關係方程" 的存在，對相似常數的選擇上，給了一定的限制。

別爾特藍對力學現象的相似情况，引出了相似第一定理[2]。

根據牛頓第二定律所確定的力、質量與加速度之間數學關係的存在，別爾特藍指出：在相似現象中，綜合數羣 "力 × 長度/質量 × 速度的平方" 在相似現象的相似點上、具有同一個數

值。這個綜合數羣稱爲不變量（инвариант），或者稱爲力學的相似判據（критерия подобия）。在自然界中僅僅存在着相似判據相同的那些相似現象。

假如物理量的關係方程，可以轉變爲由相似不變量所組成的方程；則這種相似不變量方程，就成爲所有相似現象在數值上相同的一般性方程。

相似第二定理，確立了物理方程這種轉變的可能性。

這個定理是在1911年由俄國學者A. 費捷爾曼（Федерман）所導出的[3]；而遲在數年後，於1914年美國學者波根干（J. Buckingham）也得到了同樣的結果[4]。

在1925年T. A. 阿法那賽夫-愛林費斯特（Афанасьева-Эренфест）導出了對自然界任何現象相似情況的二個定理；並且指出：除了由各種變量所組成的綜合判據外，判據方程還包含邊界量的判據與簡單數羣——同類量的比例（例如，二個表示現象特徵的速度的比例）[5,6]。正由於這二個定理，關於相似現象性質的學說基本上得到了完成。

在第一定理提出以後，它立刻開始尋覓以判據形式來處理實驗數據的實際應用。奧斯蓬雷諾（Осборн Райнолбдс）以一個一般性的形式，用相似判據來表示了流體沿導管流動的規律；這個相似判據，後來就以他的名字爲名。用這樣的方法，使對各個研究者在水、空氣、蒸汽、各種油類等上所作的關於流體阻力的實驗數據的歸納成爲可能。弗魯特（Фруд）用模型研究了船隻的航行性質，對它們提出了判據方程形式的實驗結果；這判據方程可以推廣到幾何結構性質與實驗模型相似的船隻上去。

蘇聯傑出的學者 H. E. 茹柯夫斯基 (Жуковский) 把相似理論作爲基礎，以判據來處理飛機模型(這種飛機模型是在空氣動力管中吹過的) 的實驗，爲的是實驗的結果可以轉換到與模型相似的飛機上去。

第二定理肯定了這些實踐。

相似判據是從關係方程引導出來的。所以，爲了得到判據方程，必須知道表示現象特徵諸量相互間聯系的方程。

在大多數的物理現象，以微分方程的形式獲得其關係方程。但是微分方程僅僅在個別的情況下可以求得其積分解；所以相似判據，照例由關係微分方程導出，但還需要證明，由其積分方程導出的判據仍然是與它一樣的。這個證明是 П. К. 卡那柯夫 (Конаков) 所完成的[7]。

這樣，就可能從不能獲得數學解的微分方程中獲得相似判據，而用這些相似判據來表示現象的實驗結果。

爲了有理由將一個現象上所得的實驗數據轉移到與他相似的現象上去，在相似理論的結論中，還缺少一個重要的環節。

第一定理與第二定理是在假定現象相似是已知的基礎上導出的。二個定理確定了相似現象的性質；但是它們沒有指出，決定任何二個相互對應現象是否相似的方法。因之，就發生了這樣的問題，即是根據什麼樣的特徵才可以判定現象是互相相似的。

相似第三定理給出了這個解答。

第三定理確定了現象成爲相似必要的和充分的條件。這定理是由 M. B. 基爾皮契夫 (Кирпичев) 及 A. A. 古赫曼 (Гухман）所提出；而它的證明則是 M. B. 基爾皮契夫於 1930 年所完成的[8]。

個別的現象，係在服從於同一個關係方程的現象羣中，加上了單值條件（условие однозначности 或 условие моновалентности）而分出的。在相似現象中，包含在單值條件中的物理量、單值量（моновалент）顯然應當是相似的。更進而按照第一定理，實際存在的相似現象必須具有相同的判據，在其中也包括了由單值量所組成的判據。

第三定理證明了上述二個特徵對認爲現象相似是充分的條件，是有理論根據的。

上面所作的歷史概述，說明了關於相似的學說，首先是研究相似現象的性質，逐漸形成了關於物理實驗處理方法的學說。實驗家對本身提出了下列的問題：在實驗中應該測量哪些量，應當如何處理實驗的結果，以及它們可以推廣到怎麼樣的現象上去。

相似理論對所有這三個問題給出了解答。

應當測量包含在相似判據中的所有的量。應當以相似判據間關係的形式來處理實驗結果，以便可以推廣到所有相似的現象上去。

而它們是否相似，可由單值量的相似與單值量判據的相同知道。

相似理論於實驗上的應用在兩個方向上發展。

一方面，相似理論貫澈在物理學中，而成爲物理實驗的科學基礎。另一方面，它在工程上得到了應用，開闢了以模型研究各

種不同工程設備的可能性。

在這二個方向間，不可能劃分顯明的界限。因爲在物理上的實驗，常常建立於在工程設備各部分中進行的過程上面；同時模型也同樣地可以不僅僅是包括整個的工程實物，而也可以包括了它的個別部分。這樣，相似理論就變成了同時是物理實驗的，也是工程實驗的科學基礎。

由第三定理規定的全部相似條件的實現，常常是很困難的。

因之，在蘇聯研究出的不是十分精確的，而是近似的模型學的方法，大大促進了模型學的發展。這種方法不是保持所有的相似條件，而是在模型中獲得在實際上具有足夠準確性的近似的相似。

米赫耶夫（M. A. Михеев）以及許多其他的蘇聯學者，用實驗在很廣的範圍內檢驗了近似模型学的方法❶[9]。

有時研究者會遇到這樣複雜而未曾被研究過的現象，以致不能用數學式子表示出來，也不能寫成物理量間的關係方程。在可以確定哪一些物理量必須包括在關係方程中的情况下，Ж. 別爾特藍提出了可以由關於物理方程的各項量綱着眼，擬出相似判據的形式，並且擇定他們的經驗方程。這種方法不大可靠，而且應當祇在不能導出關係方程時才去應用它。

因爲關於量綱的學說是物理方程的基礎；所以我們就從它開始，來說明相似的學說。

---

❶ 關於相似的學說的發展，以及蘇聯參加研究的學者。可參閱 Известия АН СССР. ОТН, №. 11. 1952 г。

第二章 量綱理論

在物理學中，爲了要使物理方程成爲最簡單的形式，採用前一世紀初 К. Ф. 高斯（Гаусс）所提出的所謂絕對單位系統[17]。在採用這種單位系統時，各種測量單位的選擇以一定的關係相聯繫。

這種絕對單位系統，在物理量的定義上引入了關於量綱的新概念。在上面二句話中，就提示了關於量的量綱學說的內容。

測量任何一個量，就是將它與選作爲測量單位的同類量相比；且用數字來表示比較它們所得的比例。

當測量單位改變時，這數字也就改變。因此，用數字表示任何一個量時，就必須寫出用來測量它的單位。這樣的數字叫做名數。

在轉換測量單位時，很易看出，可以將測量單位的符號因子加到名數上去，來確定表示物理量大小的數字變化之規則。這符號因子常置於方括弧中。在轉換爲新的測量單位時，必須同時以新單位表示舊單位之數字關係替代到括弧中去。

例如，5 米寫成 5 [м]。轉換爲長度單位“厘米”時，則可將 1м = 100 см 代入：

$$5\,[\text{M}] = 5\,[100\ \text{CM}] = 500\,[\text{CM}].$$

爲了測量單位在所有的情況下都相同，它的標本爲國際協定所規定，並且保存在國家度量衡檢定局；特別稱之爲“測量單

位標準"(эталон)。

被測量之量的種類,稱爲它的量綱。

在上面所引的例子中,符號因子[м]有算術的意義,並且用來決定量的數字。但是也可以認爲它有代數的意義,而用作爲決定量的量綱。在上給情況下,這樣的量綱是長度,它爲符號$[L]$所決定。

高斯(絕對的)測量單位系統說明如下:自然界的現象是各種不同過程的進行,這些過程的特徵是由各種量的變化所表示出來的。而這些量可以是互不相關,或者相反地是相互處在自然規律所表示的一定不變的關係之中。

在數學上,用這些量相互間聯系的方程來表示他們間關係的這種永恆性。例如,所有物體的運動服從於力學的定律,其中牛頓第二定律,確定了作用於物體上的力$\vec{f}$、物體的質量m和由力傳遞給物體的加速度$\vec{a}$之間的比例關係:

$$\vec{f}=Am\vec{a};$$

這裏A爲比例乘數。

依對f、m與a各量之測量單位不同的選擇,比例乘數A每一次可以得到另一個數值。

絕對單位系統規定了單位選擇的法則,以使A常等於1:

$$\vec{f}=m\vec{a}. \tag{1}$$

爲了遵守這個條件,在等式(1)中,兩個量的測量單位可以任意選擇;但若是他們已經擇定後,則對第三個量,測量單位就不能任意選擇。它爲$A=1$的條件限制着;換句話說:爲了$m=1$和$a=1$,就必須$f=1$。這就是說,力的測量單位要服從

規則:

$$[f]=[m][a]. \tag{2}$$

這就規定了第一單位,或者稱做基本單位,它的選擇是任意的;而第二單位,或者稱做導出單位,它的大小爲等式(2)所決定。這個等式且確定了用基本量量綱表示導出量量綱的表示式。

這樣,f 的量綱就等於方程(1)右邊部分各量綜合的量綱。由此可見,方程(1)所有的項具有同一的量綱。這個規則早經爲傅里葉(J. Fourier)所發現[11]。

高斯單位系統的基本性質,是要提出的單位系統必須滿足這樣一個條件,即是當轉換測量單位時方程保持不變。

這個條件,對用基本量 a 表示導出量 b 之方程的形式,給以一定的限制。

爲了說明這個,今轉換在方程(1)中的基本力學單位系統爲新的測量單位。

令測量單位 m 變爲比原來單位小 c_m 倍,單位 a 比原來小 c_a 倍。從而決定導出量 f 的大小如何變化。

按照前述的轉換法則,在方程(2′)中,以 $c_m m'$ 代 m',以 $c_a a'$ 代 a',以 $c_f f'$ 代 f',則为

$$c_f[f']=c_m c_a[m'][a']. \tag{2'}$$

因比例係數仍應爲 1,故

$$c_f=c_m c_a$$

在此可見,由於方程左邊及右邊的乘數 c 成爲同一形式而後相互約去,因之方程(1)當轉換時仍保持不變。

很易相信；只有數量間成爲指數關係的形式，才能具有這樣的性質，例如：

$$b=k\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_m^{\alpha_m},\tag{3}$$

式中 $k, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 爲無名數。

事實上在這種情况下，以 $c_i a_i$ 替代 a，一定會使所有的乘數 c 括成一個因子，而在這因子上乘以原來的表示式

$$c_b b=k(c_1^{\alpha_1}\cdots c_m^{\alpha_m})a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m},\tag{3'}$$

由此則 $c_b=c_1^{\alpha_1}\cdots c_m^{\alpha_m}$。

具有這種性質的函數叫做“相似函數”(同族函數)[подобнородный(гомогенный)]。

除指數單項式外，同一量綱的指數綜合數羣之和也具有同族的性質。這就是說，由數字 c 組成的因子，可以從它的總和中括出成共同乘數的形式。例如，在固體熱傳導傅里葉方程中，右邊部分各項的和就是這樣：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right).\tag{4}$$

顯然，爲了這個規則的實現，超越函數必須具有無量綱數的變元，例如：

$$\frac{b}{a_1^{\alpha_1},\cdots,a_m^{\alpha_m}}.$$

在其中，分子 b 的量綱等於分母 $a_1^{\alpha_1},\cdots,a_m^{\alpha_m}$ 的量綱。今以 $c_b b$, $c_1 a_1$, … 等量替代 b, a_1, a_2 等，則得變元表示式

$$\frac{c_b}{c_1^{\alpha_1}\cdots c_m^{\alpha_m}}\cdot\frac{b}{a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m}}.$$

超越函數僅僅當因子

$$C=\frac{c_b}{c_1^{\alpha_1}\cdots c_m^{\alpha m}}=1 \tag{5}$$

時保持不變。

在同族的這種情況下，當因子 $c=1$ 時，函數稱爲齊次的[однородный(моногенный)]，而決定它的齊次性的等式(5)，就是函數齊次的條件。

當(5)式存在時，函數有條件地成爲齊次。假如 $c=1$ 的條件爲自然地獲得，且沒有必要有說明齊次的等式時，則函數就無條件地成爲齊次。

上述後者的情況，就發生於無量綱函數爲同類量的比例時，例如速度比 w_1/w_2。在這情况下，當在其比例中以 $c_w w_1$ 與 $c_w w_2$ 替代 w_1 及 w_2 時，其乘數 c_w 自動地約去，且條件(5)沒有必要，這時函數就無條件地成爲齊次。

這樣，只有當自然的定律用同族函數的方程表示時，或者同樣的，當這些方程爲齊次時，絕對單位系統才可以應用。這樣的方程稱爲完全方程。

由於用高斯單位系統，當轉換測量單位時，任何同類量的比例保持不變；因爲在這種轉換中，分子、分母中都出現了轉換爲新單位的同一乘數，能自動地互相約去。例如，二輛以一定速度行駛着的汽車，無論我們以每秒鐘的米數或每小時的公里數來測量他們的速度，他們速度間的比例總保持一樣。對工程熱力學方程式中的熱量和內能，他們的測量單位是不當作以絕對單位系統(厘米、克、秒)來表示的導來量，而是選作爲獨立的單位——卡。

更而，在敍述相似理論時，需要決定描述現象之方程中各個項的量綱。而且不應丟去由於脫離絕對單位系統而出現的係數；因爲沒有這些係數，則量的量綱就會弄錯。

熱力學第一定律，於工程單位系統中寫作：

$$Q=\Delta U+AL.$$

因爲在其中 Q 與 U 以千卡來測量，而功 L 用千克-米來測量，則 A 的量綱爲千卡/千克・米，其所有三項就得到同一個量綱（千卡）。這樣，用單位系統寫成的物理方程，其齊次性的規則，不僅僅關係於絕對單位系統，而且可以推廣到任何單位系統上去。

這就是所謂傅里葉規則，可以表述如下：

“以單位系統表示的物理方程，當轉換測量單位時，不改變其形式”。

齊次方程還具有一個重要的性質：

所有的齊次方程，可以表示爲無量綱指數綜合數羣間的關係形式，這些綜合數羣係由方程中包含的各量所組成。

按上所述，所有的物理現象，可以用齊次方程來表示。

令這種方程爲

$$\varphi(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_k)=0, \tag{6}$$

式中用 $a_1,\cdots,a_m$ 表示基本量，而 $b_1,\cdots,b_k$ 爲任何單位系統的導出量。而且其中某些量可以是常數，即所謂有名的係數。在方程 (4) 中的係數 a 就可以是這樣的係數。

這樣，在方程 (6) 中，就需要列出所有的名數。

首先研究最普遍的情況，即是當方程 (6) 由同一量綱的指

數綜合數羣之和所組成的情况。

將方程的所有各項除以其中的任何一項，那末所有各項就都成爲無量綱了。

$$\sum\left(kb_1^{\beta_1}\cdot b_2^{\beta_2}\cdots a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m}\right)+1=0, \tag{7}$$

式中

$$kb_1^{\beta_1}\cdot b_2^{\beta_2}\cdots a_1^{\alpha_1}\cdots a_m^{\alpha_m} \tag{8}$$

表示該總和中這些無量綱項中的一項。在這項中，一般說來並不包含方程 (7) 中包含之所有的量，而只含有這些量 b_1, b_2, * $a_1, a_2\cdots$ 中的某幾個。

這裏 $k, \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \cdots \alpha_m$ 表示無名數（無量綱），而 $b_1, b_2, a_1\cdots$ 表示有量綱的名數。

按照方程 (7) 所選的單位系統，導出量的量綱可用符號等式表之如下：

$$[b_1]=[a_1^{\gamma_1}\cdots a_m^{\gamma_m}],$$
$$[b_2]=[a_1^{\delta_1}\cdots a_m^{\delta_m}]; \tag{9}$$

而且其中某些指數 $\gamma, \delta\cdots$，可以爲零。

等式 (9) 指出，假如量 b_1, b_2 爲指數綜合數羣 $a_1^{\gamma_1}\cdots a_m^{\gamma_m}$, $a_1^{\delta_1}, \cdots, a_m^{\delta_m}$ 所除，則得到的商爲無量綱數。

對總和中被研究的一項 (8) 進行這樣的除法；並且爲了使它的數值不變，同時乘以同樣的綜合數羣。則得：

$$k\left\{\frac{b_1}{a_1^{\gamma_1}\cdots a_m^{\gamma_m}}\right\}^{\beta_1}\left\{\frac{b_2{}^{**}}{a_1^{\delta_1}\cdots a_m^{\delta_m}}\right\}^{\beta_2} a_1^{\xi_1}\cdots a_m^{\xi_m}, \tag{10}$$

* 爲了推演的簡化，只用其中二個導出量—b_1 和 b_2。當然，很容易將結論推廣到他的任何個數上去。

** 此處 b_2 在原書中爲 b_m—譯者註。