

普通高等教育
兵工类规划教材

机械工程测试技术

周生国 主编

北京理工大学出版社



机械工程测试技术

周生国 李世义 裴思行 赵朝兰 编

北京理工大学出版社

(京)新登字149号

内 容 简 介

本书比较系统、全面地介绍机械工程测试技术中的三大部分内容。基础知识部分包括信号特性分析,测试系统的基本特性,误差理论与数据处理;测试系统部分包括各种传感器原理与测量电路,电测记录仪,光测技术和测试系统设计;参数测试部分包括压力、力和应力,位移、速度和加速度,温度等参数的测试技术,以及微型计算机在测试技术中的应用。

本书可作为兵工专业和普通机械工程类专业的测试技术教材,也可供从事测试技术工作的人员学习和参考。

机械工程测试技术

周生国 主编

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

787×1092毫米 16开本 24.25印张 601千字

1993年3月第一版 1993年3月第一次印刷

ISBN 7-81013-640-2/TH·59

印数: 1—8000册 定价: 6.60元

前 言

本书是根据1989年3月召开的兵器测试技术教材编审组第三次会议讨论通过的大纲编写的教材。

根据编审组会议精神,本教材可作为兵工院校各专业(不包含测试技术专业)讲授测试技术课的一本通用基础教材,根据各专业的特点,可自行选用有关章节,并增加专业测试部分内容。

考虑到兵工院校学员工作面的拓宽,本教材的内容不局限于兵工范围,更着重它的通用性,只是在内容的安排上,适当照顾兵器测试的某些特点和待测的参数。

全书分三大部分,共十二章,第一部分是测试技术基础知识,包括第一、二、三章,信号特性分析,测量系统的静动态特性,误差理论与数据处理;第二部分是测试系统,包括第四、五、六、七章,传感器原理与测量电路,电测记录仪,光测技术,测试系统设计;第三部分是参数测试技术,包括第八、九、十、十一、十二章,压力、力和应力,位移、速度和加速度,温度测试技术,以及微型计算机在测试技术中的应用。

本书由北京理工大学周生国任主编,并编写绪论、第二、三、四、九、十一章;北京理工大学李世义编写第七、十章;太原机械学院裴思行编写第五、六、八章;西安工业学院赵朝兰编写第一、十二章。

本书由兵器测试技术教材编审组成员、华东工学院柴慈钧同志任责任编委,华东工学院焦化南同志负责主审,兵工教材编审室宋筱平同志负责编审。

本书在编写和出版过程中,得到了机电部兵器教材编审室领导和有关同志的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢,同时还感谢主审、编审、责任编委、出版社编辑等同志们的辛勤工作和帮助。

由于编者水平有限,书中错误和不妥之处,恳请各位专家、读者批评指正。

编 者

1991年6月于北京

目 录

绪论.....	(1)
第一章 信号及其特性分析.....	(4)
§ 1-1 概述	(4)
§ 1-2 周期信号	(6)
§ 1-3 非周期信号	(12)
§ 1-4 随机信号	(24)
§ 1-5 快速傅里叶变换	(37)
习题.....	(43)
参考文献.....	(44)
第二章 测量系统的基本特性.....	(45)
§ 2-1 概述	(45)
§ 2-2 测量系统的静态特性	(45)
§ 2-3 测量系统的动态特性	(47)
习题.....	(55)
参考文献.....	(55)
第三章 测量误差与数据处理.....	(56)
§ 3-1 测量误差的基本概念	(56)
§ 3-2 随机误差理论	(56)
§ 3-3 标准偏差的计算方法	(62)
§ 3-4 间接测量误差的传递	(68)
§ 3-5 系统误差	(72)
§ 3-6 误差的合成	(79)
§ 3-7 测量数据处理方法	(83)
§ 3-8 一元线性与非线性回归	(85)
习题.....	(92)
参考文献.....	(93)
第四章 传感器原理与测量电路.....	(94)
§ 4-1 传感器的分类	(94)
§ 4-2 电位器式传感器	(94)
§ 4-3 电阻应变式传感器	(98)
§ 4-4 电感式传感器	(111)
§ 4-5 电容式传感器	(119)
§ 4-6 压电式传感器	(126)
§ 4-7 压阻式传感器	(132)
§ 4-8 霍尔式传感器	(137)
§ 4-9 光纤传感器	(143)
§ 4-10 传感器静态特性指标的计算方法.....	(148)

习题	(154)
参考文献	(154)
第五章 记录仪器	(155)
§ 5-1 概述	(155)
§ 5-2 笔式记录仪	(155)
§ 5-3 光线示波器	(156)
§ 5-4 磁带记录仪	(162)
§ 5-5 瞬态记录仪	(165)
§ 5-6 时间间隔记录仪——电子记时仪	(170)
习题	(172)
参考文献	(172)
第六章 光测技术——高速摄影	(173)
§ 6-1 概述	(173)
§ 6-2 光学补偿式高速摄影	(174)
§ 6-3 转镜式高速摄影	(178)
§ 6-4 脉冲X射线高速摄影	(181)
§ 6-5 兵器测试中的高速摄影	(187)
习题	(189)
参考文献	(189)
第七章 测试系统设计	(190)
§ 7-1 系统设计的主要问题	(190)
§ 7-2 传感器的选用原则	(192)
§ 7-3 系统中的干扰电压及其抑制	(194)
§ 7-4 外来电磁干扰及其抑制	(205)
§ 7-5 接地噪声及其消除方法	(215)
§ 7-6 测量系统设计举例	(219)
习题	(224)
参考文献	(225)
第八章 压力测量	(226)
§ 8-1 压力测量概述	(226)
§ 8-2 常用测压传感器	(228)
§ 8-3 压力传感器的动态校准	(234)
§ 8-4 动态压力测量的管道效应	(239)
习题	(240)
参考文献	(240)
第九章 力和应力测量	(241)
§ 9-1 力值传递标准	(241)
§ 9-2 力值测量	(248)
§ 9-3 应力与应变测量	(264)
习题	(268)
参考文献	(268)
第十章 位移、速度、加速度测量	(269)
§ 10-1 概述	(269)

§ 10-2 位移测量	(269)
§ 10-3 速度测量	(278)
§ 10-4 加速度测量	(286)
习题	(299)
参考文献	(299)
第十一章 温度测量	(300)
§ 11-1 概述	(300)
§ 11-2 热电偶	(304)
§ 11-3 电阻温度计	(328)
§ 11-4 辐射式温度计	(331)
习题	(339)
参考文献	(339)
第十二章 微型计算机在测试技术中的应用	(340)
§ 12-1 概述	(340)
§ 12-2 数据采集系统	(341)
§ 12-3 模/数 (A/D) 和数/模 (D/A) 转换	(346)
§ 12-4 微型计算机在测试技术中的应用举例	(355)
参考文献	(357)
附录1 铂铑10—铂热电偶分度表	(358)
附录2 铂铑30—铂铑6热电偶分度表	(362)
附录3 镍铬—镍硅 (镍铬—镍铝) 热电偶分度表	(369)
附录4 铜—康铜热电偶分度表	(370)
附录5 镍铬—康铜热电偶分度表	(372)
附录6 铂铑13—铂热电偶分度简表	(374)
附录7 铁—康铜热电偶分度简表	(374)
附录8 铂热电阻分度表 ($R_0 = 46\Omega$)	(375)
附录9 铂热电阻分度表 ($R_0 = 100\Omega$)	(377)
附录10 铜热电阻分度表 ($R_0 = 50\Omega$)	(379)
附录11 铜热电阻分度表 ($R_0 = 100\Omega$)	(379)

绪 论

一、测试技术在国民经济和兵器发展中的地位和作用

科学技术和生产的发展都离不开测试，任何科学理论的建立都要通过大量的试验与测量，对获取的数据进行分析来验证理论的正确性和可靠性。生产向机械化、自动化发展，必须生产过程中通过各种参数的测量、分析，进行控制和监视，才能保证产品的质量和生产的效率。

测试技术的发展促进了科学技术水平的不断提高，推动了生产的自动化进程。而科学技术水平的提高，又为测试技术的创新、完善和发展创造了条件。

兵器技术的发展更离不开测试技术，或者说，测试技术是兵器发展的基础和前提。

任何一种兵器从设计到定型装备部队，都要经过若干环节的试验，从零部件试验到总体试验，从地面静止试验到飞行打靶试验，从缩比试验到全尺寸试验，从模拟试验到实战试验。只有经过严格的科学试验，最终测量得到的各项性能指标达到战术技术要求，才能装备部队投入使用。

常规兵器的发展，研制周期的长短，投入资金的多少，武器性能的优劣，在很大程度上取决于测试技术水平的高低，以及测试手段是否完善。

例如，在发射炮弹的一瞬间，就需要采用多种测试方法来测量各种参数，诸如膛压的变化过程、弹底压力、弹后压力波、身管压力分布、弹丸在膛线的挤进过程、弹丸在膛内运动的速度、膛内燃气温度及身管温度分布、炮口激波压力、发射瞬间的轴向加速度、炮身的振动和反作用力等。炮弹离开炮口能否准确射向目标和摧毁目标，也要在试验中跟踪测试，包括中间弹道测试、外弹道测试和终点弹道测试。在发展1000MPa高膛压火炮时，必须解决相适应的高压传感器和高压动态标定装置，没有新的测试手段和设备，要想达到目的是不可能的。

再如固体火箭发动机，作为火箭与导弹的动力装置，其性能参数的优劣直接影响到火箭与导弹的总体性能指标，在研制发动机的过程中，需进行大量的地面试车台静止试验，测量发动机内弹道参数（主要是压力、温度、速度）和推力大小，以及发动机壳体温度分布和强度。对单室双推力发动机试验，还要解决推力与压力的双量程测试问题。

为了提高无控火箭射击密集度，有赖于对火箭发射架起始扰动的测试与分析，需要测试火箭发动机燃气流扰动力对发射架的影响和发射架振动对密集度的影响。

任何兵器的研制过程，只有通过用各种先进的测试手段进行严格和准确的测试，为改进和优化设计提供多种数据依据，才能缩短研制周期，减少研制费用，提高战技指标。

二、测试系统的组成

这里所说的测试系统是指对非电量的电测系统，该测试系统方框图如图0-1所示。

测试系统的第一个环节是传感器，又称变换器或转换器，它的作用是将被测非电量转换

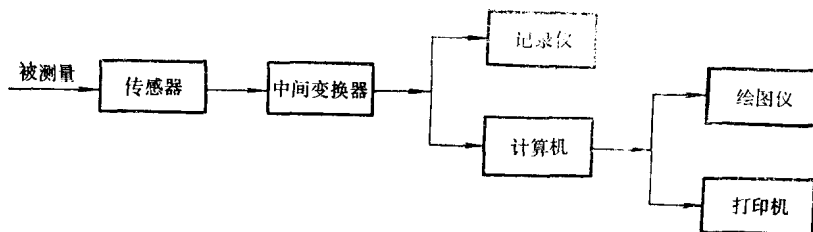


图0-1 测量系统方框图

成为电量。传感器种类繁多（将在第四章详述），要根据被测参数性质的不同来相应选择。

测量系统的第二个环节是中间变换器，它包括传感器的测量电路和传感器输出电量再次进行电量到电量的变换或放大电路部分。如电阻应变式传感器，被测量使传感器直接变化的是粘贴在传感器弹性元件上的应变片的电阻变化，中间变换器通过测量电桥电路及放大电路等，把该电阻量变化变换为电压量输出。再如电感、电容、压电传感器，被测量使传感器直接变化的是电感量、电容量和电荷量，然后经过中间变换器相应的测量电路和放大电路，获得足够量值的电压或电流输出。中间变换器还起阻抗变换的作用，如压电传感器是高输出阻抗，经过中间变换器后，具有低阻抗输出，这样才能与某些记录仪相匹配。

测试系统的第三个环节是记录仪，记录仪是把经过中间变换后反映被测量变化过程的电压或电流量以适当的方式记录下来。根据记录原理的不同，有模拟式记录仪和数字式记录仪，常用的模拟式记录仪有笔式记录仪、光线记录仪和模拟磁带记录仪，数字式记录仪有数字磁带记录仪、瞬态波形记录仪和存贮示波器等。

目前，测试系统正逐步推广采用微型计算机进行数据采集与分析处理，并将处理结果打印成各种数据表格和绘制成各种图形。这样可大大提高测量数据处理的速度和精度。

三、现代测试技术的发展动向

1. 量程范围更加宽广

在火炮膛压测试技术中，对常规火炮膛压小于600MPa的测试，采用铜柱（或铜球）测压器或压电传感器均可满足要求。为提高火炮射程和射击精度，在高膛压火炮的研究中，膛压可达到800~1000MPa，甚至1000MPa以上（三代坦克炮），并伴随着 $10^5 \times 9.8 \text{ m/s}^2$ 的高冲击加速度，这就促使膛压测试技术要相应的发展，研制测压范围更宽的压力传感器，以及配套的压力动态标定装置。而且，研制的测压传感器和测温传感器要能在高冲击加速度下稳定工作。

2. 传感器向新型、微型、智能型发展

随着科学技术和工业自动化的发展，对测试技术提出了更高更新的要求，首先要根据被测参数的特性开发相适应的传感器，除前面提到的高膛压传感器和高加速度传感器外，对目前发展的大推力比单室双推力固体火箭发动机，要解决量值差别较大（10:1以上）的双量程推力传感器和双量程压力传感器问题。甚至在某些兵器的测试中提出双参数传感器问题，即用一个传感器同时测量两个不同的参数，如同时测量压力和温度、力和位移、压力和速度等。另外，在研究火箭发动机推力偏心和枪、炮后座力方面，需开发多分力传感器来测量多个方向的作用力。多分力传感器在研究切削加工中刀具受力状态和人体运动机能方面都有广阔的

应用前景。

在机器人工程的发展中，需要研制灵敏度高的新型视觉、触觉、听觉、嗅觉传感器等。

在一般的测量中，对传感器的外型尺寸及重量没有特殊的要求。但在航空、宇航、生物医学工程中就要求使用的传感器尺寸要尽量小、重量要尽量轻。如苏联目前最大的运载火箭——能源号运载火箭的指挥控制系统就由几千个传感器组成，如果传感器不实现小型化或微型化，它是不可能应用的。在医学领域用于探测人体内部功能的传感器必须是微型传感器。

目前，个别传感器已向智能化方向发展。如火炮膛内压力测量，过去一直沿用放入式铜柱测压器（俗称测压蛋），现在已开发一种电子测压蛋，它是集压力转换、信号放大、数据采集与贮存于一体，组成一个智能型传感器。再如美国航天技术中的微电子技术医疗领域中应用的“温度药丸”，它包括石英晶体温度敏感器，微型电池和遥测系统，1.9cm长的温度药丸可插入或咽入人体消化系统中，可把三天内身体中心部位的体温数据发送到一个外部接收机。

3. 测量仪器向高精度和多功能发展

测量仪器及整个测量系统精度的提高，使测得数据的可信度也相应提高。在产品研制过程中要进行大量试验，测量某些性能参数，然后对所测数据进行统计分析。在相同条件下要试验若干次，所测参数才具有一定的可信度。试验次数的多少与测试仪器的精度有关。仪器精度的提高，可减少试验次数，从而缩短研制周期，减少试验经费，降低产品成本。

在提高测量仪器精度的同时应扩大仪器的功能。目前采用的测试系统是由多台仪器与计算机所组成，在使用中需对每台仪器进行调试，既不方便又容易出错。近几年来，国外出现一种卡式仪表（Instrument-on-a-Card），它是把诸如放大器、示波器、瞬态记录仪等全缩小成一块一块的卡片（像一本书那样大），插在带格子的框架内，各卡片通过多端连接头与计算机的母线相连，不仅可使各仪器的电源、旋钮、表头、显示屏大大简化（共用一个卡片），而且可通过计算机的键盘来操作各卡片（仪器）的功能，并按预定程序来控制复杂的测试系统。

4. 参数测量与数据处理向自动化发展

一个产品的大型、综合性试验，准备时间长，待测的参数多，少则几十，多则几百个数据通道，光靠人工去检查一遍，就要耗费很长时间。众多的数据依靠手工去处理，不仅精度低，周期也太长。现代测试技术的发展，是采用以计算机为核心的多通道自动测试系统，该系统能实现自动校准、自动修正，故障诊断，信号调制，多路采集，自动分析、处理，并打印与绘图。这些功能是通过计算机预定的程序来控制 and 完成的。

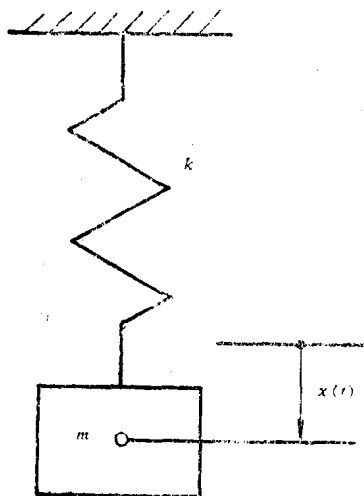
实现多参数的自动测量与处理，可大大提高测量精度，缩短试验周期，加速产品的更新与开发。

第一章 信号及其特性分析

§1-1 概 述

在生产实践和科学实验中，人们往往通过各种传感器把被研究的物理量转换成相应的电信号，使之便于测量、分析和处理。这个信号包含着所要研究的物理过程的有关信息。信号是信息的载体，是人们认识物理过程的内在规律，研究各个物理量之间的相互关系和预测未来发展的重要依据。

信号按其运动规律可分为确定性信号和非确定性信号(随机信号)两大类。确定性信号随时间的变化有一定规律，其相互关系可以用数学关系式或图表明确地表示出来。例如，集中参数的单自由度振动系统(图1-1)，作无阻尼自由振动时，其位移 $x(t)$ 就是确定性的，并可用数学表达式来描述振动质量的瞬时精确位置，即



$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right) \quad (1-1)$$

式中 x_0 ——初始幅值;
 φ_0 ——初始相位角;
 k ——弹簧刚度;
 m ——质量;
 t ——时间。

非确定性信号具有随机特点，它随着时间的变化不呈现出确定的规律，即无法用数学关系式或图表来描述其关系，更不能预测未来任何瞬时的精确值，只能用概率、统计方法由过去估计未来。如火车、汽车运行时的振动等。

确定性信号可进一步分为周期信号和非周期信号。而非周期信号又可分为准周期信号和瞬变信号。非确定性信号可分为平稳随机信号和非平稳随机信号。信号的分类如图1-2所示。

各种信号在数学表达式中，可以表示为一个或几个独立变量的函数。其独立变量可以是连续的，也可能是离散的。根据作为独立变量的时间取值是连续的还是离散的，又可把信号分为连续时间信号和离散时间信号(图1-3)。连续时间信号的幅值可以是连续的(如振动加速度随时间变化)，也可以是离散的(如人口随时间变化的信号)。时间和幅值均为连续的信号一般称之为模拟信号。离散时间信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。时间和幅值均为离散的信号称之为数字信号。

人们直接测试或记录的信号一般是随时间变化的物理量，称之为信号的时间域描述。这种以时间作为独立变量的描述方法只能反映信号的幅值随时间变化的特征。为了得到更多的信息，可以运用傅里叶级数或傅里叶变换，将时间域信号变换成频率域信号，即以频率作为独立变量建立信号与频率的函数关系，这种描述称之为频域描述。频域描述的结果是以频率

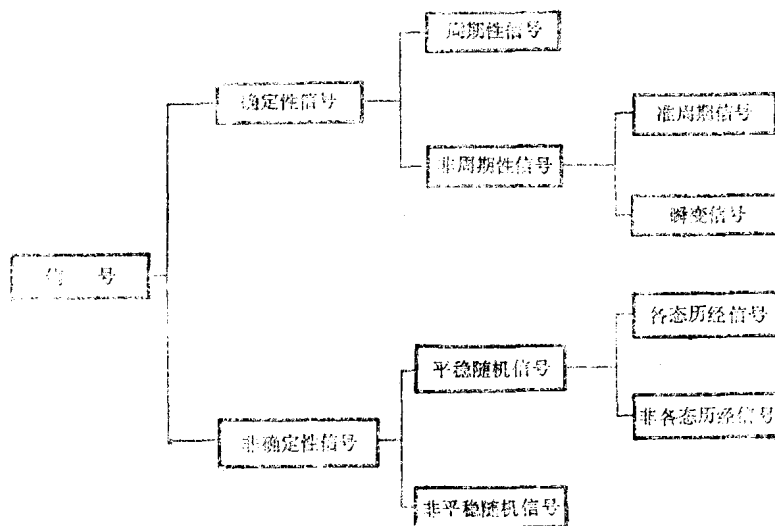


图1-2 信号的分类

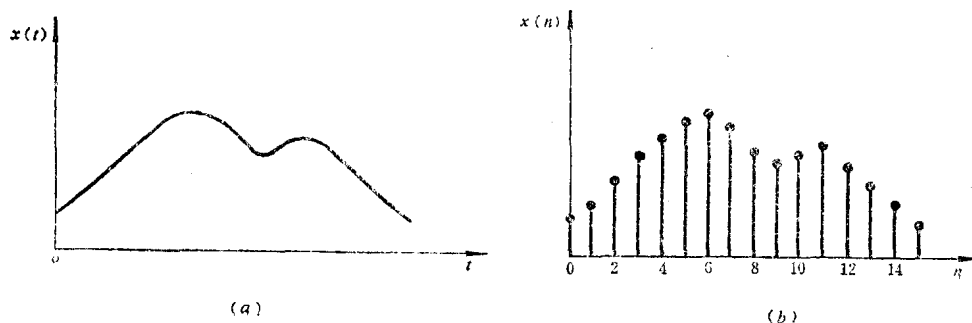


图1-3 连续信号与离散信号
(a) 连续时间信号 (b) 离散时间信号

为坐标的各种物理量的谱线和曲线，由此可得到各种幅值以频率为独立变量的频谱函数。通过频域描述可求得幅值谱、相位谱、功率谱和各种谱密度，等等。总之频域描述和时域描述是对信号的两个观察面。时域描述信号比较形象和直观；频域描述信号更为简练，分析问题更加深刻和方便。显然信号的两种描述是人们观察信号的角度不同，但二者之间存在着——对应、相辅相成、缺一不可的关系。

信号的时域描述与频域描述，即信号的波形分析、频谱分析及数据处理已成为现代科学技术领域的一个分支。它已广泛应用在各个科学技术领域之中。例如，从月球探测器发来的电视信号可能被淹没在噪声中，而当经过信号处理之后，就可以在地球上得到清晰的图象。又如石油勘探、地震测量，以及核试验监测中心，等等，都需要用到信号分析和信号处理技术，因此，这一测试技术的应用范围是很广的。

§1-2 周期信号

周期信号 $x(t)$ 是一种周期性重复出现的信号,它满足下列关系式:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1-2)$$

式中 n ——任意整数($n=1, 2, 3, \dots$);

T ——周期。

$T = 2\pi/\omega_0, f_0 = 1/T$ 。 ω_0 是圆频率或角频率。 f_0 为频率,单位是赫兹(Hz)。

在机械、仪器仪表及兵器测试中常常遇到许多周期信号,其中最简单的周期信号是正弦信号。它的表达式为

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

或

$$x(t) = x_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (1-3)$$

式中 x_0 ——初始幅值;

φ_0 ——初始相位角。

简单的正弦信号如图1-4所示。

一、傅里叶级数和周期信号的分解

1. 傅里叶三角级数展开式

根据傅里叶级数理论,在有限区间上,任意周期函数 $x(t)$ 只要满足狄里赫利条件(Dirichlet),即函数 $x(t)$ 在周期 T 区间上连续或只有有限个第一类间断点,并只有有限个极值点

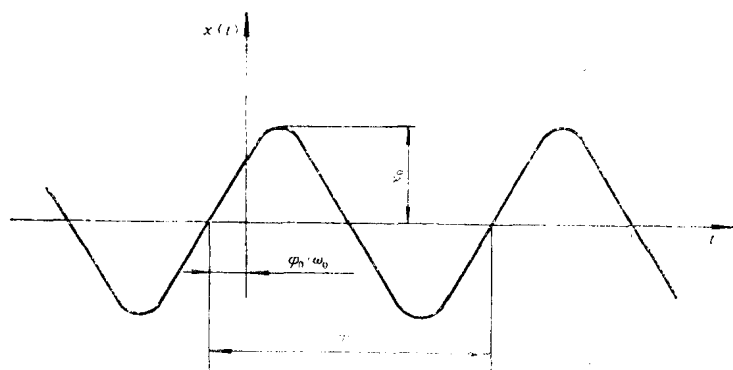


图1-4 正弦信号

且收敛,那么函数 $x(t)$ 就可以展成傅里叶级数。傅里叶三角级数展开式为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1-4)$$

式中 ω_0 ——基波角频率, $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$;

$n=1, 2, 3, \dots$;

a_0 ——常值分量;

a_n ——余弦分量;

b_n ——正弦分量。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-7)$$

令 $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$, 将其代入 (1-4) 式得

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1-8)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1-9)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \text{ 或 } \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (1-10)$$

式 (1-4) 表明, 任何周期信号若能满足狄里赫利条件, 就可以分解成一个平均值 a_0 和无限多个成谐波关系的正弦成分。由于 n 是整数序列, 相邻频率的间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$, 这些谐波各频率成分都是 ω_0 的整数倍, 因而谱线是离散的。把几次倍频成分 $A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$ 称为几次谐波。当 $n=1$ 时的谐波称为基波, 角频率 ω_0 称为基频。以角频率 ω ($\omega = \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$) 作为独立变量, 可分别画出幅值 A_n 与角频率 ω 的关系曲线和相位 φ_n 与角频率 ω 的关系曲线。 $A_n - \omega$ 曲线称为幅值频谱图; $\varphi_n - \omega$ 曲线称为相位频谱图, 二者统称频谱。通过频域描述就比较形象地反映出周期信号的频率结构及其特征。

例1 求图1-5中周期方波的傅里叶级数。

解 在 $x(t)$ 一个周期 $(-T/2, T/2)$ 中表达式为

$$x(t) = \begin{cases} -A & -T/2 \leq t \leq -T/4 \\ A & -T/4 \leq t \leq T/4 \\ -A & T/4 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

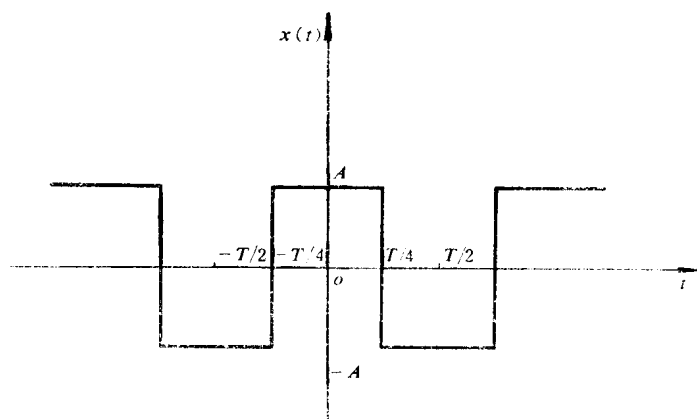


图1-5 周期方波

根据式 (1-5)、(1-6) 和 (1-7) 得

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0 \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (-A) \cos n\omega_0 t dt + 2/T \int_{-T/4}^{T/4} A \sin n\omega_0 t dt + 2/T \int_{T/4}^{T/2} (-A) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{4A}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{4A}{n\pi} (-1)^{(n-1)/2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt = 0
 \end{aligned}$$

因此
$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$

此周期方波的幅值频谱如图1-6所示。各次谐波分量的幅值分别以基波幅值 $4A/\pi$ 的 $1/n$ 规律收敛。

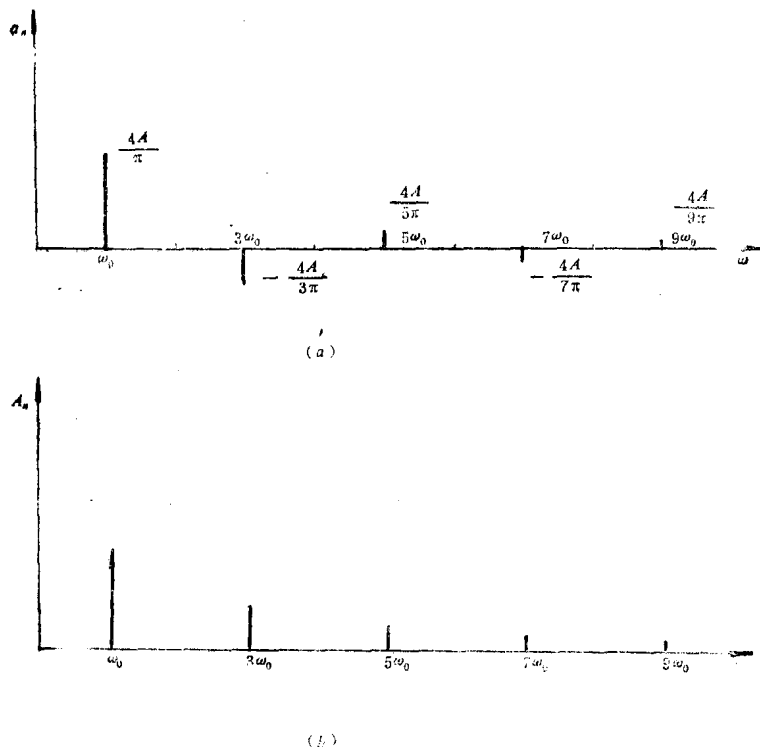


图1-6 周期方波的幅值频谱
(a) 余弦分量幅值谱 (b) 方波幅值谱

2. 傅里叶级数的复指数函数展开式

为了运算的方便, 常将傅里叶级数写成复指数形式。根据欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (1-11)$$

则
$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \quad (1-12)$$

$$\sin \omega t = j \frac{1}{2} (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \quad (1-13)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ 。

因此, 将式 (1-4) 可改写为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (a_n + j b_n) e^{-jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n - j b_n) e^{jn\omega_0 t} \right] \quad (1-14)$$

令
$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad n \geq 1 \quad (1-15)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad n \geq 1 \quad (1-16)$$

$$c_0 = a_0 \quad (1-17)$$

则
$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1-18)$$

或
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-19)$$

式 (1-18) 或 (1-19) 就是复指数形式的傅里叶级数展开式。将式 (1-6)、(1-7) 代入式 (1-15), 可得傅里叶级数的变数系数为

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1-20)$$

c_n 一般情况下是复数, 可以写成

$$c_n = c_{nR} + j c_{nI} = |c_n| e^{j\varphi_n} \quad (1-21)$$

$$|c_n| = \sqrt{c_{nR}^2 + c_{nI}^2} \quad (1-22)$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{c_{nI}}{c_{nR}} \quad (1-23)$$

用复数形式展开 $x(t)$, 就把频率范围从 $0 \sim \infty$ 扩展到 $-\infty \sim +\infty$, 但其谱线仍然是离散的, 其中系数 c_n 与 c_{-n} 互为共轭复数。

周期信号展成复指数形式的傅里叶级数可用向量形式表示, 如图 1-7 所示。其横坐标角

频率 ω 从 $-\infty \sim +\infty$ 变化, 双边幅值 $|c_n|$ 仅为单边幅值的一半, 即 $|c_n| = \frac{A}{2}$ 。

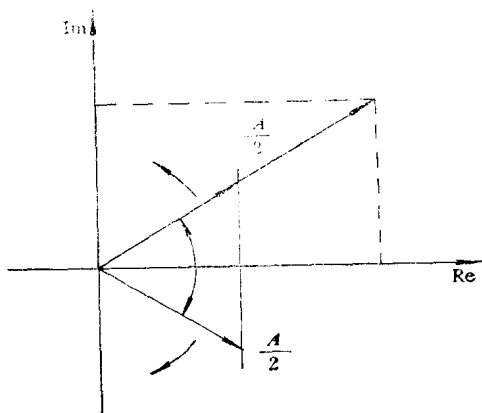


图1-7 复指数形式的向量表示

例2 试求例1周期方波的复指数形式的傅里叶级数。

解

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{求出 } c_n &= \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} (-A) e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{-T/4}^{T/4} A e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_{T/4}^{T/2} (-A) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \frac{A}{jn\omega_0} \left[e^{-jn\omega_0 \left(-\frac{T}{4}\right)} - e^{-jn\omega_0 \left(-\frac{T}{2}\right)} - e^{-jn\omega_0 \frac{T}{4}} + e^{-jn\omega_0 \left(-\frac{T}{4}\right)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-jn\omega_0 \frac{T}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{T}{4}} \right] = \frac{1}{T} \frac{A}{jn\omega_0} \left[\left(2e^{jn\frac{\pi}{2}} - 2e^{-jn\frac{\pi}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{-jn\pi} - e^{jn\pi} \right) \right] = \frac{1}{T} \frac{A}{jn\omega_0} \left[\frac{-4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{j} + \frac{2\sin(n\pi)}{j} \right] \\ &= \frac{2A}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2A}{n\pi} (-1)^{(n-1)/2} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} e^{jn\omega_0 t}$$

图1-8示出了周期方波复数幅值 $|c_n|$ 的频谱。

从上述可知, 周期信号频谱的基本特点如下:

- (1) 离散性。周期信号的频谱是由离散的谱线组成的, 每一条谱线表示一个正弦分量。
- (2) 谐波性。每条谱线只出现在基波频率的整数倍的频率上。
- (3) 收敛性。各频率分量的谱线高度与对应谐波的幅值成正比。常见的周期信号幅值总的趋势是随谐波次数的增高而减小。由于周期信号表现出收敛性, 故在实际测量中没有必要