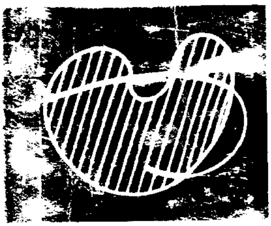
苏 步 青 著



微分几何五讲

上海科学技术出版社

微分几何五讲

苏步青

上海科学技术出版社

微 分 几 何 五 讲

苏 步 青

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 4.25　字数 104,000
1979 年 10 月第 1 版　1979 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—35,000

书号：13119·806　　定价：0.52 元

目　　录

第 1 讲

欧氏平面曲线的几个整体问题

一、等周问题

1. 等周不等式 在具有定长的一切平面单纯闭曲线 C 中，圆是最大面积的曲线．换言之，设 A 是一条长为 L 的单纯闭曲线围成的面积，那末

$$L^2-4\pi A\geqslant 0,$$

式中等号当且仅当 C 是圆时成立．

证明很多，最简单的要算 E. Schmidt 的证明(1939)．我们在这里介绍改良后的 Hurwitz 方法 (1902)，即用 Fourier 级数的方法．为此，先证

Wirtinger 引理 设 $f(t)$ 是周期 2π 的周期连续函数，而且导函数 $f'(t)$ 也连续．如果

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt=0,$$

那末
$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2dt\geqslant\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt,$$

式中等号只当 $f(t)=a\cos t+b\sin t$ 时成立．

要证这引理，把 $f(t)$ 展开为 Fourier 级数

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

因为 $f'(t)$ 是连续的，所以我们可按项导微作出 $f'(t)$ 的 Fourier 级数

$$f'(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nt-na_n\sin nt).$$

根据假设我们有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=0.$$

因此，按 Parseval 公式得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

这样，

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2dt-\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt=\pi\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2).$$

这当然$\geqslant0$，当且仅当$a_n=b_n=0(n>1)$时，即$f(t)=a_1\cos t+b_1\sin t$时才等于零. 于此证完了引理.

为了证明等周不等式 $L^2-4\pi A\geqslant0$，我们方便上假定 $L=2\pi$ $\left(\text{只须}\ \frac{2\pi}{L}s\to s\right)$ 和$\int_0^{2\pi}x_1(s)ds=0$（就是取 x_2 轴使通过曲线的重心）. 曲线的周长和面积是

$$2\pi=\int_0^{2\pi}(x_1'^2+x_2'^2)ds,$$

$$A=\int_0^{2\pi}x_1x_2'ds.$$

从此两方程得出

$$2(\pi-A)=\int_0^{2\pi}(x_1'^2-x_1^2)ds+\int_0^{2\pi}(x_1-x_2')^2ds.$$

第一积分按引理是$\geqslant0$，第二积分显然是$\geqslant0$，所以 $A\leqslant\pi$，就是等周不等式.

等号的成立是在而且只在

$$x_1=a\cos s+b\sin s,\quad x_2'=x_1$$

之时，由此可见

$$x_1=a\cos s+b\sin s,$$

$$x_2=a\sin s-b\cos s+c,$$

所以曲线是个圆.

2. Schmidt 证明　设 C 是单纯闭曲线．我们把 C 围在两平行线 g, g' 之间，使 C 和 g, g' 分别在点 P, Q 相切．设 $s=0$, s_0 是 P, Q 的参数．作一个圆 $\bar{C}$，使与 g, g' 在 $\bar{P}$, $\bar{Q}$ 分别相切．用 O 记圆心，并取它为坐标原点．设其半径为 r．令

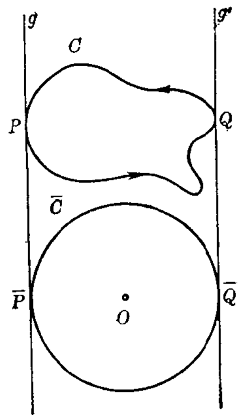


图 1.1

$$X(s)=(x_1(s),\ x_2(s))$$

为 C 上一点的位置向量，使得

$$(x_1(0),\ x_2(0))=(x_1(L),\ x_2(L)),$$

式中 L 如前表示 C 的周长．我们取 $(\bar{x}_1(s),\ \bar{x}_2(s))$ 作为 $\bar{C}$ 的位置向量，使得

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1(s)=x_1(s),\\
(1)\qquad &\bar{x}_2(s)=-\sqrt{r^2-x_1^2(s)}\quad 0\leqslant s\leqslant s_0,\\
&\bar{x}_2(s)=+\sqrt{r^2-x_1^2(s)}\quad s_0\leqslant s\leqslant L.
\end{aligned}$$

以 $\bar{A}$ 表示 $\bar{C}$ 所围成的面积．一般地，一个闭曲线所围成的面积可由线积分

$$\int_0^L x_1x_2'ds=-\int_0^L x_2x_1'ds=\frac{1}{2}\int_0^L(x_1x_2'-x_2x_1')ds$$

加以表示．应用这公式到两曲线 C 和 $\bar{C}$，我们得到

$$A=\int_0^L x_1x_2'ds,$$

$$\bar{A}=\pi r^2=-\int_0^L \bar{x}_2x_1'ds.$$

边边相加，

$$\begin{aligned}
A+\pi r^2&=\int_0^L(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')ds\\
&\leqslant\int_0^L\sqrt{(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2}\,ds\\
&\leqslant\int_0^L\sqrt{(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2)}\,ds\\
&=\int_0^L\sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}\,ds.
\end{aligned}$$

因为两正数的几何平均是≤它们的算术平均的,所以

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leqslant\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\leqslant\frac{1}{2}Lr.$$

经过两侧平方和消去 r^2, 我们因此便获得等周不等式.

现在假定等周不等式中的等号成立. 那末, A 和 πr^2 必有一样的几何平均和算术平均, 于是 $A=\pi r^2$ 和 $L=2\pi r$. 由于平行线 g, g' 的方向任意, 所以这意味着 C 在所有方向有同一"幅" $2r$. 此外,在上列一切不等式中等号都必须成立,特别是

$$(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2=(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2).$$

从此得出

$$\frac{x_1}{x_2'}=\frac{-\bar{x}_2}{x_1'}=\frac{\pm\sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}}{\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}}=\pm r.$$

从方程(1)中的第一等式可以看出比例因子是 r,就是

$$x_1=rx_2',\quad \bar{x}_2=-rx_1'.$$

当我们在(1)中交换 x_1 和 x_2 时,这个事实也成立,所以 $x_2=-rx_1'$. 因此

$$x_1^2+x_2^2=r^2,$$

就是说, C 是圆.

3. 切线回转定理 如前段,以 $X(s)$ 表示平面曲线上任意点的位置向量, s 是弧长. 如果 $X(s)$ 是周期 L 的函数, 那末曲线 C 称为**闭**曲线, L 是 C 的周长. 如果对于 $0<s_1-s_2<L$ 的 s_1, s_2, 成立 $X(s_1)\neq X(s_2)$, 曲线 C 称为**单纯**曲线. 如果曲线在其任一切线的一侧,则称为**凸**的.

关于平面闭曲线的一个重要定理就是此地将叙述并证明的"切线回转定理"(德文 Umlaufssatz).

设 C 是有位置向量 $X(s)$、以弧长 s 为参数且长 L 的定向闭曲线. 在平面上设 O 是固定点, 我们取它做坐标原点. 把绕 O 的单位圆记作 Γ. 我们定义切线映象 T: $C\to\Gamma$ 如下: C 的一点 P 被映到那通过 O 且平行于 C 在 P 处切线的单位向量的端点. 显然,

T 是连续映象. 直观上, 当一点绕 C 一周时, 它的象将绕 Γ 几次. 这个数目将称为 C 的旋转指标. 切线回转定理是说, 如果 C 是单纯的, 那末旋转指标为 ± 1. 我们先给出旋转指标的严密定义.

我们选定过 O 的一个定方向, 比方说 OX, 而且用 $\theta(s)$ 表示 OX 同切线向量 $e_1(s)$ 的角. 我们假定 $0 \leqslant \theta(s) < 2\pi$, 于是 $\theta(s)$ 被唯一地决定了. 必须指出, $\theta(s)$ 是不连续的, 因为在使 $\theta(s_0)=0$ 的 s_0 的每一邻域里可以有 $\theta(s)$ 的一些值, 使它们与 2π 相差一个任意小量的缘故. 然而, 一定有一个连续函数 $\tilde{\theta}(s)$, 它是密切联系于 $\theta(s)$, 如引理所示.

引理 必存在一个连续函数 $\tilde{\theta}(s)$ 使得 $\tilde{\theta}(s) \equiv \theta(s) \bmod 2\pi$.

为证明引理, 我们指出, 由于映象 T 是连续的, 所以是均匀连续的. 因而必有数 $\delta>0$, 使得对于 $|s_1-s_2|<\delta$ 的 $T(s_1)$ 和 $T(s_2)$ 在同一半平面上. 从所要的 $\tilde{\theta}(s)$ 的条件看出, 如果 $\tilde{\theta}(s_1)$ 已知, 则 $\tilde{\theta}(s_2)$ 可完全决定. 接着, 我们根据点 $s_0(=0)<s_1<\cdots<s_m(=L)$ 划分区间 $0 \leqslant s \leqslant L$, 使得 $|s_i-s_{i-1}|<\delta$, $i=1, \cdots, m$. 为了定义 $\tilde{\theta}(s)$, 我们指定值 $\theta(s_0)$ 为 $\tilde{\theta}(s_0)$, 于是它在子区间 $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ 而特别在 s_1 被决定. 这样, 它在第二子区间被决定, 等等. 如此决定起来的函数 $\tilde{\theta}(s)$ 显然满足引理中的各条件.

差 $\tilde{\theta}(L)-\tilde{\theta}(0)$ 是 2π 的整数倍, 比方说, $=r \cdot 2\pi$. 我们阐明 r 与函数 $\tilde{\theta}(s)$ 的选取无关. 实际上, 设 $\tilde{\theta}'(s)$ 是满足同一套条件的一个函数. 那末我们有

$$\tilde{\theta}'(s)-\tilde{\theta}(s)=n(s) \cdot 2\pi,$$

其中 $n(s)$ 是一个整数. 因为 $n(s)$ 是 s 的连续函数, 所以它必须是常数. 因此

$$\tilde{\theta}'(L)-\tilde{\theta}'(0)=\tilde{\theta}(L)-\tilde{\theta}(0).$$

这就证明了 r 与 $\theta(s)$ 的选取是无关的. 我们定义 r 为 C 的**旋转指标**.

定理 单纯闭曲线的旋转指标为 ± 1.

为证明本定理，我们考察这样的映象 Σ：把 C 的一对有序点 $X(s_1)$，$X(s_2)$，$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant L$ 映到那通过 O 而平行于 $X(s_1)$ 到 $X(s_2)$ 连割线的单位向量的端点去，这些有序点对可以用 (s_1, s_2) 平面上由 $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant L$ 所定义的三角形 $\varDelta$ 进行表示．$\varDelta$ 到 Γ 里 (into) 的映象是连续的．我们还指出，它在边 $s_1=s_2$ 上的限制 (restriction) 就是切线映象 T.

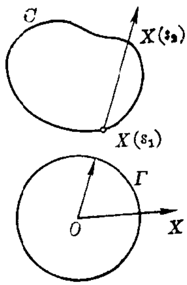


图 1.2

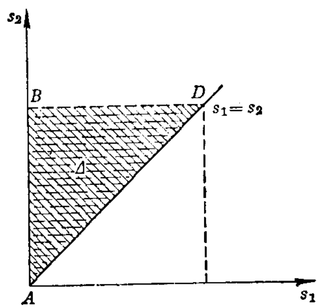


图 1.3

对于一点 $p\in\varDelta$，作 OX 同 $O\Sigma(p)$ 的交角 $\theta(p)$，$0\leqslant\theta(p)<2\pi$，这个函数也是不一定连续的．但是我们将证：必存在一个连续函数 $\tilde{\theta}(p)$，$p\in\varDelta$，使得 $\tilde{\theta}(p)\equiv\theta(p)\bmod 2\pi$.

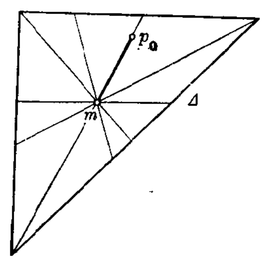


图 1.4

实际上，设 m 是 $\varDelta$ 的一个内点．我们用那些过 m 点的半径来遮盖 $\varDelta$．根据上述引理的证明中采用的措施，我们可以定义一个函数 $\tilde{\theta}(p)$，$p\in\varDelta$，使得 $\tilde{\theta}(p)\equiv\theta(p)\bmod 2\pi$，而且使它沿每一过 m 的半径是连续的．剩下的是要证明它在 $\varDelta$ 里是连续的．为此目的，设 p_0 是 $\varDelta$ 的一点．因为 Σ 是连续映象而且线段 mp_0 是有界闭（紧）集，所以应用 Heine-Borel 遮盖定理（凡遮盖有界闭集的开区间的每一集合有一个有限子集遮盖该有界闭集）到这里，比方说，必有这样一个数 $\eta=\eta(p_0)>0$ 使得对应于 $q_0\in mp_0$ 和任何使距离 $d(q, q_0)<\eta$ 的点

$q\in\Delta$ 的两点 $\Sigma(q)$ 和 $\Sigma(q_0)$ 决不正相反(antipodal). 后一条件等价于关系

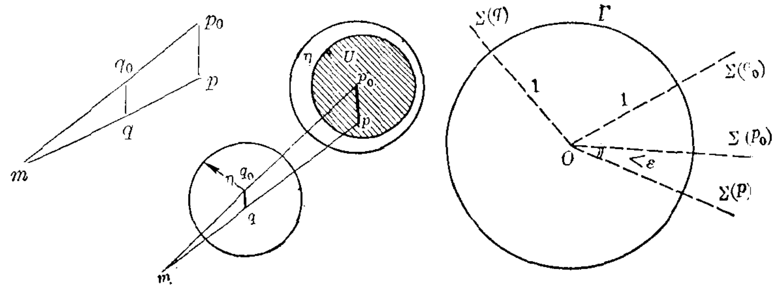


图 1.5

$$(*)\qquad \tilde{\theta}(q)-\tilde{\theta}(q_0)\neq 0,\quad \bmod \pi.$$

假定给了 $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\frac{1}{2}\pi$. 我们选取 p_0 的一个邻域 U 使包括在 p_0 的 η 邻域之内, 并使对于 $p\in U$, $O\Sigma(p_0)$ 与 $O\Sigma(p)$ 间的角 $<\varepsilon$. 因为 Σ 是连续的,所以这样做是可能的. 后一条件可以写成如下:

$$(**)\qquad \tilde{\theta}(p)-\tilde{\theta}(p_0)=\varepsilon'+2k(p)\pi,\quad |\varepsilon'|<\varepsilon.$$

式中 $k(p)$ 是整数. 设 q_0 是线段 mp_0 上的任一点. 画 q_0q 使平行于 p_0p 而 q 在 mp 上. 函数 $\tilde{\theta}(q)-\tilde{\theta}(q_0)$ 沿 mp 关于 q 是连续的, 而且当 q 合于 q_0 时等于零. 然而 $d(q,\ q_0)<\eta$, 所以从(*)得出 $|\tilde{\theta}(q)-\tilde{\theta}(q_0)|<\pi$. 特别是,对于 $q_0=p_0$ 就有 $|\tilde{\theta}(p)-\tilde{\theta}(p_0)|<\pi$. 把这和(**)联系起来看, 便获得 $k(p)=0$. 这就证明了 $\tilde{\theta}(p)$ 在 Δ 内是连续的. 因为 $\tilde{\theta}(p)\equiv\theta(p)$, mod 2π, 所以容易看出 $\tilde{\theta}(p)$ 是可微分的.

现在设 $A(0,\ 0)$、$B(0,\ L)$、$D(L,\ L)$ 是 Δ 的顶点. $\mathscr{C}$ 的旋转指标 γ 定义于线积分

$$2\pi\gamma=\int_{AD}d\tilde{\theta}.$$

然而 $\tilde{\theta}(p)$ 是在 Δ 内定义的,所以

$$\int_{AD} d\tilde{\theta} = \int_{AB} d\tilde{\theta} + \int_{BD} d\tilde{\theta}.$$

为计算右侧两个线积分，我们假定原点 O 在 C 的点 $X(0)$ 而且 C 必须落在上半平面并与 OX 在 O 相切. 只要取 $X(0)$ 在 Y 坐标极小的点 O, 这是永远可能的. 那末，OX 是 C 在 O 的切线向量的方向，或者其相反方向. 在后一场合，我们把 C 的定向倒过来. 于是沿 AB 的线积分等于 OP 沿 C 一周时所旋转的角. 因为 C 在上半平面，向量 OP 决不指向下方，所以沿 AB 的线积分等于 π. 另一方面，沿 BD 的线积分是 PO 当 P 沿 C 一周时所旋转的角. 因为向量 PO 决不指向上方，所以这积分也等于 π. 因此，它们之和是 2π 而且旋转指标是 $+1$. 由于我们可能要倒画 C 的定向，C 的旋转指标是 ± 1.

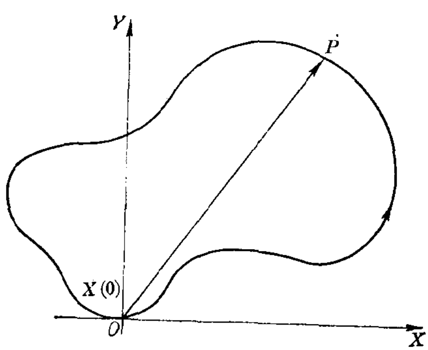


图 1.6

旋转指标也可由一个积分公式来定义. 实际上，如采用引理中的函数 $\theta(s)$，则可把单位切向量的支量表示如下:

$$e_1 = (\cos\tilde{\theta}(s),\ \sin\tilde{\theta}(s)),$$
$$e_2 = (-\sin\tilde{\theta}(s),\ \cos\tilde{\theta}(s)),$$

由此得出

$$d\tilde{\theta}(s) = de_1 \cdot e_2 = \varkappa ds.$$

因而我们导出下列的旋转指标的公式:

$$2\pi\gamma=\int_C \varkappa ds.$$

这个公式对于不一定是单纯的闭曲线也成立．图 1.7 就示意了旋转指标 0 的闭曲线的例子．

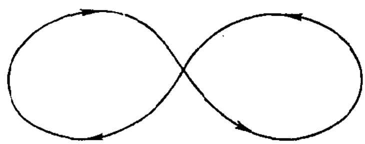


图 1.7

必须着重指出，微分几何中有许多有趣的定理对于更一般的曲线，即所谓**分段光滑曲线**的族也成立．这样一条曲线是有限个光滑弧 A_0A_1，A_1A_2，…，$A_{m-1}A_m$ 的并集，其中通过一个公共点 A_i，$i=1$，…，$m-1$ 的两切线可以有不同方向．如果 $A_0=A_m$，则称闭曲线．分段光滑闭曲线最简单的一例就是直线多边形．

旋转指标的概念和回转切线有关的定理都可拓广到分段光滑闭曲线．我们将无证明地综述结果如下：设 s_i，$i=1$，…，m 是从 A_0 到 A_i 测量的弧长，因此 $s_m=L$ 是曲线的长．曲线是被假定为有向的，切线映象在 A_i 以外的所有点是定义了的．在顶点 A_i 有两个单位向量，分别切于 $A_{i-1}A_i$ 和 A_iA_{i+1}（我们定义 $A_{m+1}=A_1$）．在 Γ 上的对应点分别记作 $T(A_i)^-$ 和 $T(A_i)^+$．设 φ_i 是从 $T(A_i)^-$ 到 $T(A_i)^+$ 的角，其中 $0\leqslant\varphi_i<2\pi$．这不过是 $A_{i-1}A_i$ 的切线到 A_iA_{i+1} 的切线的外角．对于各弧 $A_{i-1}A_i$ 可以定义一个连续函数 $\tilde{\theta}(s)$，它为从 OX 到 $X(s)$ 处切线的角所决定．再则差 $\tilde{\theta}(s_i)-\tilde{\theta}(s_{i-1})$ 是与这函数选取无关．按方程

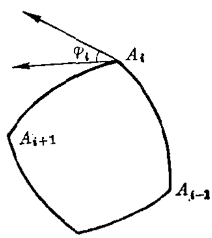


图 1.8

$$2\pi\gamma=\sum_{i=1}^{m}\{\tilde{\theta}(s_i)-\tilde{\theta}(s_{i-1})\}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i$$

定义的数 γ 是整数，称为曲线的**旋转指标**. 关于回转切线的定理仍旧成立：如果一条分段光滑闭曲线是单纯的，那末旋转指标等于 ± 1.

4. 曲线的凸性与曲率 定向平面上定向的曲线有定义好的曲率，希望阐明曲线的凸性与其曲率的符号之间的关系，这是很自然的. 肯定这个关系的是下述

定理 一条单纯闭曲线是凸的充要条件是：它可以这样定向，使其曲率是 $\geqslant 0$.

首先要指出，这定理如无曲线是单纯的这一假定，肯定是不成立的. 如附图所示的非凸曲线，就有 $\varkappa<0$. 这里及下文用 $\varkappa$ 表示曲线的曲率，s 表示弧长.

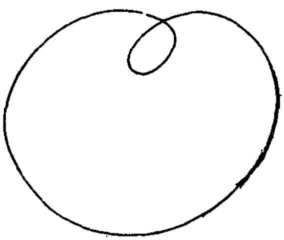


图 1.9

为证明这定理，设 $\tilde{\theta}(s)$ 是前段中所作的函数，因此 $\varkappa=d\tilde{\theta}/ds$. 因此，$\varkappa\geqslant 0$ 是同 $\tilde{\theta}(s)$ 为单调非递减函数这一主张等价的. 我们可假定 $\tilde{\theta}(0)=0$. 根据切线回转定理我们可这样给曲线 C 以定向，使 $\tilde{\theta}(L)=2\pi$.

假定 $\tilde{\theta}(s)$，$0\leqslant s\leqslant L$，是单调非递减的而 C 是非凸的. 在 C 上有这么一点 $A=X(s_0)$ 使得 C 在 A 的切线 t 的两侧都有 C 的

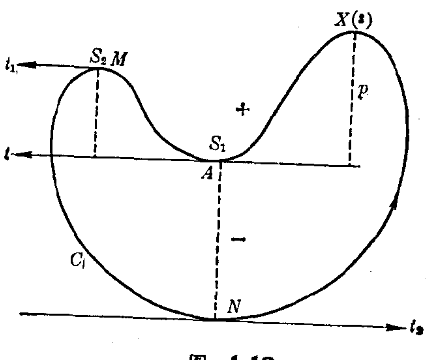


图 1.10

点. 选取 t 的正侧并考虑从 C 的一点 $X(s)$ 到 t 的有向垂距 p. 由于 C 是闭的而且 p 是 s 的连续函数，所以从 Weierstrass 定理得知这个垂距 p 分别在 C 的点 M 和 N 取极大和极小值. 显然，M 和 N 都不在 t 上，而且 C 在 M、N 的切线 t_1、t_2 分别平行于 t. 此外，在 t 和 t_1、t_2 中必有两切线以同向平行的. 把这两切线的对应接触点的参数值记作 $s_1<s_2$. 因为 $\tilde{\theta}(s)$ 是单调非递减的，这一事情只当 $\tilde{\theta}(s)=\tilde{\theta}(s_1)$ 对于所有 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 都成立时才可能. 由此可见，C 的弧 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 是与 t 平行的线段. 但是这显然是不可能的.

其次，设 C 是凸的. 我们要证 $\tilde{\theta}(s)$ 是单调非递减的. 为此，假定 $\tilde{\theta}(s_1)=\tilde{\theta}(s_2)$，$s_1<s_2$. 那末，在 $X(s_1)$ 和 $X(s_2)$ 的切线以同向平行. 可是必有一切线以反向平行于它们. 从 C 的凸性得知前两切线必须一致.

这样一来，我们必须要考察同 C 在不同两点 A 和 B 相切的直线 t. 我们声明，线段 AB 必须是 C 的一部分. 实际上，假如不是这样，而且设 D 是 AB 的不在 C 上的一点. 过 D 引 C 所在半平面里垂直于 t 的直线 u. 那末 u 至少有两点同 C 相交. 在这些交点中设 F 为离 t 最远的点，G 为最近的点，因此 $F\neq G$，于是 G 是三角形 ABF 的内点. C 在 G 的切线两侧都有 C 的点，这同 C 的凸性相矛盾.

由此可见，在前段 3 的假设之下线段 AB 是 C 的一部分，而且 C 在 A 和 B 的切线以同向平行. 这就证明了连接 $X(s_1)$ 到 $X(s_2)$ 的线段属于 C. 后一事情蕴涵着 $\tilde{\theta}(s)$ 在区间 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 是常数. 所以函数 $\tilde{\theta}(s)$ 是单调非递减的，因此证完了本定理.

5. 四顶点定理 平面曲线的顶点是指那里的曲率有相对极值的点. 因为一条闭平面曲线形成紧集（点集），按 Weierstrass 定理得知平面闭曲线至少有两个分别对应于相对极小和极大曲率的顶点. 此外，在两极小曲率值（极大曲率值）之间必至少有一个极

大(极小)值. 所以一条闭曲线的顶点个数是偶数.

四顶点定理 一条凸闭曲线至少有四个顶点.

本定理最初是 Mukhopadhyaya(1909)所发现, 而这里我们即将给出的证明则是 G. Herglotz 的. 这定理对某些非凸曲线也成立, 但其证明比较难. 我们还须指出: 这定理不能更进一步改进, 因为椭圆有不等的长短轴时, 恰好有四个顶点, 就是它和两轴的交点.

我们假定一条凸闭曲线 C 只有两个顶点 M 和 N, 而从此导致矛盾来. 直线 MN 和 C 不相交于任何别点, 否则 C 在这别点的切线就必须包含这两点 M 和 N, 因为 C 是凸的, M 和 N 不可能在这切线的两侧, 而因此按前段的同一论证得知: 这只在线段 MN 是 C 的一部分时才可能. 这一来, 就得出 C 的曲率 $\varkappa$ 在 M、N 消失了, 而 M 和 N 都变为曲率取绝对的极大和极小之处了.

证明 1 我们把 M 和 N 的参数分别记作 0 和 s_0, 而且取 MN 做 x 轴. 那末, 我们可以假定

$$y(s)<0, \qquad 0<s<s_0,$$
$$y(s)>0, \qquad s_0<s<L,$$

式中 L 是 C 的长. 设 $(x(s),\ y(s))$ 是 C 上面参数 s 的一点的位置向量. 于是单位切线向量和单位法线向量具有分量

$$e_1=(x',\ y'), \qquad e_2=(-y',\ x'),$$

其中一撇表示关于 s 的导微. 从 Frenet 公式获得

$$x''=-\varkappa y', \qquad y''=\varkappa x'.$$

从此可见

$$\int_0^L \varkappa y' ds=-x'\Big|_0^L=0.$$

可是左侧积分可以写成

$$\int_0^L \varkappa y'\, ds=\int_0^{s_0} \varkappa y'\, ds+\int_{s_0}^L \varkappa y'\, ds.$$

对各个和式将应用中值定理, 而这中值定理可叙述如次: 设 $f(x)$,

$g(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 是 x 的这样两个函数，使得 $f(x)$，$g'(x)$ 是连续而且 $g(x)$ 是单调的，那末一定存在 ξ，$a<\xi<b$，它满足方程

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

(参照 Courant, Calculus, I, p.256). 因为 $\varkappa(s)$ 在各区间 $0\leqslant s\leqslant s_0$，$s_0\leqslant s\leqslant L$ 都是单调的，所以从上述中值定理得知

$$\int_0^{s_0}\varkappa y'\,ds=\varkappa(0)\int_0^{\xi_1}y'ds+\varkappa(s_0)\int_{\xi_1}^{s_0}y'ds$$
$$=y(\xi_1)[\varkappa(0)-\varkappa(s_0)],\qquad 0<\xi_1<s_0,$$
$$\int_{s_0}^{L}\varkappa y'ds=\varkappa(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2}y'ds+\varkappa(L)\int_{\xi_2}^{L}y'ds$$
$$=y(\xi_2)[\varkappa(s_0)-\varkappa(0)],\qquad s_0<\xi_2<L.$$

由于两者相加后左边是零，所以这两方程给出

$$[y(\xi_1)-y(\xi_2)][\varkappa(0)-\varkappa(s_0)]=0.$$

但是 $y(\xi_1)-y(\xi_2)<0$，$\varkappa(0)-\varkappa(s_0)>0$，所以 $\mathscr{C}$ 至少有四个顶点. 证毕.

证明 2 现在假定 MN 是一般位置的直线，以致可令其方程为

$$a_0+a_1x+a_2y=0.$$

如同前一证明一样，按 Frenet 公式得知

$$\int_C\varkappa'\,ds=\int_C d\varkappa=0,$$

$$\int_C x\varkappa'\,ds=\int_C(-y'+x\varkappa)'ds=0,$$

$$\int_C y\varkappa'\,ds=\int_C(x'+y\varkappa)'ds=0.$$

所以对于常数 a_0，a_1，a_2，便有

$$\int_C(a_0+a_1x+a_2y)\varkappa'ds=0.$$

因为我们假定了 M、N 是曲线 C 上仅有的两顶点，所以上列被积函数保持定符号，这就导致矛盾. 这样，证明了定理.