工 程 徐 变 力 学

华东水利学院 傅作新 编

水 利 电 力 出 版 社

内 容 简 介

本书系统地介绍了工程徐变力学的基本理论及分析方法。其内容包括材料的复杂变形现象及模型、徐变方程式及其应用条件、金属结构的徐变、混凝土结构的徐变与若干工程材料的徐变问题。

本书可作为高等院校本科或研究生选修课教材，也可供水利、土木、机械等专业的科研、工程技术人员与试验工作者参考。

工程徐变力学

华东水利学院　傅作新 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　4.75印张　104千字

1985年3月第一版　1985年3月北京第一次印刷

印数0001—7300册　定价1.00元

书号 15143·5647

序

工程徐变力学是与许多工程部门（如水利、土木、采矿、机械、……等）的生产和科学实践密切有关的一门力学基础科学。对于在高温下长期工作的金属结构和零件、隧道、大坝及其他混凝土结构和钢筋混凝土结构等的设计和观测资料的分析，都要用到徐变力学的知识。本书主要讨论与上述问题有关的徐变力学基本概念以及金属与混凝土两大类材料的徐变分析问题。

全书内容分列为五章。第一章和第二章介绍材料复杂变形现象的特点、流变模型在描述复杂变形现象中的应用，以及几种著名的徐变物理方程的形式，并讨论了它们的区别和应用条件。

第三章讨论较成熟的流动理论的应用，介绍了一些典型问题的计算成果。鉴于金属徐变的非线性所引起的求解上的困难，本章还介绍了变分法和参照应力法。后一种方法是近年来应用很广的金属徐变问题的近似解法。

在第四章中，根据推广的线性继效方程建立了按位移求解的线性徐变力学方程组，论证了线性徐变力学的基本定理，并以此为基础详细讨论了各类线性徐变问题的求解方法。为了能够利用现代计算技术，除介绍简单情况下的解析解法外，还讨论了一般徐变问题的数值解法。根据建议的各种计算方案，可以使解决复杂徐变力学问题的能力大大提高一步。

最后，第五章简单介绍了钢筋混凝土、岩石和沥青等材料徐变的特点及其在工程中应用的若干问题。

限于篇幅，本书不可能对已经发表的大量徐变力学文献进行全面的概括和综合，只能对发展较完善、应用较广泛的内容作重点和扼要的介绍，以便读者能从中了解徐变力学的基本理论知识和主要分析方法。

本书承南京工学院佘颖禾同志详细审阅，并提出了宝贵的改进意见。南京水利科学研究所唐崇钊同志参加了本书编写大纲的拟定工作。特此一并表示衷心的感谢。

傅作新

1984年1月

目　　录

第一章　材料的复杂变形现象

第一节　材料的徐变和松弛

徐变是指固体在不变的外力作用下，变形随时间缓慢增长的现象。许多工程材料，如高温下工作着的金属、混凝土和塑料等都具有显著的徐变性质。试验发现，这些材料的徐变可能达到弹性变形的几倍甚至几十倍，因此材料的徐变有时要严重影响结构和机器的工作。例如，在高温和高压下工作的金属管道，会由于徐变而不断增大其直径，以致发生管壁之破裂；涡轮机叶片在高温和巨大离心力作用下，可能由于叶片的徐变而导致涡轮机的损坏。另一方面，当计算混凝土结构的温度和收缩应力时，徐变可以使实际应力比弹性力学方法求得的应力大大降低，从而改善结构的工作条件。所以，研究材料的徐变性质对于安全而经济地设计结构和机器具有重大意义。

徐变力学作为广义的工程力学的一个分支，主要是研究材料徐变性质对结构物和机器零件的强度、刚度和稳定性影响的一门学科。

在长时间、常荷载的拉伸下，材料的典型徐变曲线如图1-1所示。当杆件受力后，首先发生以线段 $0A$ 表示的瞬时应变 ε_0，ε_0 将随所施荷载的大小不同而为弹性变形或弹塑性变形。随着时间增长，材料将发生徐变。在初始阶段，徐变速率由某一较大值逐渐减小，以后趋向常量。这个工作阶段称为徐变的第一阶段，在图1-1中以线段 AB 表示，第一阶段

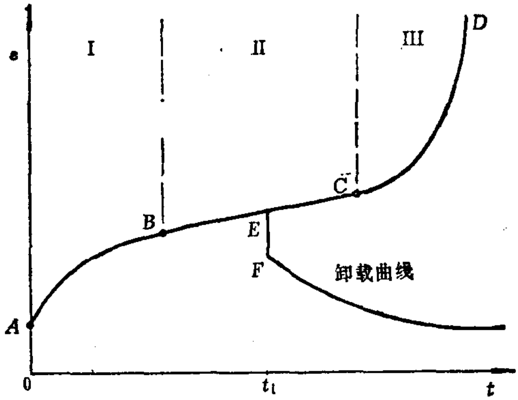

图 1-1

一般历时较短。B 点以后，进入徐变的第二阶段，在图 1-1 中以线段 BC 表示，这个阶段的徐变速率为最小并基本保持不变。第二阶段所经历的时间一般较长。C 点以后称为徐变的第三阶段。进入第三阶段后，徐变速率逐渐增大，最终可能在 C 点附近发生“脆性”断裂，或者在颈缩后于 D 点产生“韧性”破坏。如果所受应力接近材料的破坏极限，则第二阶段可能很短甚至消失，这时徐变由第一阶段直接过渡到第三阶段。上述徐变的三个阶段有时也称为过渡阶段、稳定阶段和破坏阶段。

材料内应力的大小和温度的不同将给徐变曲线的形状带来很大的影响。图1-2表示在同一温度 T，但不同应力 σ（$\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3<\sigma_4<\sigma_5$）作用下金属材料的徐变曲线，图1-3表示在同一应力 σ 下、不同温度 T（$T_1<T_2<T_3<T_4<T_5$）时金属的徐变曲线。

可以看出，在较小的应力下（$\sigma=\sigma_1$）或较低的温度时（$T=T_1$），金属实际上不产生徐变；在较大的应力和较高的

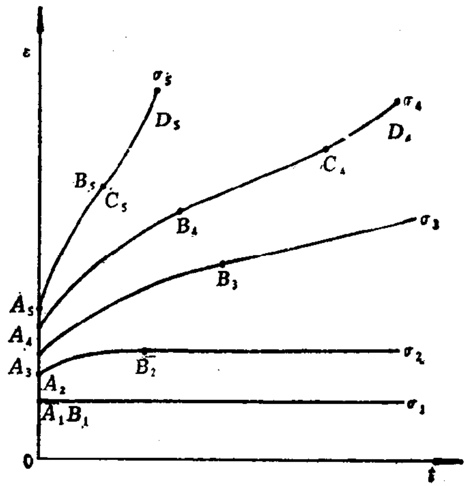
ε
σ_5
D_5
σ_4
D_4
C_4
B_5
C_5
B_4
σ_3
B_3
A_5
A_4
σ_2
A_3
B_2
A_2
σ_1
A_1B_1
0
t

图 1-2

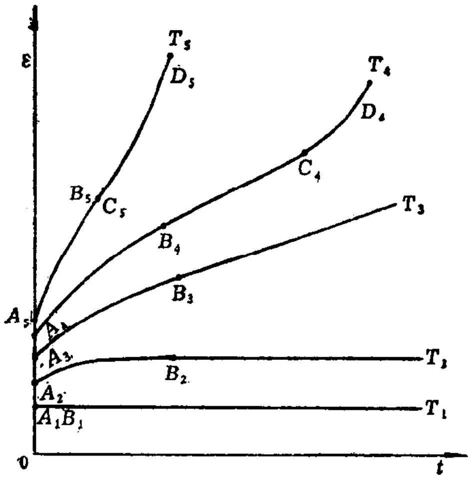
ε
T_5
D_5
T_4
D_4
C_4
B_5
C_5
T_3
B_4
B_3
A_5
A_4
A_3
T_2
B_2
A_2
T_1
A_1B_1
0
t

图 1-3

温度时（$\sigma=\sigma_2$，$T=T_2$），经过较短的过渡阶段后徐变速率可能减小到零；在更大的应力或更高的温度下（$\sigma=\sigma_3$，$T=T_3$），可能发生长时间的稳定徐变；当应力或温度继续增加（$\sigma=\sigma_4$，$T=T_4$），徐变的发展更为迅速，稳定阶段逐渐缩短；最后，当$\sigma=\sigma_5$或$T=T_5$时，徐变由过渡阶段直接到达破坏阶段。

如果在某时刻（$t=t_1$）时卸去荷载，杆件的应变将减小，这个过程称为“回复”（见图1-1）。当杆件卸载时，首先恢复一部分弹性应变EF，以后变形将随时间逐渐减少，最后保留不可恢复的残余应变。

建筑工程中常用的混凝土材料的徐变，除了具有上述相同的特点外，它的徐变性质还与养护条件、加载龄期和工作环境等有显著的关系，我们将在以后有关的章节中介绍混凝土徐变的主要特点。

前面讨论的是杆件在荷载下可以自由伸缩的情况，在这种情况下杆件的变形将随时间增加。如果在杆件产生某一定的弹性应变以后，使杆件的应变保持不变，杆件的应力将随时间逐渐减小（见图1-4），这种现象称为应力的松弛现象。松弛现象通常解释为由于材料徐变的结果，减小了弹性变形，从而减小了与弹性变形对应的应力。

以上，我们介绍了通过试验获得的、与材料徐变有关的一些重要性质。为了能够对材料的徐变问题进行分析研究，必须在试验的基础上，拟定出合适的描述材料复杂变形现象的数学表达式，这种表达式一般应表示为若干主要物理量间的关系，这种关系称为物理方程或本构方程。下一节中，我们将介绍建立徐变物理方程的一种方法。

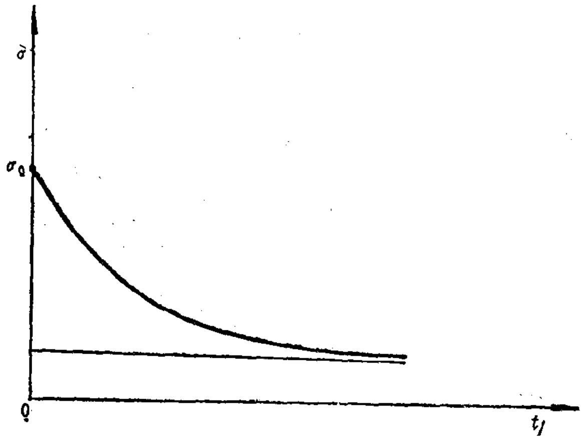

图 1-4

第二节　简单的流变模型

流变模型是流变学中经常用来描述材料复杂变形现象的一种工具。流变模型通常由三种简单模型（或称元件）即理想弹性模型、理想粘性模型和刚塑性模型组合而成。理想弹性模型用弹簧表示，见图1-5(a)，其应力与应变的关系是单值的并且与时间无关，在线性条件下这个关系就是虎克定律

$$\sigma = E\varepsilon \tag{a}$$

理想粘性模型用图1-5(b)所示的缓冲器（又称阻尼器）来表示，通常假设它的应力与应变速率成正比，即

$$\sigma = K\dot{\varepsilon} \tag{b}$$

式中　$\dot{\varepsilon} = \dfrac{d\varepsilon}{dt}$，$\dot{\varepsilon}$是应变速率，$K$是粘性系数。

刚塑性模型是塑性力学常用的一种理想化模型，它的特

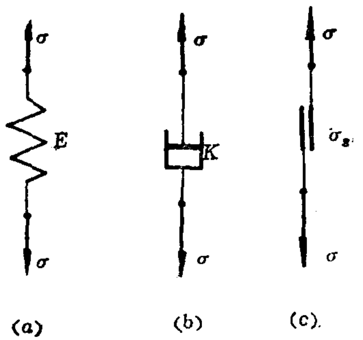

图 1-5

征是当物体内的应力小于它的流动极限σ_s时，物体不变形，当应力达到σ_s时，物体开始流动，变形可以无限增大。刚塑性模型通常用两块互相接触，而且接触面上具有库伦摩擦所构成的元件来表示，见图1-5(c)。

在流变学中，上述三种元件中最常用的是弹性模型和粘性模型。不同元件的组合可得到不同的粘弹性模型，用以描述物体的各种复杂变形现象。其中最简单的是由二元件组成的松弛模型和非松弛模型，以及由三元件组成的弹粘性模型。下面我们来讨论这些流变模型的特点。

（一）松弛模型

松弛模型也称为马克斯韦尔（Maxwell）模型，它是由一个弹性元件和一个粘性元件串联而成，见图1-6(a)。根据串联模型中各元件应力相等、应变为各元件之和的条件，可以求得松弛模型的应力和应变的物理方程。对于图1-6(a)所示的弹性和粘性元件，其应力相等，它们的物理方程为

$$\sigma = E\varepsilon_1, \quad \sigma = K\dot{\varepsilon}_2 \qquad (c)$$

由于总应变等于各元件之和，我们有

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (d)$$

将式（c）中的第一式与式（d）对时间求导，然后与式（c）中第二式联立消去$\dot{\varepsilon}_1$及$\dot{\varepsilon}_2$，便得到松弛模型的物理方程（*Maxwell*方程式）

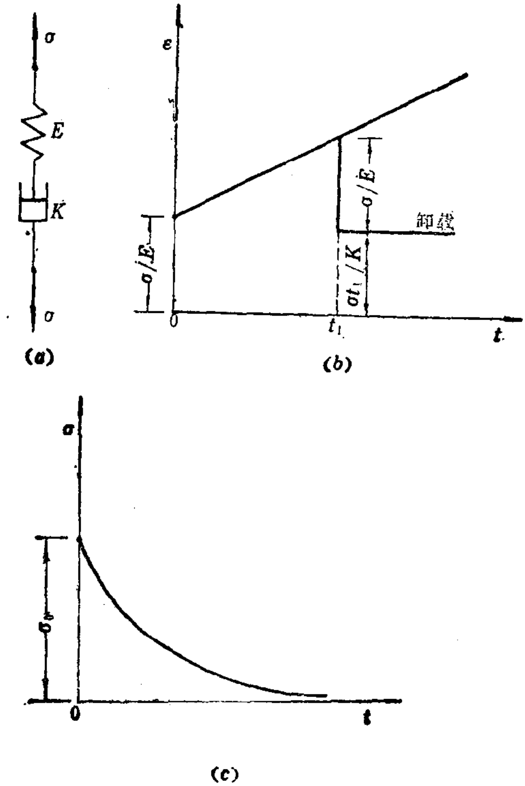

图 1-6

$$\sigma + n\dot{\sigma} = K\dot{\varepsilon} \qquad (1\text{-}1)$$

式中 $n = \dfrac{K}{E}$，n 为松弛时间。

具有方程（1-1）所描述的性质的物体称为松弛物体或 *Maxwell* 物体。

为了了解松弛模型的力学性质，下面讨论两种简单的工

作情况。

1.物体在初瞬时作用常应力σ

在这种情况下，物体将首先产生初弹性应变$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}$。为了进一步求出加荷后的变形规律，可求解式（1-1）。当σ为常量时，式（1-1）成为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\sigma}{K}$$

上式对时间t积分，得到

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{K}t+C$$

应用初始条件：$t=0$时，$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}$，解出$C=\dfrac{\sigma}{E}$。将它代入上式，便得到松弛物体在常应力作用下的变形规律

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}+\frac{\sigma}{K}t \tag{1-2}$$

上式所表示的物体的应变随时间按线性规律增长，应变速率$\dot{\varepsilon}=\dfrac{\sigma}{K}$等于常量，见图1-6($b$)。

假设徐变变形符合叠加原理，则在$t=t_1$时卸载后的变形规律，可以在物体上叠加以大小相等、方向相反的荷载后得到。在$t=t_1$时刻开始作用应力($-\sigma$)时，物体的变形为

$$\varepsilon=-\frac{\sigma}{E}-\frac{\sigma}{K}(t-t_1)$$

将上式与式（1-2）相加，得到

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{K}t_1$$

可见，松弛模型在卸载后，弹性应变将立即消失，而徐变应变则不能恢复，如图1-6(b)所示。

2. 物体获得初弹性应变ε_0之后总应变保持不变

在初瞬时，物体的应力为$\sigma=\sigma_0=E\varepsilon_0$，以后应力的变化可由式（1-1）解得。当应变为常量时，式（1-1）简化为

$$\sigma+n\dot{\sigma}=0$$

上式的解为

$$\sigma=Ce^{-t/n}$$

应用初始条件：$t=0$时，$\sigma=\sigma_0$，解出$C=\sigma_0$。代入上式，得到

$$\sigma=\sigma_0 e^{-t/n} \tag{1-3}$$

所以，松弛模型在保持总应变为不变的条件下，应力随时间衰减，见图1-6(c)。从式（1-3）可以看出，当$t=n$时，$\sigma=\sigma_0/e$，即经过的时间等于松弛时间后，应力将衰减到初始弹性应力的$1/e$，这就是“松弛时间”一名的由来。

（二）非松弛模型（Voigt或Kelvin模型）

非松弛模型也称为沃埃特—凯尔文（Voigt—Kelvin）模型。将弹性元件和粘性元件并联，可以得到非松弛模型[图1-7(a)]。根据并联模型中各元件的应变相等、应力为各并联元件之和的条件，可以导出非松弛模型的物理方程。对于图1-7(a)所示的弹性和粘性元件，应变相等，它们的物理方程为

$$\sigma_1=E\varepsilon,\qquad \sigma_2=K\dot{\varepsilon} \tag{e}$$

总应力等于各元件之和

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2 \tag{f}$$

将式（e）代入式（f），可求得非松弛模型的物理方程

$$\sigma=E\varepsilon+K\dot{\varepsilon} \tag{1-4}$$

具有方程（1-4）所描述的性质的物体称为非松弛物体或

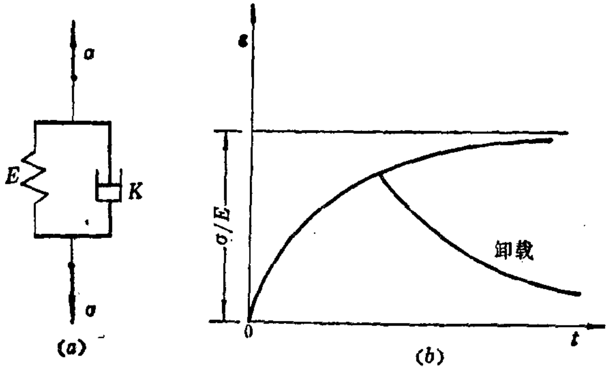

图 1-7

Voigt物体。

下面讨论非松弛模型的两种工作情况。

1.物体在初瞬时作用常应力σ

由于粘性元件在加载的瞬时应变为零，所以非松弛物体在加载瞬时的应变亦为零。利用这个条件，可以由式（1-4）求得非松弛物体在常应力作用下的变形规律

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}(1-e^{-Et/K}) \tag{1-5}$$

由上式可见，在初瞬时$t=0$时，应变为零；当时间增大，应变逐渐增加，最后趋向σ/E。还可看出，应变速率由最初的σ/K值，逐渐趋向于零，见图1-7(b)。

如果徐变变形符合叠加原理，在卸载后，非松弛物体的变形将逐渐减小并最终完全恢复。非松弛物体在加载和卸载时的这种性质称为延迟弹性或弹性后效。

2.物体获得初弹性应变ε_0之后总应变保持不变

因为总应变不变，所以应变速率为零，由式（1-4）可直接得出$\sigma=E\varepsilon_0=$常量，即非松弛物体的应力不衰减。

应该指出，以上两种模型都有一定的缺点。前者不能反映徐变的回复；后者则不能描述瞬时变形和材料中存在的应力松弛现象，所以在实际中用得不多。

（三）三元件的粘弹性模型

图 1-8（a）表示一种很常用的粘弹性模型，这个模型比上述二元件模型可以更好地描述材料的复杂变形现象。

研究各元件的应变与应力间的关系，可得到三元件模型的物理方程

$$\frac{E_2K}{E_1+E_2}\dot{\varepsilon}+\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\varepsilon=\sigma+\frac{K}{E_1+E_2}\dot{\sigma}$$

上式还可以写成

$$nH\dot{\varepsilon}+E\varepsilon=n\dot{\sigma}+\sigma \tag{1-6}$$

式中 n、H 和 E 为常量，且 $n=\frac{K}{E_1+E_2}$， $H=E_2$， $E=\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}$。

下面讨论三元件模型的几种工作情况。

1.在初瞬时作用常应力 σ

在这种情况，我们有初始条件：$t=0$ 时，$\varepsilon=\sigma/H$，因为开始加荷时只有弹性元件有单独的瞬时变形，根据这个条件，可以由式（1-6）求得物体的变形规律为

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{H}+\frac{H-E}{HE}\sigma(1-e^{-Et/Hn}) \tag{1-7}$$

式（1-7）表示的应变随时间的变化如图 1-8（b）表示。可见，应变速率由初瞬时的最大值逐渐趋于零，而应变则趋向 σ/E。

容易证明，该模型卸载后，将首先恢复弹性应变σ/H，以后应变继续减小，最后趋向于零。