大学专科小学教育专业教材

初等数论

教材编写委员会 编

开明出版社
KAIMING PRESS

封面设计　北京羽人创意设计中心

明天

责任编辑　刘维维　张文

ISBN 7-80077-975-0

9 787800 779756 >

定价：9.80元

大学专科小学教育专业教材

初　等　数　论

教材编写委员会　编

开　明　出　版　社

第一章　整数的整除性

初等数论是研究整数最基本的性质，是一门十分重要的数学基础课程.

整除理论是初等数论的基础，其中心内容是算术基本定理和最大公约数理论，本章就重点讨论整除理论. 为了使讨论自然和方便，在§1.1中先简述了整数加法、减法及乘法运算的一些性质，然后从数论中的最基本概念——整除出发，讨论奇数、偶数的有关性质，引入带余数除法和质数、合数概念，然后介绍质数的基本性质、最大公约数与最小公倍数有关性质与理论，进而证明算术基本定理并研究带余数除法的发展——辗转相除法. 最后介绍数的 k 进制和高斯函数、费马数、完全数、梅塞内数.

§1.1　整　除

一、整除

自然数，也叫正整数，就是我们熟悉的

$$1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots$$

我们用 N 表示全体自然数所组成的集合. 整数就是指正整数、负整数和零，即

$$\cdots,-n-1,-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n,n+1,\cdots$$

我们用 Z 表示全体整数所组成的集合.

以后，如果没有特殊声明，将用

$$a,b,c,\cdots\text{或}\ \alpha,\beta,\gamma,\cdots$$

等字母表示整数. 当几个字母连写时,表示将这几个字母连乘起来,如

$$abcd = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

当几个字母连写在一起,并在上面标有横线时,字母都代表数字,如 $\overline{abcd}$ 表示千位、百位、十位、个位数字分别为 a,b,c,d 的一个四位数,而且 $a\neq 0$. 一般有

$$\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0} = a_n\times 10^n + a_{n-1}\times 10^{n-1} + \cdots + a_2\times 10^2 + a_1\times 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \quad (a_i \text{ 全是数字}, i=0,1,\cdots,n, a_n\neq 0, n\in \mathrm{N}\cup\{0\}).$$

在整数集合中可以作加法、减法、乘法运算,即任意两个整数的和、差、积还是整数. 但是整数除整数,商不一定是整数. 究竟什么样的整数除以什么样的整数商才得整数,就是我们要研究的一个重要内容——整数的整除性.

定义 设 $a,b\in \mathrm{Z}, b\neq 0$,如果存在 $q\in \mathrm{Z}$,使 $a=bq$,则称 a 能被 b 整除,亦叫 b 整除 a,记作 $b|a$. 如 a 不能被 b 整除,记作 $b\nmid a$.

当 $b|a$ 时,就称 a 是 b 的倍数,b 是 a 的约数. 若 $b|a, b\neq \pm a, a\neq 0, b\neq \pm 1$,就称 b 是 a 的真(非显然)约数.

由上述定义及四则运算的有关性质,立即可推出下述有关整除的性质.

$$1|a;\quad b|0;\quad a|a$$

当 $a|b$,且 $|b|<|a|$,则 $b=0$.

定理 1.1(1)若 $a|b$,则 $(-a)|b, a|(-b), (-a)|(-b), |a|\,\big|\,|b|$,反之亦然;

(2)若 $a|b, b|c$,则 $a|c$;

(3)若 $a|b, a|c$, x、y 为任意整数,则 $a|(bx+cy)$,反之亦然;

(4)若 $m\neq 0$,则 $a|b$ 的充分且必要条件是 $ma|mb$;

(5)若 $a|b, b|a$,则 $a=\pm b$;

(6)若 $a,b\in \mathrm{N}, a|b$,则 $a\leqslant b$;

(7)若 a 是 b 的真约数，则 $1<|a|<|b|$.

证明 (1) $\because a|b$，$\therefore b=aq(q\in Z)$，而 $aq=(-a)(-q)$，故 $b=(-a)(-q)$，则 $(-a)|b$；

$\because (-a)|b$，$\therefore b=(-a)q=a(-q)$

则 $a|b$ （余略）

(2) $\because a|b, b|c$,

$\therefore b=aq_1, c=bq_2(q_1,q_2\in Z), c=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)(q_1q_2\in Z)$

则 $a|c$

(3) $\because$ $a|b, a|c$,

$\therefore b=aq_1, c=aq_2 \quad (q_1,q_2\in Z)$,

$bx+cy=aq_1x+aq_2y=a(q_1x+q_2y) \quad ((q_1x+q_2y)\in Z)$

则 $a|(bx+cy)$

$\because$ x、y 是任意整数，$a|(bx+cy)$，取 $x=1, y=0$ 及 $x=0, y=1$，则有 $bx+cy=b, bx+cy=c$

$\therefore$ $a|b, a|c$.

(4) $\because$ $m\neq 0, a|b$，$\therefore$ $b=aq(q\in Z)$

$$mb=m(aq)=(ma)q \qquad (ma\neq 0)$$

则 $ma|mb$. 这就证明了必要性.

$\because$ $ma|mb$，$\therefore$ $mb=(ma)q$

$\because$ $m\neq 0$，$\therefore$ $b=aq$

则 $a|b$

故 $m\neq 0, a|b$ 的充分必要条件是 $ma|mb$.

(5) $\because$ $a|b, b|a$

$\therefore$ $b=aq_1, a=bq_2(q_1,q_2\in Z)$，$a=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)$

$\because$ $a\neq 0$，$\therefore$ $q_1q_2=1$

$\because$ $q_1,q_2\in Z$，$\therefore$ $q_1=\pm 1, q_2=\pm 1$

则 $a=\pm b$.

(6)由上面的(1)与 $a|b$ 可以推出：$|b|=|a||q|$.

$\because\ a,b\in \mathrm{N}$，$\therefore\ b=a|q|>0$，而 $|q|\geqslant 1$，$\therefore\ a\leqslant b$

(7) $\because\ a\neq 0, a\neq \pm 1$，$\therefore\ |a|>1$

$\because\ a|b$，$\therefore\ |b|=|a||q|$

$\because\ b\neq 0$，$\therefore\ |b|>0$

故 $|b|\geqslant |a|$ $\because\ a\neq \pm b$

$\therefore\ |b|>|a|$，则 $1<|a|<|b|$

定理得证.

定理 1.2 设 a,b 是给定的两个整数，且 $b\neq 0$，则一定存在唯一的一对整数 q 和 r，满足 $a=bq+r$，$0\leqslant r<|b$.

证明 （先证存在性）

(1)当 $b>0$，将 b 的倍数值所对应的点按从小到大的次序在数轴上标出(见图 1-1-1)，再将 a 值所对应的点也在同一数轴上标出，若 a 值对应的点与数轴上的某一点重合，则

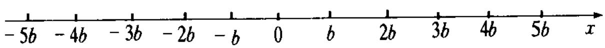

图 1-1-1

$a=bq$，即 $a=bq+r, r=0$

如 a 值所对应的点与数轴上的任一点均不重合，则它一定处在某相邻两点之间，即有确定的 q，使 $bq<a<b(q+1)=bq+b$

$$\therefore\quad 0<a-bq<b=|b|$$

令 $a-bp=r$，则有

$$a=bq+r,\quad 0<r<|b|.$$

(2)当 $b<0$，将 b 的倍数值所对应的点按从小到大的次序在数轴上标出(见图 1-1-2)，再将 a 值所对应的点也在同一数轴上标出. 若 a 值对应的点与数轴上的某一点重合，则

$$a=bq，即$$

$$a=bq+r,\quad r=0$$

如 a 值所对应的点与数轴上的任一点均不重合，则它一定处在

某相邻两点之间，即有确定的 q，使 $bq<a<b(q-1)=bq-b$

$$0<a-bq<-b$$

令 $a-bq=r$，则有

$$a=bq+r,0<r<-b=|b|$$

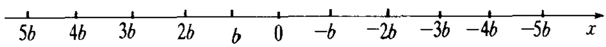

图 1-1-2

综上所述，对给定的整数 $a,b(b\neq0)$，有确定的一对整数 q,r，使

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<|b|.$$

（再证唯一性）

对于给定的整数 $a,b(b\neq0)$，如果有两对整数 $q_1,r_1;q_2,r_2$ 满足

$$a=bq_1+r_1,\quad 0\leqslant r_1<|b| \qquad ①$$

$$a=bq_2+r_2,\quad 0\leqslant r_2<|b| \qquad ②$$

不妨设 $r_1\geqslant r_2$，由①式和②式得

$$r_1-r_2=(q_2-q_1)b,\quad 0\leqslant r_1-r_2<|b|$$

若 $r_1>r_2$，即 $r_1-r_2>0$，则由上式及定理 1.1(6)可以推出 $|b|\leqslant|r_1-r_2|=r_1-r_2$，这与 $r_1-r_2<|b|$ 矛盾，所以必有 $r_1=r_2$，进而可推出 $q_1=q_2$.

综上所述，结论成立.

称 q,r 分别为**被除数** a 除以**除数** b 的(不完全)**商和余数**，定理 1.2 又称为**带余(数)除法**定理，它是初等数论证明中最重要、最基本、最直接的工具. 当 $a=bq+r,0\leqslant r<|b|$ 时，$b|a$ 的充要条件是 $r=0$.

例 1 两个整数相除，得商数是 12 和余数是 26. 另外，被除数、除数、商数及余数的和等于 454，被除数是多少？

解 设被除数、除数分别为 a,b. 根据带余除法和已知条件得：

$$a=12b+26,\quad a+b+12+26=454$$

则有 $12b+26+b+12+26=454$

$$13b=390,\quad b=30$$

$$a=30\times 12+26=386$$

故被除数是 386.

例 2 若 $N=2^{1996}-2^{1994}+2^{1992}-2^{1990}+2^{1988}-2^{1986}$,则 $9\mid N$.

证明 $\because$
$$\begin{aligned} N &= 2^{1996}-2^{1994}+2^{1992}-2^{1990}+2^{1988}-2^{1986} \\ &= 2^{1986}(2^{10}-2^8+2^6-2^4+2^2-1) \\ &= 2^{1986}(2^2-1)(2^8+2^4+1) \\ &= 2^{1986}\times 3\times 273 \\ &= 9\times(91\times 2^{1986}) \end{aligned}$$

$\therefore$ $9\mid N$.

例 3 若 $a,b\in Z$,且 $5\mid(a+b)$,则 $25\mid(a^5+b^5)$.

证明 $\because$
$$\begin{aligned} (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\ &= (a^5+b^5)+10(a+b)a^2b^2+5ab(a+b)(a^2-ab+b^2) \end{aligned}$$

$5\mid(a+b)$

$\therefore$ $25\mid(a+b)^5,\ 25\mid 10(a+b)a^2b^2$

$25\mid 5ab(a+b)(a^2-ab+b^2)$

而 $a^5+b^5=(a+b)^5-10(a+b)a^2b^2-5ab(a+b)(a^2-ab+b^2)$

则 $25\mid(a^5+b^5)$.

例 4 已知 $n\in Z^+$ 且 $4\nmid n$,求证:$5\mid(1^n+2^n+3^n+4^n)$.

证明 $\because$ $n\in Z^+$, $4\nmid n$

$\therefore$ $n=4q+r \qquad (r=1,2,3,q\in Z$ 且 $q\geqslant 0)$

则
$$\begin{aligned} 1^n+2^n+3^n+4^n &= 1^{4q+r}+2^{4q+r}+3^{4q+r}+4^{4q+r} \\ &= 1^r+16^q\times 2^r+81^q\times 3^r+256^q\times 4^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16^q\times 2^r &= (15+1)^q\times 2^r \\ &= 15(15^{q-1}+C_q^1 15^{q-2}+\cdots+q)\times 2^r+2^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 81^q\times 3^r &= (80+1)^q\times 3^r \\ &= 80(80^{q-1}+C_q^1 80^{q-2}+\cdots+q)\times 3^r+3^r \end{aligned}$$

$$256^q\times 4^r=(255+1)^q\times 4^r$$

$$=255(255^{q-1}+C_q^1 255^{q-2}+\cdots+q)\times 4^r+4^r$$

$\because$ $5|15$，$5|80$，$5|255$

$\therefore$ $5|15\times(15^{q-1}+C_q^1 15^{q-2}+\cdots+q)\times 2^r$

$5|80\times(80^{q-1}+C_q^1 80^{q-2}+\cdots+q)\times 3^r$

$5|255\times(255^{q-1}+C_q^1 255^{q-2}+\cdots+q)\times 4^r$

则 $5|[15\times(15^{q-1}+C_q^1 15^{q-2}+\cdots+q)\times 2^r+80\times(80^{q-1}+C_q^1 80^{q-2}+\cdots+q)\times 3^r+255\times(255^{q-1}+C_q^1 255^{q-2}+\cdots+q)\times 4^r]$

当 $r=1$ 时，$1^r+2^r+3^r+4^r=10$，$5|10$

当 $r=2$ 时，$1^r+2^r+3^r+4^r=30$，$5|30$

当 $r=3$ 时，$1^r+2^r+3^r+4^r=100$，$5|100$

$\therefore$ 当 $n\in Z^+$ 且 $4\nmid n$ 时，$5|(1^n+2^n+3^n+4^n)$.

例 5 若 $n\in Z,k\in Z^+$，则

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

的值是整数.

证明 当 $n=0$，$n(n-1)\cdots(n-k+1)=0$，$k!|0$，结论成立.

当 $n>0$ 时，如果 $n\geqslant k$，则 $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=C_n^k$. C_n^k 就是从 n 个元素中取 k 个元素的组合数，组合数是整数，结论成立.

当 $0<n<k$ 时，在 $n,n-1,\cdots,n-k+1$ 这 k 个数中一定有一个数是 0，即

$n(n-1)\cdots(n-k+1)=0$，$k!|0$，结论成立.

当 $n<0$ 时，令 $n=-n'$，$n'>0$，此时

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
$$=\frac{-n'(-n'-1)\cdots(-n'-k+1)}{k!}$$
$$=(-1)^k\frac{n'(n'+1)\cdots(n'+k-1)}{k!}$$

$\because$ $$n'+k-1\geqslant k$$

$$\therefore \qquad \frac{n'(n'+1)\cdots(n'+k-1)}{k!}=C_{n'+k-1}^{k}$$

$\because C_{n'+k-1}^{k}$是组合数，　$\therefore$　$(-1)^{k}C_{n'+k-1}^{k}\in Z$，结论成立. 则当 $n\in Z, k\in Z^{+}$时

$$k!\mid n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

例 5 告诉我们：k 个连续整数的乘积一定能被 $k!$ 整除.

例 6　如果 $a,b\in Z$，且 $a\neq b$，当 $n\in Z^{+}$时，则有 $(a-b)\mid(a^{n}-b^{n})$.

证明　如果 $b=0$，

$\because$　$a\neq 0$，由 $a\mid a^{n}$，故有

$$(a-b)\mid(a^{n}-b^{n})$$

如果 $b\neq 0$，构造一个首项为 b^{n-1}，公比为$\frac{a}{b}$的等比数列：

$$b^{n-1},ab^{n-2},\cdots,a^{n-2},a^{n-1}$$

根据等比数列的求和公式得：

$$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-2}b+a^{n-1}=\frac{a^{n}-b^{n}}{a-b}$$

变形有

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^{n}-b^{n}$$

$\because$　$a-b\neq 0$，　$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\in Z$

$$\therefore \qquad (a-b)\mid(a^{n}-b^{n})$$

结论成立.

例 7　当 n 是正整数时，求证：$23\mid(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})$.

证明

$$\begin{aligned}&5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}\\ =&5\times 25^{n}+16\times 2^{n}+2\times 2^{n}\\ =&5\times 25^{n}+18\times 2^{n}\\ =&5\times 25^{n}+(23-5)\times 2^{n}\\ =&23\times 2^{n}+5\times(25^{n}-2^{n})\end{aligned}$$

$\because$　$23\mid 23\times 2^{n}$，　$25-2=23$，　$(25-2)\mid(25^{n}-2^{n})$

$\therefore$　$23\mid 5(25^{n}-2^{n})$，　$23\mid(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})$.

例 8 已知 $m,n,l\in Z^+$，求证：$\frac{(m+n+l)!}{m!\ n!\ l!}$总是整数.

证明

$\because \quad (m+n+l)!$

$=1\cdot 2\cdot \cdots \cdot m(m+1)(m+2)\cdot \cdots \cdot (m+n)(m+n+1)$

$\cdot \cdots \cdot (m+n+l)$

$=m!\ [(m+1)(m+2)\cdots(m+n)][(m+n+1)\cdots(m+n+l)]$

$\therefore \quad \frac{(m+n+l)!}{m!\ n!\ l!}$

$=\frac{m!}{m!}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!}\cdot$

$\frac{(m+n+1)(m+n+2)\cdots(m+n+l)}{l!}$

$\because \quad n!\mid(m+1)(m+2)\cdots(m+n)$

$l!\mid(m+n+1)(m+n+2)\cdots(m+n+l)$

$\therefore \quad \frac{(m+n+l)!}{m!\ n!\ l!}$ 的值是整数.

二、奇数与偶数

定义 如 $2\mid a$，称 a 为偶数，常用 $2k$ 表示($k\in Z$)，大于零的偶数叫双数.

如 $2\nmid a$，称 a 为奇数，常用 $2k+1$ 或 $2k-1$($k\in Z$)表示，大于 0 的奇数叫单数.

奇数与偶数有如下的一系列性质.

性质 1 任意几个偶数的和是偶数；

任意一个整数与偶数的积是偶数，特别时有，n 个偶数的积是 2^n 的倍数($n\in Z^+$).

性质 2 双数个奇数的和是偶数；

单数个奇数的和是奇数；

任意几个奇数的积仍是奇数，特别时有，(奇数)^n 还是奇数($n\in Z^+$).

性质 3　奇数与偶数的和是奇数.

性质 4　任一奇数与任一偶数不相等.

从奇数与偶数的定义和有关运算性质,不难得到上述性质的证明(证明略).

例 9　试证任意几个偶数的和是偶数.

证明　设 $k(k\geqslant 2)$ 个偶数分别为 $2m_i(i=1,2,\cdots,k)$

$\because\quad 2m_1+2m_2+\cdots+2m_k=2(m_1+m_2+\cdots+m_k)$

而　$m_1+m_2+\cdots+m_k\in Z$,　$\therefore\quad 2\mid 2(m_1+m_2+\cdots+m_k)$

则　$2m_1+2m_2+\cdots+2m_k$ 是偶数,结论成立.

例 10　已知 $x,y\in Z$,且 $x^2-4y=1$,试讨论 x,y 的奇偶性.

解　(1)若 x 是奇数,则 $x=2k+1$

$\because\quad x^2+4y=1$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{4}(x^2-1)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)$$

$$=\frac{1}{4}(2k+2)\cdot 2k=k(k+1)$$

而　$2!\ |k(k+1)$,故 y 是偶数.

(2)若 x 是偶数,则 $x=2k$,此时

$$y=\frac{1}{4}(x^2-1)=\frac{1}{4}(4k^2-1)$$

$$=k^2-\frac{1}{4}\overline{\in}Z$$

故 x 不能是偶数.

由(1)、(2)知,x 是奇数,y 是偶数.

例 11　已知 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,b 全是整数,且 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$,试证:这 6 个数不能都是奇数.

证明　(采用反证法)

假设这 6 个数全是奇数,则有

$$a_1=2k_1+1,\qquad a_2=2k_2+1,\qquad a_3=2k_3+1,$$

$$a_4=2k_4+1,\qquad a_5=2k_5+1,\qquad b=2k+1.$$

$\because \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$

$\therefore \quad 4k_1(k_1+1)+4k_2(k_2+1)+4k_3(k_3+1)+4k_4(k_4+1)+4k_5(k_5+1)+5=4k(k+1)+1$，即

$$k_1(k_1+1)+k_2(k_2+1)+k_3(k_3+1)+k_4(k_4+1)+k_5(k_5+1)+1=k(k+1)$$

根据相邻两整数之积是偶数和性质 1，所以有 $k_1(k_1+1)+k_2(k_2+1)+k_3(k_3+1)+k_4(k_4+1)+k_5(k_5+1)$ 与 $k(k+1)$ 都是偶数. 这一来，上述等式的等号左边是奇数，等号右边是偶数，根据性质 4，矛盾. 所以这 6 个数不能全是奇数.

例 12 能否在下式的各□内填入加号或减号，使下式成立，为什么？

$$1\square2\square3\square4\square5\square6\square7\square8\square9=10.$$

解 因为 1□2 当□内不管填"＋"或"－"，1□2 是奇数，所以(1□2)□3 式中 3 前面□内不管填"＋"或"－"，1□2□3 是偶数. 同理，不管各□填入"＋"或"－"，

1□2□3□4 是偶数；

1□2□3□4□5 是奇数；

1□2□3□4□5□6 是奇数；

1□2□3□4□5□6□7 是偶数；

1□2□3□4□5□6□7□8 是偶数；

1□2□3□4□5□6□7□8□9 是奇数，而 10 是偶数. 根据性质 4，不管□内填"＋"、"－"，

$$1\square2\square3\square4\square5\square6\square7\square8\square9\neq10.$$

例 13 试证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots(n\in Z^+)$ 无论加到哪一项为止，其结果都不是整数.

证明 $\because$ 对于任一 $n\in Z^+$，一定存在非负整数 α，使 $2^\alpha\leqslant n<2^{\alpha+1}$.

将和式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$通分，通分后的公分母为 $2^{\alpha}k$，k 是奇数. 这时除$\frac{1}{2^{\alpha}}$通分后其分子变成奇数 k 外，其余各分数的分子都至少乘了一个 2，均为偶数.

因为通分后分母是 $2^{\alpha}k$，分子值是奇数，而任一奇数均不能被偶数整除，所以其结果不是整数.

例 14　设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数都是整数，且 c 是奇数，并有某一奇数 β，使 $f(\beta)$是奇数，求证：$f(x)=0$ 无奇数根.

证明　$\because$　$f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c$，$c$ 是奇数，

$\therefore$　$f(\beta)-c=\beta(a\beta+b)$是偶数.

$\because$　β 是奇数，$\therefore a\beta+b$ 是偶数，故 $a\beta$ 与 b 同为奇数或同为偶数.

$\because$　β 是奇数，$\therefore a,b$ 同为奇数或同为偶数.

(1)当 a,b 同是奇数时，对于任一奇数 x'，$f(x')=ax'^2+bx'+c$，

$\because$　a,b,x'全是奇数，

$\therefore$　ax'^2,bx'也全是奇数.

$\because$　c 是奇数，$\therefore$　$f(x')=ax'^2+bx'+c$ 是奇数，而 0 是偶数. 根据上述性质 4，$f(x')\neq 0$，结论成立.

(2)当 a,b 同是偶数时，

对于任一奇数 x'，ax'^2+bx'是偶数，

$\because$　c 是奇数，$\therefore f(x')=ax'^2+bx'+c$ 是奇数，同样 $f(x')\neq 0$.

由(1)，(2)可知，$f(x)=0$ 无奇数根.

例 15　某展览馆是由 5×5 个小方房组成的 25 间展室(见图 1-1-3)，相邻的两展室之间有一门相通，只有一间展室为进出口房间，一人打算从进口展室开始，不重复也不遗漏地依次看完每一展室，然后出来，问能否实现?

解　把图 1-1-3 中的 25 个展室依次按 1，2，…，25 顺序编号，然后把奇数号涂白色，偶数号涂黑色(见图 1-1-4).

入口→

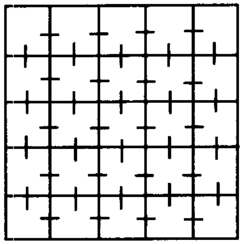

图 1-1-3

入口→

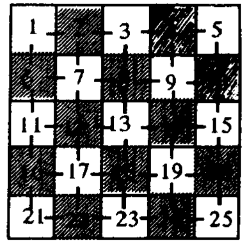

图 1-1-4

根据此人的希望，他必须依次由白室走入黑室，经过 25 道门最后到白室，然而无论如何选择路线，按其要求走的结果必然是：

$$\text{白}\xrightarrow{(1)}\text{黑}\xrightarrow{(2)}\text{白}\xrightarrow{(3)}\text{黑}\xrightarrow{(4)}\text{白}\xrightarrow{(5)}\cdots\text{黑}\xrightarrow{(24)}\text{白}\xrightarrow{(25)}\text{黑}$$

即经过 25 道门后，所到展室一定是黑室而不是白室，所以，此人的希望不能实现.

三、数的整除特征

数 a 被数 b 整除的特征就是指 $b|a$ 的充分必要条件.

定理 1.3 若 $A=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$，则

(1)2(或 5)$|A$ 的充要条件是 2(或 5)$|a_0$；

(2)4(或 25)$|A$ 的充要条件是 4(或 25)$|\overline{a_1a_0}$；

(3)8(或 125)$|A$ 的充要条件是 8(或 125)$|\overline{a_2a_1a_0}$.

定理 1.4 若 $A=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$，则

3(或 9)$|A$ 的充分必要条件是 3(或 9)$|(a_n+\cdots+a_1+a_0)$.

证明
$$\begin{aligned}A&=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}\\&=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\\&=a_n\times(\underbrace{99\cdots99}_{n\text{个}9}+1)+a_{n-1}\times(\underbrace{99\cdots99}_{(n-1)\text{个}9}+1)+\cdots+a_2\\&\quad\times(99+1)+a_1\times(9+1)+a_0\\&=9\times(\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}1}a_n+\underbrace{11\cdots11}_{(n-1)\text{个}1}a_{n-1}+\cdots+11a_2+a_1)\end{aligned}$$

$$+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$$

（先证充分性）

$\because$ $3(或\ 9)\mid(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$

$3(或\ 9)\mid 9\times(\underbrace{11\cdots11}_{n个1}a_n+\underbrace{11\cdots11}_{(n-1)个1}a_{n-1}+\cdots+11a_2+a_1)$

$\therefore$ $3(或\ 9)\mid[9\times(\underbrace{11\cdots11}_{n个1}a_n+\underbrace{11\cdots11}_{(n-1)个1}a_{n-1}+\cdots+11a_2+a_1)$

$+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)]=A.$

（再证必要性）

$\because$ $3(或\ 9)\mid A$

$3(或\ 9)\mid 9\times(\underbrace{11\cdots11}_{n个1}a_n+\underbrace{11\cdots11}_{(n-1)个1}a_{n-1}+\cdots+11a_2+a_1)$

$\therefore$ $3(或\ 9)\mid[A-9\times(\underbrace{11\cdots11}_{n个1}a_n+\underbrace{11\cdots11}_{(n-1)个1}a_{n-1}+\cdots+11a_2+a_1)]$

$=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0$

结论成立.

定理 1.5 $11\mid A$ 的充分必要条件是 A 的奇数位数字和与偶数位数字和的差能被 11 整除.

证明 不妨设 $A=\overline{a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_2a_1a_0}$

$$A=[(a_{2k}10^{2k}-a_{2k})+(a_{2k-1}10^{2k-1}+a_{2k-1})+\cdots+(a_210^2-a_2)+(a_110+a_1)]+(a_{2k}+a_{2k-2}+\cdots+a_2+a_0)-(a_{2k-1}+a_{2k-3}+\cdots+a_1)$$

$$=[a_{2k}(10^{2k}-1)+a_{2k-1}(10^{2k-1}+1)+\cdots+a_2(10^2-1)+a_1(10+1)]+[(a_{2k}+a_{2k-2}+\cdots+a_2+a_0)-(a_{2k-1}+a_{2k-3}+\cdots+a_1)]$$

由于 $10^{2i}-1=\underbrace{9\,9\cdots99}_{2i个9}$

$\therefore$ $11\mid(10^{2i}-1)$，即 $11\mid a_{2i}(10^{2i}-1)$ $(i=1,2,\cdots,k)$

$10^{2i-1}+1=(10+1)(10^{2i-2}-10^{2i-3}+\cdots+1)$