成人高等教育自学辅导丛书

高等数学自学指导

上　册

胡　林　主编

翟连林　谭　鼐　编著

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系“成人高等教育自学辅导丛书”之一《高等数学自学指导》(上册)。

本书计五篇十四章，主要内容有：函数与极限、连续函数、一元函数的导数与微分、一元函数的不定积分与定积分、级数、向量代数与空间解析几何等。各章配有习题，书末附答案或提示。

本书可作理工类电视大学、职工大学、业余大学、函授大学的教材或辅导书，也可作参加自学高考的自学读本。

成人高等教育自学辅导丛书

高等数学自学指导

上 册

胡 林 主编

翟连林 谭 瘛 编著

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 22.5印张 500千字

1986年2月第一版 1986年2月北京第一次印刷

印数00001—28000册 定价4.10元

书号 7143·60 33

前　言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，智力开发的重要性更加突出了。我们迫切需要有一支高水平的职工队伍，以加速实现技术现代化、管理现代化，提高经济效益。这就要求在普遍提高职工的政治、文化、技术、业务素质的同时，尽快从现有职工中培养造就大批的专业技术干部和管理干部，形成一支在数量上能基本满足要求，质量上能掌握现代科学技术和经营管理知识，专业配套的职工队伍。可以说，大力加强职工教育，培养各类人才，是摆在我们面前的一项十分重要而又急迫的任务。

这套“成人高等教育自学辅导丛书”就是根据当前加强职工教育的形势和需要而专门组织编写的。

“丛书”以“面向实际，面向生产，为提高职工队伍素质，提高经济效益服务”作为编写指导思想；内容紧密结合成人高等教育理工类（或财经类）部分课程的教学大纲和电视大学及一些函授大学、职工大学、业余大学的教材；在布局、选材、体例和编写形式上尽量适应成人自学的特点。所以，非常适用于理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学学员作为学习辅导书，或函授大学作为函授教材；对于广大自学读者，则是帮助他们通过自学高等考试的一种自学读本。

为了切合读者的实际需要，提高学习效果，“丛书”中的每一册都包括基本概念、重点和难点解释、典型例题分

析、总结或提示以及思考与练习等几部分内容，并配有适量的作业测验题（附答案）和电大试题选解。

这套丛书共包括十一门课程，十三册：

高等数学自学指导（上、下册）

线性规划自学指导

线性代数自学指导

概率论与数理统计自学指导

常微分方程自学指导

逻辑代数与BASIC语言自学指导

复变函数自学指导

微积分自学指导（财经类）

普通物理自学指导（上、下册）

普通化学自学指导

物理化学自学指导

本书系《高等数学自学指导》（上册），全书共分五篇计十四章。第一篇分析引论：第一、二、三章给出函数与极限这两个最基本最重要的概念，并建立了极限理论；第四章介绍连续函数的概念及有关性质。第二篇一元函数微分学：第五、六章给出导数与微分这两个重要概念，并介绍它们的计算方法；第七章以微分中值定理为中心，介绍微分学一些重要应用。第三篇一元函数积分学：第八、九两章给出不定积分与定积分这两个重要概念，并介绍它们的计算方法及有关性质；第十章介绍定积分在力学与几何中的一些应用。第四篇级数：第十一章给出数值级数的收敛概念及其判别方法；第十二章着重研究幂级数的有关理论，并介绍富里叶级数。第五篇向量代数与空间解析几何：第十三章介绍向量的

概念及其运算；第十四章在建立空间直角坐标系的基础上，讨论了直线、平面及二次曲面的有关图形与性质。

本书的编写得到王湘浩教授的关怀与指导，并经张灿英同志审阅，史天勤、姚正安、马少华三位同志协助整理和配备习题。

参加这套丛书编写工作的都是有经验的高等学校教师或成人教育工作者，其中有些同志还讲授过电视大学的有关课程或担任过电大辅导课主讲教师。“丛书”融汇了他们多年的教学经验和心得体会，更鲜明地具有电视教学及自学、辅导、函授多用的特色。

在编写过程中，我们得到各课程的有关教授和专家的关怀和指导，有些同志直接参予审阅、整理等工作，在此一并表示深切的谢意。

组织编写这类面向成人读者，自学、辅导、电教、函授多用的大专读本还是第一次，欢迎读者对“丛书”的内容、布局、结构、形式等提出宝贵意见，以帮助我们改进工作，提高“丛书”质量。

胡　林

1985年7月

序

这是一本难得的好教材，它对于没有机会进大学或者在电大、函大、职大、夜大学习而缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学员特别适合。本书的编者一直从事数学基础课教学，具有丰富的教学经验，这本书充分反映了编者们这些宝贵的教学经验。

一般教材需要经过教师在课堂上的再创造才能发挥作用，而本书则体现出教师讲课时的这种再创造，使读者感到好象是在课堂上亲聆教师的讲授。

经验告诉我们，学生感到困难、深入不下去的主要原因是缺乏自学能力，不善于给自己提出问题，本书在这一方面也下了很大功夫。编者在展开教材内容的同时，引导读者去提出问题、探讨问题、解决问题，提出了一条怎样深入学习的途径。

本书也是一本很好的教学参考书，它不仅在内容上涉及面广，而且更重要的是提供了一种可取的教学方法，这对于教师，特别是刚从事教师工作的青年教师具有很好的借鉴作用。

由于本书切合学员的学习实际，虽然增加了一定篇幅，但并不显得繁琐。相反，这本书在日益蓬勃发展的成人教育事业中，必将发挥积极良好的作用，为广大读者所欢迎，特代为作序。

王湘浩

1985.4. 长春

注　王湘浩教授系中国科学院学部委员。

目　　录

第二篇 一元函数微分学

第三篇　一元函数积分学

第四篇 级 数

第五篇 向量代数与空间解析几何

绪　论

理工科的高等数学是以解析几何为前提、以微积分为主体包括常微分方程和高等代数在内的基础知识所组成的一门综合性的课程.正因为本课程的主体是微积分,所以有必要对微积分产生的历史背景、研究对象及其在科学技术与数学发展中的作用,先作一个简要的介绍.

1.微积分产生的历史背景

十五世纪以后的欧洲,随着资本主义的兴起,生产力发展到了一个新阶段,资产阶级用一种新的阶级剥削形式代替了旧的封建主义的剥削形式。由于资本主义生产方式更适合于生产力发展的需要,在资本主义社会处于上升阶段,正如马克思和恩格斯所指出的"资产阶级在它的不到一百年的阶级统治中所创造的生产力,比过去一切世代创造的全部生产力还要多,还要大".生产实践的发展,向自然科学提出了新问题、也提供了新条件,因而整个自然科学也相应地有了发展,机器的制造、舟车的通行、桥梁的兴建、运河的开凿、城市的建筑以及航海技术的发展,迫切地需要力学与天文学作相应的发展.以天文学为例,哥白尼❶提出的日心说标志着科学从神权学说的黑暗统治下的解放,继之,刻卜勒❷总结了前人长期观测的数据提出了行星运动的三大定

---

❶ 哥白尼(Copernicus, 1473—1543),波兰天文学家,日心说的创立人.

❷ 刻卜勒(Kepler, 1571—1630) 德国天文学家.

律．伽里略●系统地研究了落体运动，在历史上第一次把数学方法与实验方法结合起来，提出了惯性定律，明确了速度与加速度的区别．这些，在科学方法上有重要的意义．正是在这些先驱性工作的基础上，牛顿●发现了万有引力定律，提出了著名的牛顿三定律，从而奠定了古典力学的基础．在牛顿力学里所遇到的各种数学问题中，其基本特征就是需要处理变量问题．例如，已知运动路程 S 和时间 t 的关系 $S=S(t)$，求运动速度 v；反过来，已知速度 v 和时间 t 的关系 $v=v(t)$，求物体运动的路程 S．诸如此类的力学问题就要求我们突破传统的常量数学的范围，建立新的数学理论，微积分也就应运而生．

微积分的产生不仅是由于力学发展的需要，同时也是数学内部发展的产物．在初等数学中存在着许多问题，它们在理论上没有得到解决，即使能够解决，但从方法上看也是不够简便的．例如，代数中的无理数的近似计算、方程的近似解、初等函数的性质、极值及作图等问题；几何中的曲线的切线与长度、平面图形的面积、立体图形的体积与表面积等问题，都需要新的数学理论和方法来给予解决，这个新的数学理论就是微积分．

2.微积分的研究对象

微积分是解决什么实际问题的呢？看一看下面两个典型的例子，我们就可以大致地了解这个问题．

（1）自由落体运动的瞬时速度：物体受重力作用自由下落，运动从0开始，到时刻 t 时下落的路程为 S，由公式

● 伽里略(Galileo，1564—1642)，意大利物理学家、天文学家．

● 牛顿(Newton，1642—1727)，英国物理学家．

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g\text{为重力加速度})$$

确定，这个运动不是等速的，物体在下落时间内每时刻的速度都不同。今求物体下落到时刻$t=3$秒时的"瞬时速度v"。

设物体在3秒时的位置为M_0，经过的路程为$S_0=\overline{OM_0}$（如图0.1）。

$$S_0=\frac{1}{2}g\cdot 3^2.$$

再设落体在时刻t的位置为M，经过的路程$S=\overline{OM}$是：

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

从第三秒到t秒这段时间内，落体的平均速度$\bar{v}$是：

$$\bar{v}=\frac{S-S_0}{t-3}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\cdot 3^2}{t-3}=\frac{1}{2}g\frac{t^2-3^2}{t-3}$$

$$\left[=\frac{1}{2}g(t+3)\right].$$

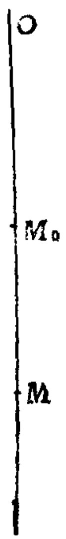

图 0.1

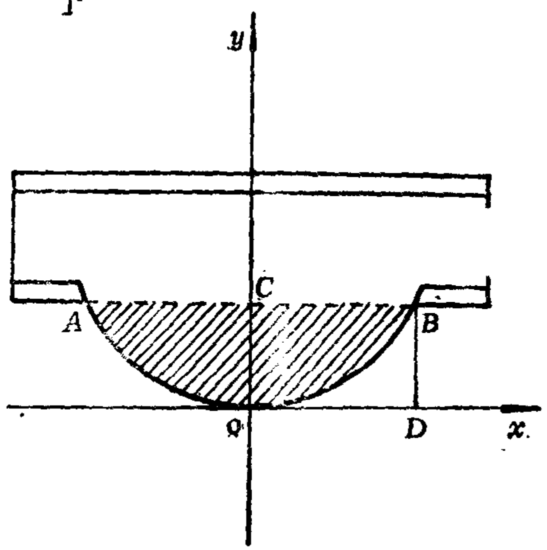

图 0.2

$\bar{v}$ 刻划了在这段时间内落体的平均快慢程度，但不是刻划在 $t=3$ 秒这一“瞬间”物体下落的快慢程度。不过，只要 t 愈接近 3，$\bar{v}$ 就愈接近这一瞬间的速度。因此，当 $t\to 3$ 时，$\bar{v}\to 3g$，数值 $3g$ 就是落体在 $t=3$（秒）时的瞬时速度 v，即

$$v=\lim_{t\to 3}\bar{v}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{2}g(t+3)=3g$$

类似这种极限问题，在自然现象中是非常普遍的。如力学中求物体运动的速度，角速度及加速度；物理、化学中求物质的比热、密度及浓度；几何学中求曲线的切线的斜率、升降及极值等等。把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决它们的简便方法（微分方法），这就是微分学的主要课题。

（2）平面图形的面积

在建筑工程中，为了提高效率、节省材料，有时将吊车梁做成鱼腹式的（图0.2），其曲线 AoB 是抛物线 $y=ax^2$。为了计算用料，我们需要计算阴影部分 $AoBC$ 的面积，但图形 $AoBC$ 的面积是图形 oBC 的面积的两倍，即长方形 $oDBC$ 的面积减去曲边三角形 oDB 的面积所得的差的两倍。所以，这个问题归结为求曲边三角形 oDB 的面积，为了便于分析问题，设曲边三角形 oDB 的曲边是抛物线 $y=x^2$，即在直角坐标系中，计算由抛物线 $y=x^2$、x 轴与直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积（如图0.3）。

在 x 轴上我们用分点：$\frac{1}{n}$、$\frac{2}{n}$、$\frac{3}{n}$、……、$\frac{n-1}{n}$（n 为正整数）将 oB' 分成 n 等分，以每一等分为下底作出矩形，使矩形的左上角碰到抛物线，这 n 个矩形底边长都是 $\frac{1}{n}$，它们的另一边的长分别是：

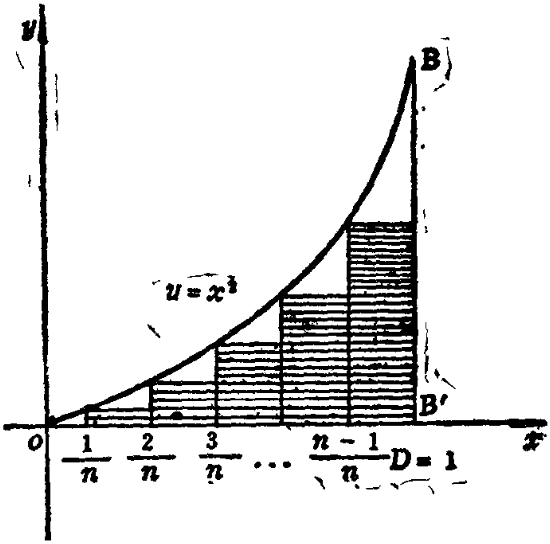

图 0.3

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

这 n 个矩形的面积之和是：

$$A_n=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

由上式可知，当 n 无限增大时，A_n就无限接近$\frac{1}{3}$，即当 $n\to\infty$时，$A_n\to\frac{1}{3}$，数值$\frac{1}{3}$就是这个平面图形的面积A。即

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

由于A_n是 n 个小矩形面积之和，因此这个极限又称为"和数

极限”。

和数极限问题，在自然现象中也很普遍，如力学求变力作功，质量中心及转动惯量；物理、化学中非均匀物质的质量、热量及压力；几何学中求曲线长度、面积及体积等等。把这些具体问题概括为一般数学问题，并找出解决它们的简便方法（积分方法），这就是积分学的主要课题。

微分学与积分学合称为微积分，它是以研究导数（微分）与积分的运算及其运用为对象的学科。

3.微积分的重要作用

微积分一经建立，就经受了生产实践和科学实验的严格检验，并卓著成效。例如在天文学中，利用以微积分为数学方法的天体力学方法，可以精确地计算出星体的轨道，甚至用以发现新行星——海王星。应用微积分，使物理学、力学都成了精确的定量科学，使得种种机械的制造成为可能。总之，微积分的出现是适应生产力发展的需要，而又大大推动了生产力的发展。

微积分的产生不仅解决了一大批初等数学所不能解决的问题，成为解决自然科学及工程技术中的数学问题的强有力的工具，而且也促进了数学从初等数学到高等数学的巨大转变和发展。

微积分产生前，数学已经历了几千年的发展，形成了两个数学分支，一是代数学，一是几何学。当时对函数的认识是极其初等的，还没有形成独立于代数与几何的分支。微积分产生后，不到三个世纪，便形成了一门庞大的以研究函数为对象的第三大数学分支——分析学。

在建立严密的极限理论后，以微积分为工具，不仅可以用来研究初等数学中的函数问题，而且可以进一步研究函数的

分析性质即连续性、可微性、可积性。以研究函数的分析性质为对象的学科就是数学分析.

数学分析是整个分析学的基础，它不仅促进了分析学的突飞猛进，而且也推动了代数学与几何学的蓬勃发展。在数学发展史上出现了空前繁荣的景象，产生了一大批新的数学分支。

首先，由数学分析直接发展起来的有《实变函数》与《复变函数》。

其次，从微积分的应用中分离出来的有《微分几何》、《常微分方程》与《数理方程》(《数理方程》是《变分法》、《积分方程》与《偏微分方程》的总称).

第三，运用分析学发展起来的有《概率论与数理统计》。

第四，在分析学的直接或间接的影响下，初等代数发展为《高等代数》，初等几何发展为《高等几何》(《高等几何》是《几何基础》、《非欧几何》与《射影几何》的总称)。

等等。

总之，微积分的出现是数学史上及自然科学史上的一件划时代的大事，其重要意义远远超出了数学范畴。

正因为微积分是进一步学习数学的基础，是某些专业基础课不可缺少的工具。因此我们必须正确地理解基本概念和基本理论，熟练地掌握运算方法，并不断地提高分析、概括及解决问题的能力。