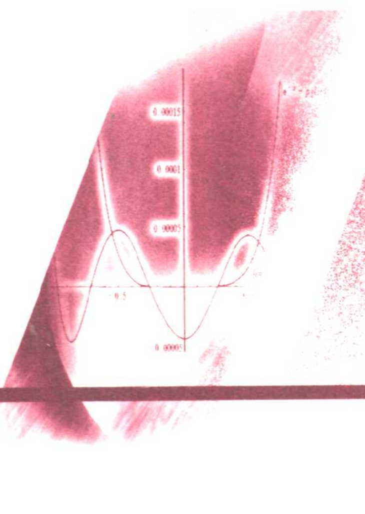
SHUZHIBIJIN

数值逼近

马富明 常玉堂



吉林大学
出版社

1BAB0026

数值逼近

马富明　常玉堂

责任编辑、责任校对：卢喜观　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市解放大路125号）长春市永昌福利印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　　2000年3月第1版
印张：8　　2000年3月第1次印刷
字数：197千字　　印数：1－700册

ISBN 7－5601－2350－3/O·254　　定价：11.00元

前　言

本书是为数学系信息与计算科学专业本科生所编写的一本教材，它是以吉林大学数学系原来使用过的几本数值逼近教材为基础的。

从我国高等学校建立计算数学专业以来的几十年间，数值逼近一直是该专业的基础课程之一，因而，各种版本的数值逼近教材不断涌现，它们各有特色。但随着科学技术的进步和教学改革的发展，新的问题和要求不断出现。正是基于这样一种情况，考虑到新的教学要求(特别是课时的缩减)，通过在吉林大学数学系讲授数值逼近课程的教学实践，我们重新编写了这本教材。与我们先前使用的教材相比，我们适当缩减了有关一致逼近理论的内容，而加强了平方逼近理论。我们的最终目的是给学生一本思路简洁明了、叙述与论证更易为本科二年级学生所接受和掌握的专业基础课教材。从这一点出发，我们将教材的内容作了重新编排，并将以前教材中涉及到计算几何的内容略去(我们假定学生以后有专门的课程研修这方面内容)。同时，为了方便读者学习相关的知识，我们也尽可能做到所用术语的规范化，许多名词的写法参考了全国自然科学名词审定委员会 1993 年公布的《数学名词》。

按照我们的实践，本书前五章内容可在不多于 60 学时内讲授完毕。

本书第一、二、六章由马富明执笔，第三、四、五章由常玉堂执笔；第一至第五章的习题由常玉堂编配，第六章习题由马富明编配。

在本书出版之际，编者谨向周蕴时、梁学章二位老师表示衷

心的谢意，没有他们的鼓励与支持，本教材的出版是不可能的。另外，编者还要对吉林大学数学系，特别是信息与计算科学专业各位老师给予我们的支持与帮助，表示诚挚的感谢。

限于编者水平，本书中缺点及错误在所难免，欢迎读者指正。

编 者

1999年6月

目　录

绪　论

数值逼近的理论与方法是计算科学中十分基本而又重要的内容，是每一位从事计算科学研究或应用的人必须了解的.

无论是对函数及其几何表示(曲线或曲面)进行理论上的研究，还是为着某些应用的目的，人们经常要以某种较为简单、或具有较好性质的函数对所研究的函数(或曲线、曲面)进行某种近似. 早在 18、19 世纪就初步形成，并且时至今日仍在发展的函数逼近理论，正是这种需求的产物. 随着计算机的发展，如何采用数值方法实现函数的逼近，既刺激了相关的数值分析方法的研究，又反过来促进了函数逼近理论自身的发展. 像近几十年来得到迅速发展的样条函数理论以及它们在各种科学与工程问题中的应用，正是这种规律的生动体现. 以我们之见，数值逼近就是以如何使用数值方法解决函数逼近问题为基本研究对象的一门课程，它是介于数学理论和其在实际问题中的应用之间的部分. 基于上述看法，本着面向大学本科生的目的，我们既不想把本书写成一本函数逼近论的理论专著，又不想把本书写成一本实用数值方法手册. 我们试图将函数逼近理论与数值方法二者有机地结合起来，给读者一个数值逼近中常见的基本问题、基本方法和如何在计算机上将其实现的比较完整的描述.

逼近论的基本问题可以简述如下：

给定函数 $f(x)$，在自变量 x 的某个指定集合 D 上，使用某个指定函数类 Φ 中的函数 ϕ，来“逼近”$f(x)$. 谈到“逼近”，一个首要的问题是“逼近”一词的确切数学含义. 这必须首先明确如何度量 f 与 ϕ 之间的“距离”. 出于不同的理论或应用的目的，人们可

以用不同的“距离”. 最常用的两种度量方式为：

$$d(f,\ \phi):=\|f-\phi\|_{\infty}=\sup_{x\in D}|f(x)-\phi(x)|, \tag{0.1}$$

或

$$d(f,\phi):=\|f-\phi\|_2=\left(\int_a^b\rho(x)|f(x)-\phi(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{0.2}$$

其中 $\rho(x)\geqslant 0$ 为给定的权函数(反映 $|f(x)-\phi(x)|$ 于 x 点处对整体差距 $d(f,\ \phi)$ 的贡献. 正是这种不同的距离概念，导致了逼近论中的几大主要理论. 相应于(0.1)的是一致逼近理论，相应于(0.2)的是平方逼近理论. 另外，有时人们要求

$$f(x_i)=\phi(x_i), \qquad x_i\in D,\ i=1,2,\cdots,N. \tag{0.3}$$

其中 N 为某一自然数，这就导致了函数插值理论. 另一方面，使用不同的函数类 Φ，也导致不同的逼近论问题. 如 Φ 可以是代数多项式、三角多项式、有理函数或分段多项式函数等等.

通常，在给定了逼近的度量方式 $d(\cdot,\cdot)$ 和所用的函数类 Φ 之后，逼近论的问题又可以多种方式提出. 例如，给定逼近精度要求 $\varepsilon>0$，问是否有 $\phi^*\in\Phi$，使 $d(f,\phi^*)<\varepsilon$；或者是否存在 $\phi^*\in\Phi$，使得 $d(f,\phi^*)=\inf\limits_{\phi\in\Phi}d(f,\ \phi)$. 前一类问题经常在数值积分、计算几何、微分方程数值解法等领域中出现，而后一类问题就是逼近论中著名的最佳逼近问题. 我们不仅要研究这些问题的解 $\phi^*\in\Phi$ 是否存在，还要研究 ϕ^* 的基本特征，也就是 ϕ^* 的刻画. 不仅如此，数值逼近与普通逼近理论不同，它还要研究使用计算机解决上述问题的数值方法. 此外，本书还要涉及数值积分等经典问题.

当然，上面所述的问题，在有了相当好的数学基础理论(如泛函分析)准备之后，可以通过高度的概括，在一定的数学框架下统一处理. 另外，还有相反的问题：当已知某些 Φ 中的元素能

很好的逼近$f(x)$时，函数$f(x)$有着什么样的结构呢？这些问题的研究有着悠久的历史，已有了十分精美的数学理论．但是，限于本书基本读者的数学基础（我们假定读者为本科二年级学生）和本书篇幅所限，本书未予详细阐述．有兴趣的读者，可以参考其它逼近论专著．

还应强调的一点是，学习数值逼近与学习其它数学课程一样，读者应尽可能地将它作为计算科学理论整体的一部分看待，它与计算科学的其它分支（例如数值代数、计算几何、计算机图形学、微分方程数值解法、数据与图象处理、统计计算等）有着十分紧密的内在联系，绝不可将其孤立开来．另外，读者还应该通过在计算机上实习，消化理解数值逼近中的重要算法，以达到掌握这些方法的目的，否则是很难真正掌握这门课程的．

第一章　一致逼近

在本章中，我们将讨论一致逼近的基本理论. 这其中包括一致逼近的概念、用代数多项式和三角多项式对连续函数做一致逼近的可能性，最佳一致逼近问题，及其构造逼近多项式的数值方法. 最后，我们也将简略地介绍有关最佳一致逼近速度的杰克逊(Jackson)定理.

第一节　一致逼近的概念、连续函数的多项式逼近

我们用 $C[a,b]$表示定义在闭区间$[a, b]$上的全体连续函数构成的集合. 对任意两个$C[a, b]$中的元素 $f(x)$和 $g(x)$，可以用

$$\| f - g \|_\infty = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - g(x) | \tag{1.1}$$

表示它们之间的距离. 像通常一样，可以验证$|\cdot|_\infty$有如下的性质:

1. $\| f - g \|_\infty = 0$当且仅当$f(x) = g(x)$，$\forall x \in [a, b]$;
2. 三角不等式: 对任意的$f, g, h \in C[a, b]$有

$$\| f - g \|_\infty \leqslant \| f - h \|_\infty + \| h - g \|_\infty.$$

本章的基本问题之一是: 对于给定的 $f \in C[a, b]$，能否从某个函数类 $\Phi \subset C[a, b]$(通常 Φ 是一些具有较好性质并相对简单的函数构成的集合，例如所有代数多项式的集合)中找到一个 ϕ，使

ϕ 在上述距离的意义下逼近$f(x)$.

一个函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在度量$\|\cdot\|_\infty$下收敛于某个函数$f(x)$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$, 意味着$f_n(x)$于$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$. 故人们通常称在度量$\|\cdot\|_\infty$下的逼近问题为一致逼近问题.

我们首先讨论如下问题:

问题 1.1 对给定的$f\in C[a, b]$和给定的逼近精度$\varepsilon>0$, 能否找到一个代数多项式$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$($n$为某个自然数), 使得

$$\|f-p\|_\infty\leqslant\varepsilon. \tag{1.2}$$

下面的定理回答了问题 1.1.

定理 1.1(Weierstrass, 1885) 设$f\in C[a, b]$, 则对任意给定的$\varepsilon>0$, 都存在多项式$p(x)$, 使得

$$\|f-p\|_\infty=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

成立.

此定理有着多种证明. 这里将给出的证明是由伯恩斯坦(Bernstein)给出的. 它不仅证明了$p(x)$的存在性, 同时也可以用来构造$p(x)$. 为此, 首先介绍伯恩斯坦多项式(Bernstein polynomial).

设$f\in C[0, 1]$, 对任意给定的自然数n, 令

$$(B_nf)(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \tag{1.3}$$

其中$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$为 Newton 二项式系数. 显然, $(B_nf)(x)$是x的n次多项式. 通常, 人们称它为伯恩斯坦多项式.

伯恩斯坦多项式具有许多很好的性质. 由于它的这些性质, 使得它被广泛地应用于计算几何等多个领域. 这里, 仅仅为着证明定理 1.1 的目的, 我们给出伯恩斯坦多项式的下列性质:

引理 1.1 对于任意的自然数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x). \tag{1.4}$$

证明 由 Newton 二项式定理，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^2=1,$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}(k^2+n^2x^2-2knx)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\quad-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=n^2x^2+\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\quad+(1-2nx)\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

注意到

$$k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2},$$

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1},$$

故

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n^2x^2 + n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+ (1-2nx)n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= n^2x^2 + n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$+ (1-2nx)nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$= n^2x^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx$$

$$= nx(1-x).$$

引理 1.2 对任意的 $f\in C[0,1]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\| f - B_nf\|_\infty = 0. \tag{1.5}$$

证明 $\forall\varepsilon>0$，由于 $f\in C[0,1]$，故 $f(x)$ 于 $[0,1]$ 上一致连续. 所以，存在 $\delta>0$，对任意的 x'，$x''\in[0,1]$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

今取足够大的自然数 n，使得 $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}<\delta$. 对此 n 及任意的 $x\in[0,1]$，将集合 $K=\{0,1,\cdots,n\}$ 分成两个不相交的子集 $K'=\left\{k\in K;\ \left|\frac{k}{n}-x\right|<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$ 及 $K''=\left\{k\in K;\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$，则有

$$f(x)-(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k\in K'}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\sum_{k\in K''}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

令 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，并注意到当 $k\in K''$时，$n^{1/2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\geqslant 1$，从而有

$$\begin{aligned}
&|f(x)-(B_nf)(x)|\\
&\leqslant\sum_{k\in K'}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad+\sum_{k\in K''}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in K'}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+2M\sum_{k\in K''}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2Mn^{-\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x(1-x)2M}{n^{1/2}}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\delta^4}\right]+1,\left[\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right]+1\right\}$，则当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f(x)-(B_nf)(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由 $x\in[0,1]$的任意性，得到

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-(B_nf)(x)|\leqslant\varepsilon.$$

现在可以给出定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 对于任意给定的 $f\in C[a,b]$，使用线性变换

$$x=(b-a)t+a,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

可以将 $f(x)$转换成 $\tilde{f}(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 再由引理 1.2，对任意的 $\varepsilon>$

0，存在多项式 $\tilde{p}(t)=(B_n\tilde{f})(t)$，使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\tilde{f}(t)-\tilde{p}(t)|\leqslant \varepsilon.$$

再使用变换 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$，则得到关于 x 的多项式 $p(x)=\tilde{p}(t)$，且

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\tilde{f}(t)-\tilde{p}(t)|\leqslant \varepsilon.$$

在图 1-1 中，我们给出了函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2};\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

和它的几个伯恩斯坦多项式的图象(图 1-1)，以此给读者一个直观印象.

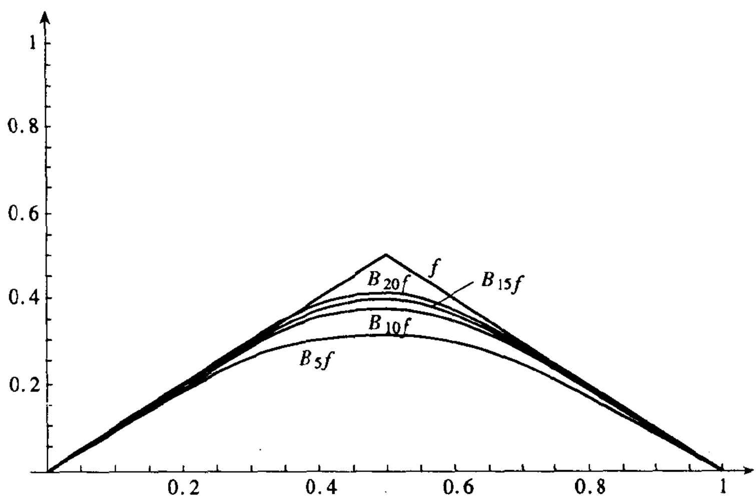


图 1-1

除引理 1.1 和引理 1.2 之外，伯恩斯坦多项式还具有其它好的性质，其中有：

引理 1.3 如果 $f\in C^r[0,1]$，r 为某一自然数，即 $f(x)$ 于

$[0,\ 1]$上具有直到 r 阶连续导数，则

$$\lim_{n\to\infty}\left\| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}f - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(B_nf)\right\|_\infty = 0, \tag{1.6}$$

对 $k=0,1,\cdots,r$ 成立.

引理 1.4 如果 $f\in C[0,\ 1]$并且是凸函数，则$(B_nf)(x)$也是$[0,\ 1]$上的凸函数.

关于引理 1.3 和引理 1.4 的证明，我们留作习题.

第二节 最佳一致逼近、最佳一致逼近多项式的存在性

以下，我们用 $\mathscr{P}_n$ 表示所有次数不超过 n 的代数多项式的集合，即

$$\mathscr{P}_n = \{p_n(x);\ p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\\ a_i\in R,\ i=0,1,\cdots,n\}.$$

给定 $f\in C[a,\ b]$，我们称

$$\Delta(f,\ p_n) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - p_n(x)|$$

为 $p_n(x)$对于 $f(x)$的偏差，并称

$$E_n(f) = \inf_{p_n\in\mathscr{P}_n}\Delta(f,\ p_n) \tag{1.7}$$

为 $\mathscr{P}_n$ 对 f 的最小偏差，或称最佳逼近. 显然，关于 $E_n(f)$的研究在理论上和应用上都有重要意义，这就形成了逼近论中最佳一致逼近理论. 定理 1.1 告诉我们:

$$\lim_{n\to\infty}E_n(f) = 0, \qquad \forall f\in C[a,\ b]. \tag{1.8}$$

进一步，我们考虑如下的问题:

问题 1.2 对任意的 $f\in C[a,\ b]$，是否存在 $\mathscr{P}_n$ 中的多项式 $p_n^*(x)$，使得