

现代数学丛书

陈希孺 赵林城 著

# 线性 模型中的 $M$ 方法

$M$ -METHODS IN  
LINEAR MODEL

CHEN XIRU  
ZHAO LINCHENG

上海科学技术出版社

• 现代数学丛书 •

# 线性模型中的 $M$ 方法

陈希孺  
赵林城 著

上海科学技术出版社

责任编辑 赵序明

· 现代数学丛书 ·

**线性模型中的  $M$  方法**

陈希孺

赵林城 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本  $787 \times 1092$  小 1/16 印张 13.5 插页 4 字数 169,000

1996 年 10 月第 1 版 1996 年 10 月第 1 次印刷

印数 1-1,200

ISBN 7-5323-3907-6/O · 192

定价: 27.00 元

现代

Modern Mathematics Series

# M-METHODS IN LINEAR MODEL

Chen Xiru

Zhao Lincheng

Shanghai Scientific & Technical Publishers

## M-METHODS IN LINEAR MODEL

Chen Xiru  
Zhao Lincheng

### Abstract

This monograph, based on the research achievements of the authors and their co-workers, gives a systematic account on the asymptotic theory of  $M$ -methods in linear regression models. It consists of a discussion on the definition of the  $M$ -estimate, on the weak and strong consistency and asymptotic normality, weak and strong linear representation of  $M$ -estimate, and linear hypothesis testing based on  $M$ -estimates. A series of special methods are developed in the book, enabling us to give very sharp results on a number of basic questions.

## 《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series  
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

|              |                |
|--------------|----------------|
| Cao Xihua    | Chen Hanfu     |
| Chen Xiru    | Cheng Minde    |
| Ding Xiaqi   | Feng Keqin     |
| Hu Hesheng   | Jiang Boju     |
| Li Tatsien   | Liang Youdong  |
| Liu Yingming | Shi Zhongci    |
| Wang Zikun   | Wu Fang        |
| Yan Zhida    | Yang Le        |
| Ye Yanqian   | Zhang Gongqing |

# 出版说明

从 60 年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作,充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于 1990 年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18 位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

# 序 言

理论研究和实践经验表明,线性回归分析中最常用的方法——最小二乘法,在一些情况下表现不理想。近几十年来,统计学家提出了许多替代方法供选择使用。本书的主题—— $M$ 方法,就是其中之一,并且可以说是最受重视、研究成果最多的一种。

这个方法的研究发端于 Huber 在 1964 年的一项工作,其中考察了位置参数的  $M$  估计问题。于 1973 年,他把这个方法用于一般的多元线性模型。自那以后,这个领域受到统计学家相当的重视,20 多年来积累了一批研究成果。

本书作者及其合作者在 80 年代后期开始涉足这个领域。所得到的研究成果就是写作本书的基础。也可以说,本书也就是作者及合作者这一段工作的总结。当然,工作还没有结束,有的问题还有待于在今后取得根本的进展。

本书内容包括:对  $M$  估计定义的讨论; $M$  估计的强、弱相合性;渐近正态性;基于  $M$  估计的线性假设检验的方法和理论(这在某种意义上可看作是古典方差分析的一种推广);以及  $M$  估计的线性表示,即用一个线性独立和去逼近  $M$  估计。我们对  $M$  估计的一个特例——最小一乘估计,给予了较多的注意。除了其在应用上的重要性外,这个特例对一般情况下的理论发展有着启示的作用。至于最小二乘估计,它当然无疑是  $M$  估计家族中最重要的成员。但本书对它着墨不多。因为关于这个题目前此已有专著[5]。

本书只限于考察线性回归且随机误差独立的情况。这个情况在统计上是最常用的。另外,这个情况的相对简单的架构,有利于

得到系统深刻而非表面的结果。当然,  $M$  方法的使用不限于线性模型, 例如, 有一些学者已尝试将其用于带线性部分的半参数模型, 并取得了一些成果。我们觉得, 如果把线性情况研究透彻了, 弄清了在这一情况下的一些主要问题能推进到何种程度, 就可以树立一个标杆, 作为在更复杂的模型下努力的目标。

在本书写作中, 我们努力遵循深入浅出的原则, 凡是能用初等工具处理的问题, 就尽量采用初等工具。尽管本书中不少定理的证明很是曲折繁复, 但所用的预备知识却不多, 具有理工科概率统计和初步的分析及矩阵知识, 即可顺利阅读本书。书中不加证明地引用了少量概率不等式和一般在一般教本中不易见到的极限理论, 也都介绍了其出处, 读者易于从国内常见的资料中查到。本书可以适合广大的读者, 包括对线性统计模型大样本理论感兴趣的教师、研究人员和研究生、大学生; 以及对  $M$  方法感兴趣的实用工作者等。

本书的主题是国家自然科学基金一项重点课题的一部分。在多年的工作进程中, 我们一直得到该基金的资助, 谨在此表示感谢; 华东师范大学王静龙教授审阅了本书全稿, 并指出和纠正了个别笔误之处, 在此一并致谢。

由于作者水平所限, 对书中一些不妥以至错误之处, 希望广大读者和专家同行不吝指教。

作 者

1994 年 6 月于中国科学技术大学研究生院

## 内 容 提 要

本书的内容是作者与合作者在一段研究工作成果的基础上,系统地论述线性回归模型的  $M$  方法的理论。其中包括:关于  $M$  估计定义的讨论; $M$  估计的强、弱相合性; $M$  估计的渐近正态性;基于  $M$  估计的线性假设检验的方法和理论; $M$  估计的线性表示等。

本书所反映的上述研究工作是国家自然科学基金资助的重点课题之一。

本书的读者对象:数理统计专业的研究工作者、实际工作者;大专院校概率统计专业的教师、研究生、高年级学生。

# 目 录

## 序 言

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 第 1 章 $M$ 估计的定义 .....          | 1   |
| § 1.1 用极值定义 $M$ 估计 .....       | 1   |
| § 1.2 $M$ 估计作为方程的解 .....       | 16  |
| 第 2 章 $M$ 估计的弱相合性 .....        | 24  |
| § 2.1 基本定理及有关问题 .....          | 26  |
| § 2.2 基本定理的证明 .....            | 35  |
| § 2.3 弱相合的必要条件 .....           | 44  |
| 第 3 章 $M$ 估计的强相合性 .....        | 59  |
| § 3.1 $\rho$ 为凸函数的情况 .....     | 62  |
| § 3.2 LADE 强相合条件可否改进 .....     | 77  |
| § 3.3 $\rho$ 不必为凸函数的情况 .....   | 85  |
| 第 4 章 $M$ 估计的渐近正态性 .....       | 100 |
| § 4.1 由极值定义的 $M$ 估计的情形 .....   | 101 |
| § 4.2 由估计方程定义的 $M$ 估计的情形 ..... | 110 |
| § 4.3 历史小记 .....               | 114 |
| 附录 .....                       | 117 |
| 第 5 章 $M$ 检验统计量的渐近理论 .....     | 123 |
| § 5.1 简单模型中的渐近理论 .....         | 124 |
| § 5.2 多重线性模型中的 $M$ 检验 .....    | 133 |
| § 5.3 历史小记 .....               | 142 |
| 第 6 章 $M$ 估计的线性表示 .....        | 145 |
| § 6.1 引言与启发式推导 .....           | 145 |

---

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| § 6.2 $\rho$ 为凸函数时的线性表示 ..... | 149 |
| § 6.3 $\rho$ 不必为凸的情况 .....    | 173 |
| § 6.4 线性表示的应用 .....           | 188 |
| <b>参考文献</b> .....             | 195 |

# CONTENTS

## Preface

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Chapter 1. Definition of <math>M</math>-Estimates</b> .....              | 1   |
| § 1.1 $M$ -estimates defined by minimization .....                          | 1   |
| § 1.2 $M$ -estimates defined by solution of an equation .....               | 16  |
| <b>Chapter 2. Weak Consistency of <math>M</math>-Estimates</b> .....        | 24  |
| § 2.1 Fundamental Theorem And Related Problems .....                        | 26  |
| § 2.2 Proof of fundamental theorem .....                                    | 35  |
| § 2.3 Necessary conditions for weak consistency .....                       | 44  |
| <b>Chapter 3. Strong Consistency of <math>M</math>-Estimates</b> .....      | 59  |
| § 3.1 The case that $\rho$ is convex .....                                  | 62  |
| § 3.2 Can the conditions for LADE be improved .....                         | 77  |
| § 3.3 The case that $\rho$ may be non-convex .....                          | 85  |
| <b>Chapter 4. Asymptotic Normality of <math>M</math>-Estimates</b> .....    | 100 |
| § 4.1 The case of minimization-definition .....                             | 101 |
| § 4.2 The case of equation-definition .....                                 | 110 |
| § 4.3 Historical remarks .....                                              | 114 |
| Appendix .....                                                              | 117 |
| <b>Chapter 5. Asymptotic Theory of <math>M</math>-Test Statistics</b> ..... | 123 |
| § 5.1 Asymptotic theory for simple models .....                             | 124 |
| § 5.2 $M$ -test in multi-multiple linear models .....                       | 133 |
| § 5.3 Historical remarks .....                                              | 142 |
| <b>Chapter 6. Linear Representation of <math>M</math>-Estimate</b> .....    | 145 |
| § 6.1 Introduction and heuristic deduction .....                            | 145 |
| § 6.2 The case that $\rho$ is convex .....                                  | 149 |

|                   |                                              |     |
|-------------------|----------------------------------------------|-----|
| § 6.3             | The case that $\rho$ may be non-convex ..... | 173 |
| § 6.4             | Applications of linear representation .....  | 188 |
| <b>References</b> | .....                                        | 195 |

# 第 1 章

## M 估计的定义

首先交代一下本书中常用的一些符号. 数、向量、矩阵和函数, 如无特别申明, 都是实的. 不加“ $\cdot$ ”的向量总是指列向量. 若  $a$  为向量或矩阵, 则以  $a'$  记其转置, 以  $\|a\|^2$  记  $a$  的各元的平方和, 以  $|a|$  记  $a$  各元绝对值的最大值. 当  $A$  为方阵时,  $A > 0$ 、 $A \geq 0$  分别表示  $A$  为正定和非负定的. 当  $A$ 、 $B$  为同阶方阵时,  $A \geq B$  表示  $A - B \geq 0$ . 当不致引起混淆时, 常把极限号下的“ $n \rightarrow \infty$ ”等略去不书.  $p$  维欧氏空间记为  $R^p$ .

### § 1.1 用极值定义 M 估计

#### 一、线性回归模型

本书常把线性回归模型写为下面的形式:

$$Y_i = x_i' \beta_0 + e_i \quad (1 \leq i \leq n, n \geq 1). \quad (1.1)$$

这里  $\beta_0$  是未知的  $p$  维回归参数向量;  $Y_i$ 、 $x_i$  和  $e_i$  分别是第  $i$  次观察或试验时的目标变量(因变量)、解释变量(自变量)和随机误差的取值. 注意, 后者是不可观察的, 因而其值未知; 而  $Y_i$  和  $x_i$  已知, 分别为 1 维和  $p$  维. 在多数情况下,  $x_i$  是一个已知的、不带随机性的向量, 在理论论证时, 我们把它作数值向量处理. 本书个别地方涉及  $x_i$  本身也是某一个  $p$  维随机向量的观察值的情况, 这时我们用大写的  $X_i$  来记, 以示区别. 在理论论证时,  $X_i$  要作为随机向量处理. 模型(1.1)的统计问题, 就是要利用观察或试验所得的