〔苏〕E. Г. 维克史坦 编

电动力学
习题汇编

汪镇藩　　郑锡琏　译

人民教育出版社

电动力学习题汇编

〔苏〕 E.Γ.维克史坦 编
汪镇藩 郑锡琏 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联 Е. Г. Векштейн 编的 Сборник задач по электродинамике («Высшая школа», 1966)一书译出.

全书共四章：静电学；稳恒和似稳电流及磁场；交变电磁场；狭义相对论与运动物体电动力学基础. 每一章开头部分都有简要的理论论述及主要公式. 正文前有一简短引言，包括正交坐标、矢量运算的一些公式、麦克斯韦方程组. 书后附有相当详细的题解.

本书的序、引言及第一、二章的习题和解答由汪镇藩翻译，其余部分由郑锡琏翻译.

本书可作为高等学校物理、无线电等专业的教学参考书.

电动力学习题汇编

〔苏〕 Е. Г. 维克史坦 编

汪镇藩 郑锡琏 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.625 字数 210,000

1981 年 9 月第 1 版 1982 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—17,500

书号 13012·0654 定价 1.10 元

序

编写这本电动力学习题汇编的目的，是要实现“不仅懂而且会”这句格言，忘记了这句格言，就会使学习流于形式.

问题不在于使大学生们死记解典型问题的一些基本方法，最主要的是要使他们能够理解这种方法，以及这种方法所依据的理论原理.

为了这个目的，在本汇编中(特别是在第一章中)对每道题目的解法都以主要方程和公式作了相当详细而清晰的说明．在其余各章中这类说明将逐渐简化.

为了同一目的，在本汇编中还讨论了在某些场合下同一问题的几种解法，或者指出这些解法的可能性.

本汇编还有一个目的，就是以实例阐明电动力学理论教程中的基本原理，并使之具体化．为此，在本汇编中还编入一些例如借助麦克斯韦张力张量计算电荷与电流间相互作用力的题目．尽管这些题目用其他方法很容易求解.

本汇编共分为四章：静电学；稳恒和似稳电流及磁场；交变电磁场；狭义相对论与运动物体电动力学基础.

在每一章的开头都有简短的理论论述、主要公式汇编和引用符号的说明．全书正文前面有一简短引言，其内容包括：

1) 正交坐标；2) 矢量运算的一些公式；3) 麦克斯韦方程组.

本汇编采用高斯绝对单位制.

在编写本汇编时，我们参考了下列几本有关的电动力学参考书：

1. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля(中译本：《场

论》，任朗、袁炳南译，人民教育出版社)；

2. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред(中译本：《连续媒质电动力学》，周奇译，人民教育出版社)；

3. И. Е. Тамм, Основы теории электричества (中译本：《电学原理》，钱尚武等译，人民教育出版社)；

4. Smythe, W. R., Static and Dynamic Electricity(中译本：《静电学和电动力学》，戴世强译，科学出版社)；

5. Stratton, J. A., Electromagnetic Theory.

等等。

作　　者

目　录

引　言

习　题

第一章　静电学

第二章　稳恒和似稳电流及磁场

第三章 交变电磁场

第四章 狭义相对论和运动物体电动力学基础

题 解

第一章 静电学

第二章 稳恒和似稳电流及磁场

第三章　交变电磁场

第四章　狭义相对论和运动物体电动力学基础

引　言

正交坐标

在任意正交坐标系(x_1, x_2, x_3)中，弧元的平方

$$dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

式中 h_1、h_2、h_3就是所谓的拉梅系数.

体积元

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3.$$

任一矢量场$\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$的矢量线由下列微分方程确定:

$$\frac{h_1 dx_1}{A_1} = \frac{h_2 dx_2}{A_2} = \frac{h_3 dx_3}{A_3}. \tag{I}$$

坐标的标量函数的梯度

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\mathbf{e}_3, \tag{II}$$

式中$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$和$\mathbf{e}_3$是与该点的坐标线相切的单位矢量.

矢量的散度

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3)\right\}. \tag{III}$$

矢量的旋度

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \tag{IV}$$

拉普拉斯算符

$$\Delta=\nabla^2=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right\}. \quad \text{(V)}$$

将来我们主要使用的是笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标，为此下面列出上述算符的显式：

a）笛卡儿坐标($x_1=x; x_2=y; x_3=z$)：

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2;\ dV=dxdydz\,(h_1=h_2=h_3=1).$$

矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$的矢量线的微分方程：

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}. \quad \text{(I}a\text{)}$$

标量函数$\varphi(x, y, z)$的梯度的诸分量：

$$\mathrm{grad}_x\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ \mathrm{grad}_y\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ \mathrm{grad}_z\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad \text{(II}a\text{)}$$

矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$的散度：

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad \text{(III}a\text{)}$$

矢量 $\mathbf{A}(x, y, z)$的旋度的诸分量：

$$\mathrm{rot}_x\mathbf{A}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z};\quad \mathrm{rot}_y\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$\mathrm{rot}_z\mathbf{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad \text{(IV}a\text{)}$$

拉普拉斯算符

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \text{(V}a\text{)}$$

b）柱坐标($x_1=R; x_2=\theta; x_3=z$)：

$$h_1=1;\ h_2=R;\ h_3=1;$$

$$dl^2=dR^2+R^2d\theta^2+dz^2;\quad dV=RdRd\theta dz.$$

矢量场 $\mathbf{A}(R, \theta, z)$ 的矢量线的微分方程:

$$\frac{dR}{A_R}=\frac{Rd\theta}{A_\theta}=\frac{dz}{A_z}. \tag{Ib}$$

标量函数 $\varphi(R, \theta, z)$ 的梯度的诸分量:

$$\operatorname{grad}_R\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial R};\ \operatorname{grad}_\theta\varphi=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta};\ \operatorname{grad}_z\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{IIb}$$

矢量 $\mathbf{A}(R, \theta, z)$ 的散度:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R)+\frac{1}{R}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{IIIb}$$

矢量 $\mathbf{A}(R, \theta, z)$ 的旋度的诸分量:

$$\operatorname{rot}_R\mathbf{A}=\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z};\ \operatorname{rot}_\theta\mathbf{A}=\frac{\partial A_R}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial R};$$

$$\operatorname{rot}_z\mathbf{A}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial\theta}. \tag{IVb}$$

拉普拉斯算符

$$\Delta=\nabla^2=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{Vb}$$

c) 球坐标 $(x_1=r; x_2=\theta; x_3=\psi)$:

$$h_1=1; h_2=r; h_3=r\sin\theta;$$

$$dl^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\psi^2;$$

$$dV=r^2dr\sin\theta d\theta d\psi=r^2drd\Omega,$$

式中 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\psi$ 是立体角元.

矢量场 $\mathbf{A}(r, \theta, \psi)$ 的矢量线的微分方程:

$$\frac{dr}{A_r}=\frac{rd\theta}{A_\theta}=\frac{r\sin\theta d\psi}{A_\psi}. \tag{Ic}$$

标量函数 $\varphi(r, \theta, \psi)$ 的梯度的诸分量:

$$\operatorname{grad}_r\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r};\qquad \operatorname{grad}_\theta\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{grad}_\psi\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}. \tag{IIc}$$

矢量 $\mathbf{A}(r,\theta,\psi)$的散度:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi}. \tag{IIIc}$$

矢量 $\mathbf{A}(r,\theta,\psi)$的旋度的诸分量:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_r\mathbf{A}&=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\psi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right\};\\ \operatorname{rot}_\theta\mathbf{A}&=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial A_r}{\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\psi)\right\};\\ \operatorname{rot}_\psi\mathbf{A}&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial Ar}{\partial\theta}.\end{aligned} \tag{IVc}$$

拉普拉斯算符

$$\Delta=\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}. \tag{Vc}$$

矢量运算的一些公式

下面列出将来常用的一些公式:

1. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$; (VI)
2. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$;
3. $\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\varphi=0$;
4. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$;
5. $\operatorname{grad}(uv)=u\operatorname{grad}v+v\operatorname{grad}u$;
6. $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A})=\varphi\operatorname{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi$; (VII)
7. $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A})=\varphi\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\operatorname{grad}\varphi$;
8. $\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}$;
9. $\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A}$.

下面再列出体积分、面积分和回路积分互相变换的积分定理。

1. 奥斯特洛格拉斯基-高斯定理

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{A}dV = \oint_S A_n dS = \oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}①, \tag{VIII}$$

式中 n 是包围该体积 V 的闭合面 S 的外法线.

2. 斯托克斯定理

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}_n \mathbf{A} dS = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}, \tag{IX}$$

式中 S 是以闭合回路 L 为边线的曲面；n 是该曲面的法线，它与回路方向组成右螺旋系统.

麦克斯韦方程组

作为宏观电动力学基础的麦克斯韦方程组是:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{C}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0;\ \mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{C}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{C}\mathbf{j}, \tag{X}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0; \qquad \mathrm{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho;$$

式中 E 和 H 分别为电场强度和磁场强度，D 和 B 为感应矢量，并由下列方程确定:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \tag{XI}$$

式中 P 是极化强度矢量，也就是电偶极矩的体密度；M是磁化强度矢量，也就是磁偶极矩的体密度；ρ 是自由电荷密度；j 是电流密度.

除了麦克斯韦方程外，还必须引入所谓的物质方程，这些方程给出了矢量 P(或 D)与 E 的关系和M(或 B)与 H 的关系.

在大多数场合下，可以认为这种关系是线性关系．对于个别

---

① $d\mathbf{S}$ 的方向是外法线方向.

情况的物质方程将在后面分别加以说明.

由麦克斯韦方程的线性关系可知：两个或两个以上解的总和也是这些方程的解，这时源密度(ρ 和 $\mathbf{j}$)就等于各个解的密度之和(迭加原理).

由麦克斯韦方程可得出下列积分(守恒定律)：

1) 电量守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0, \tag{XII}$$

其积分形式为

$$\frac{dq}{dt}+I=0, \tag{XIIa}$$

式中 $q=\int_V \rho dV$ 是任意体积 V 内所含有的电量；

$I=\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$ 是从包围该体积 V 的闭合面 S 流出的电流强度.

2) 能量守恒定律

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)+\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=0.$$

如果 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$(以及 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$)间线性关系的系数与时间无关，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})+\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=0, \tag{XIII}$$

或者写成积分形式

$$-\frac{dW}{dt}=\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV+\oint_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{S}, \tag{XIIIa}$$

式中

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_V(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})dV \tag{XIV}$$

是体积 V 内的电磁场能量；

$\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}dV$ 是单位时间该体积内场力所作的功，而乌莫夫-坡印

廷矢量

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{XV}$$

是电磁能流密度.

电磁场也具有动量

$$\mathbf{G}=\int_V \frac{1}{c^2}\mathbf{S}dV. \tag{XVI}$$

为了求麦克斯韦方程的解,引入标势 φ 和矢势 $\mathbf{A}$ 是很方便的,令

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t};\qquad \mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}. \tag{XVII}$$

这时麦克斯韦方程(X)中第一对方程一定满足.

由麦克斯韦方程组(X)中第二对方程,并考虑到物质方程,就可以得到求势的微分方程.

麦克斯韦方程组中一对方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0; \tag{XVIII}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=4\pi\int_V \rho dV, \tag{XIX}$$

式中 S 是包围任意体积 V 的闭合面. 由此可得出感应矢量的边界条件为

$$B_n^{(1)}=\mathbf{B}_n^{(2)}; \tag{XVIIIa}$$

$$D_n^{(1)}-D_n^{(2)}=4\pi\sigma, \tag{XIXa}$$

式中用脚标(1)表示介质分界面的正法线 $\mathbf{n}$ 所指向的那一侧,而 σ 是该面上自由电荷面密度.

麦克斯韦方程组中另一对方程的积分形式为

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}, \tag{XX}$$

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}, \tag{XXI}$$

式中S是闭合回路l所围成的任意非闭合曲面．由此可得出矢量$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$的边界条件为

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}^{(1)}-\mathbf{E}^{(2)})=0, \quad 即 \quad E_t^{(1)}=E_t^{(2)}; \tag{XXa}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}^{(1)}-\mathbf{H}^{(2)})=\frac{4\pi}{c}I, \tag{XXIa}$$

式中$\mathbf{n}$是所讨论的介质分界面法线的单位矢量，而I是沿着该面的面电流密度，也就是通过单位横截线的电流强度．

习　　题

第一章　静　电　学

基本公式

由麦克斯韦方程组(X)得出：任意媒质中的静电场决定于微分方程

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=0, \tag{1.2}$$

式中

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}. \tag{1.3}$$

对于绝大多数各向同性电介质来说，在静电情况下物质方程为

$$\mathbf{P}=\chi\mathbf{E}, \tag{1.4}$$

式中χ是电极化率，它是表示物质的常量。

从(1.3)式和(1.4)式得到

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \tag{1.5}$$

式中

$$\varepsilon=1+4\pi\chi \tag{1.6}$$

是介电常数.

在极化电介质中，束缚电荷的分布与极化强度矢量$\mathbf{P}$的关系是

$$\rho'=-\mathrm{div}\mathbf{P}. \tag{1.7}$$

由此得到