电机电磁场理论与计算

陈丕璋　严烈通　姚若萍　著

科　学　出　版　社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书是研究电机电磁场问题的专著．书中重点介绍了清华大学电机电磁场科研组的研究成果，也反映了国内外有关最新研究成果．

本书符合 1982 年部分直属高等院校研究生工作会议规定的电机专业研究生必选课“电机电磁场”教学大纲，曾作为研究生教材在清华大学讲授过．

本书部分内容曾在北京、上海等地作为提高在职电机科技人员水平而开办的培训班的教材，并多次讲授过．

全书共十六章，包括两大部分：(1)分析计算方法(解析法、模拟法和数值方法)，以数值方法为重点，除有限元法和差分法外，还介绍了积分方程、网络拓扑、蒙特卡罗法和虚拟电流等方法；(2)电机电磁场问题的分析计算实例，包括电机负序、失磁和起动运行，定子端部涡流场，电机饱和场以及瞬变场等．书末还附有两个典型计算程序．

本书可供电机专业教师、研究生、大学高年级学生和从事电机设计、运行和研究的科技人员参考．

电机电磁场理论与计算

陈丕璋　严烈通　姚若萍　著

责任编辑　范铁夫

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1986 年 3 月第 一 版　开本：787×1092　1/16

1986 年 3 月第一次印刷　印张：21 3/4

印数：精 1—2,200　插页：精 3 平 2

　　　平 1—2,700　字数：507,000

统一书号：15031・694

本社书号：4475・15—5

定价：布脊精装 6.15 元

　　　平　　装 5.15 元

前　　言

在我国社会主义现代化建设中，电能生产占有重要地位. 研制一批大型发电机组并将其投入电网，已列入电力生产的重点计划. 为了保证这些电机合理设计和可靠运行，须运用电机电磁场理论和计算方法. 同时为了各行各业的发展，需研制更高质量的执行和控制电机，这些电机的设计往往要借助于电磁场的分析方法. 近年来随着电子计算机和其他学科的发展，电机电磁场理论和分析方法也有了很大发展，本书是适应这些情况而编著的.

本书比较完整地考虑到电机电磁场的理论体系，对经典的分析方法着重于理论基础及典型分析. 电磁场近代数值方法是本书的重点. 书中列举了典型电机电磁场问题的分析和计算方法，给出了大量实例，反映了七十年代以来在电机电磁场领域内的一些发展动向.

书中选用了清华大学电机电磁场科研组所取得的大量研究成果. 本书的编写工作得到了高景德教授和王先冲教授的支持和鼓励，还得到了胡显承、李端敏、肖达川、孙树勤和俞天音等同志的支持，王先冲教授审阅了全稿，特此向他们表示感谢.

在编著本书的过程中，曾参阅有关资料(主要的已列入“参考文献”中)并利用了一些单位的实验数据，在此谨向这些资料的作者和有关单位的科技人员表示感谢.

由于我们水平有限，书中难免有不少错误和缺点，欢迎读者指正.

目　录

第一章　电机电磁场理论及分析方法的发展和分类

§1-1　电机电磁场理论和计算方法的发展

电机的主要理论基础是电路及电磁场理论．电机运行时，内部有电磁能量的转换，存在着电磁场．虽然麦克斯韦（Maxwell）在1873年已总结了表征电磁场特征的方程组，但由于电机中存在不同介质（一般有铜、铁和空气等），边界面及交界面形状比较复杂，材料特性又有非线性等等，在数值方法引入电磁场领域前，仅仅有限的几个问题能够直接用麦克斯韦方程求解．最早运用解析法的一批文章中，有卡特（F. W. Carter）在1900年用保角变换的方法分析的气隙及槽部磁场的文献[51]，文中提出了著名的气隙系数．1905年菲尔德（A. B. Field）求解了槽内导体涡体分布，得出附加铜损计算公式[52]．以后有人用作图法求解磁场分布，例如，德赖弗斯（Drefus）、斯蒂文森（A. R. Stevenson）、及威斯曼（R. W. Wieseman）等先后用图解法分析定子及转子漏磁场[53~56]，提出了计算凸极机气隙磁场分布的几个系数，这些系数在电机设计中得到应用．实心转子结构简单，比较适合用解析法求解，引起许多电机科技工作者的兴趣．从二十年代到六十年代、有一批关于实心转子电磁场和参数的文章发表，例如罗森堡（E. Rosenberg）用解析法计算实心铁中涡流分布[57]，伍德（A. J. Wood）和康柯蒂亚（C. Concordia）系统地分析了异步电机实心转子电磁场和参数计算特点，考虑了铁磁材料非线性、转子曲度和有限长的影响[58]．聂孟（Л. Р. Нейман）[59] 提出考虑非线性的另一种分析方法．以后波斯特尼柯夫（И. М. Постников）等人用于分析异步电机实心转子和同步电机实心磁极问题[60]．参考文献[59]是解决铁磁材料非线性问题比较成功的文章，文中结论常被引用．

由于解析计算的困难，数学模拟和物理模拟方法得到了发展，解决了许多实际问题，大量文章和专著陆续发表，其中比较系统的有古金马赫（Л. И. Гутенмахар）的"电模型"[61]及卡普勒斯（W. J. Karplus）的"场问题的相似模拟解法"[62]．模拟方法一直沿用至今，但对结构复杂的电机电磁场问题，这种方法的应用受到限制．

六十年代发电机单机容量不断增长，线负荷增长得更快，使定子端部结构件过热，绕组电动力增大，甚至使绝缘磨损，引起短路，烧毁电机．许多科技人员对端部电磁场问题进行了大量分析和试验工作，例如卡本脱（Carpenter）等的电磁镜象理论[63,64]，蒂戈波勒斯（J. A. Tegopolus）的电流层分析方法[65]及计算磁场、损耗和力的文章[87~94,96]为解决端部电磁场问题作出了重要贡献．这些论文中普遍采用简化边界，以等效电流层来代替端部绕组和气隙等方法，使物理模型能够适应解析法求解．杰罗斯塔夫（Stepina Jarostav）分析了电屏蔽效应，提出合理选用屏蔽厚度的建议[66]．这一些论文运用电磁场理论解决了一些电机生产中问题，取得了成果．但由于电机电磁场问题的复杂性，大量问题仍待研究解决．

随着电子计算机的发展，数值方法引入电机电磁场领域，使许多问题有很大进展．数

值计算方法中差分法、积分方程法和有限单元法比较适用于电机电磁场计算. 差分法的引入比较早,例如埃尔达莱(Erdelyi)(1963)用差分法计算二维磁场,考虑了铁磁材料的非线性[67-69]. 奥田宏史(1969)分析了电机端部恒定磁场[70]. 恰利(M. V. K. Chari)及西尔维斯特(P. Silvester)对有限元法引入电磁场领域作了大量工作,发表了求解二维涡流场、考虑材料非线性的恒定磁场等一系列文章[71,72,75]. N. Takahachi(1976)发表了汽轮发电机负序转子涡流场数值计算[73]. 吉田俊一发表了实心磁极起动时电磁场、温度场及应力场的有限元计算[74]. 奥田宏史于1976年又发表了定子端部行波涡流场的有限元计算[34,35]. 伊藤元哉等人发表了同时考虑铁磁材料非线性和涡流的电机电磁场有限元计算[76](1979). 哈纳勒(A. Hannalla)发表了电机瞬变电磁场计算的文章[77,78]. 变压器三维场及其他二、三维场积分方程法计算的论文也陆续发表. 有的文章认为三维场采用有限元计算所需计算机内存过大,费用高,应该重视积分方程法、蒙特卡洛(Monte Carlo)法及其他数值方法的应用.

我国在六十年代发表过一批用解析法和模拟法分析求解电机电磁场的文章[20,27,32,36,37,38,95]. 1976年以来又陆续发表了电磁场数值计算文章,例如汽轮发电机负序运行转子涡流场有限元计算[103]、直流电机饱和磁场差分法计算[33]及有限元计算[21,22,24]. 同步电机起动时阻尼条电流分布有限元计算已经解决[23]. 复杂的电机端部行波涡流场计算[98,99]及三维静电场计算[114]也有了论文.

电机电磁场问题原则上都可以用数值计算方法求解,但由于计算机内存容量、计算速度及计算费用的限制,三维场及瞬变场的计算还有许多工作要做,例如考虑转子边端效应的非线性磁场和涡流场、月牙槽附近的涡流场、护环接触面损耗、定子绕组非完全换位的环流、失磁运行励磁绕组过电压、瞬变过程参数计算、考虑材料非线性及各向异性的三维场以及电磁、温度和应力场的联合计算等等问题尚待解决. 分析计算方法随着离散数学的进展将不断地发展. 各种特殊电机及电机特殊运行方式中的电磁场计算仍是广泛研究的课题. 三维场动态位的选择以及场路结合解决电机电磁问题等都值得进一步探索.

§1-2 电机电磁场问题分类及分析方法简介

电机电磁场问题分类有下列三种: 第一种按电磁场偏微分方程性质分类,即(1)拉普拉斯方程、(2)泊松方程及(3)扩散方程或热传导方程等. 由于结合电机特点,不计位移电流,一般不列波动方程. 第二种按场源随时间的变化分为(1)恒定场及(2)时变场. 上两种分类方法与一般电磁场分类方法一致. 其中由于场的计算变量维数不同,又可分为一维、二维及三维等等. 第三种是按电机电磁场分布区域来划分,即(1)气隙磁场、(2)极间和槽内磁场、(3)定子端部电磁场、(4)铁心中磁场、(5)转子直线部分涡流场、(6)转子边缘电磁场、(7)电枢导线涡流场以及(8)其他结构件杂散场等等.

考虑到电机电磁场的目前进展状况及读者已有电磁场基础知识,我们着重按第三类方法进行介绍,在分析具体区域场问题以前,先介绍各种分析方法,并有实例说明.

电机电磁场分析方法主要有四种:(1)解析法、(2)图解法、(3)模拟法及(4)数值计算法.

解析法一般采用分离变量法及保角变换法,这在电磁场基础教科书[2]中已有介绍. 电

机设计教科书中也有电枢铜线附加损耗及卡氏系数等公式的推导，这属于典型的解析法实例．在第三章中着重介绍如何简化电机物理模型，使之适合用解析法求解，这一章具体介绍电流层分析和延拓、镜象原理以及选用合适的坐标系统等等．第四章解析法中列出典型方程各种解的形式，以及典型求解实例．保角变换一节则补充介绍电机中常用的许瓦兹-克利斯朵夫（Schwarz-Christoffel）变换，并有实例说明．

图解法是根据恒定磁场中磁力线和等位线的一些特性、徒手画出磁场图的一种方法．这一方法要求使用者有画磁场图的经验，并且事先对磁场分布有一定估计．显然目前这种方法采用价值不大，但形象直观的磁场图还是有用的．这种图形可以通过电子计算机来画出．在 §2-11 中将对磁场图的一些基本概念作一些说明．在以后各章计算实例中，给出一些场图，增加形象的认识．

在数值计算法广泛采用以前，模拟法是求解电磁场常用的方法，目前仍在继续使用．模拟法分数学模拟和物理模拟两种．数学模拟利用场的相似性（微分方程和边界条件形式一致），一般用电流场来模拟求解电机的恒定磁场及似稳电磁场．物理模拟则是采用与实物的几何尺寸成一定比例的模型（一般是实物的缩小），求解电磁场分布．数学模拟和物理模拟都要求符合相似准则．在模型上测量某些场量，然后根据一定的比例关系，计算出实物上的场量．数值计算法往往受计算机内存和费用的限制，解决某些三维场问题，可能不如模拟法．特别是模型制做不困难的场合，例如变压器，模拟法仍有突出的优点，在第七章中着重介绍电机电磁场的模拟方法、相似准则及其应用实例．

数值计算法是本书重点之一，电磁场数值计算一般为对电磁场的积分方程和微分方程进行离散化，形成线性代数方程组，解这个方程组，得到场量的近似解．数值计算一般采用（1）有限差分法、（2）有限元法及（3）积分方程法．在第五、第六和第八章中陆续对这些方法作介绍．本书不同于一般专论数值计算的书籍，重点是引用已有数学成果，不讨论解的唯一性和收敛性等问题，也不全面介绍各种数值方法，只对目前求解电机电磁场问题适用的方法作些介绍．为了适应电机科技工作者和研究生学习这些数值计算的特点，介绍这些方法时、一般通过实例，由浅入深说明其基本原理和过程，然后再进一步讨论方法中的一些环节和步骤．有些推导过程则简略，典型计算程序列于附录．

除了分析方法以外，本书还着重介绍电机电磁场各区域不同物理模型和数学模型的确定，还介绍了根据场量计算电机参数、损耗和电动力的方法以及场路结合分析电机运行中的一些问题（例如起动、失磁等）．本书还介绍一些电机三维场问题如何简化为两维场问题来分析，减少计算工作量，又能得到符合工程要求的近似解．这些内容所占篇幅不大，但我们认为对电机科技工作者是需要的．

第二章 电机电磁场的理论基础

§2-1 电磁场的基本方程

宏观电磁场的一些定律如全电流定律、电磁感应定律等等、一般有积分形式和微分形式两种，如表 2-1 所列.

表 2-1

	积分形式	微分形式
全电流定律	$\oint_l \mathbf{H}\cdot dl = I$	$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \boldsymbol{\delta}$
电磁感应定律	$\oint_l \mathbf{E}\cdot dl = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
磁通连续性定律	$\oint_S \mathbf{B}\cdot dS = 0$	$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$
高斯定律	$\oint_S \mathbf{D}\cdot dS = q$	$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$
电流连续性定律	$\oint_S \boldsymbol{\delta}\cdot dS = 0$	$\mathrm{div}\boldsymbol{\delta} = 0$

习惯上称表 2-1 中微分形式前四式为麦克斯韦方程组，表 2-1 的方程组是研究电机电磁场的理论基础. 表中各符号的意义如下:

$\mathbf{H}$——磁场强度 （安/米）

I——电流 （安）

$\boldsymbol{\delta}_c$——传导电流密度 （安/米^2）

$\mathbf{E}$——电场强度 （伏/米）

$\mathbf{B}$——磁感应强度 （磁通密度）（特斯拉，T）

$\mathbf{D}$——电位移 （库仑/米^2）

q——电荷 （库仑）

ρ——容积电荷密度 （库仑/米^3）

由于电机运行在工频及中频范围，在计算磁场及涡流场时，常常忽略位移电流及电荷作用，也即令 $q=0$，$\rho=0$ 及 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=0$，则表 2-1 的微分形式各式成为:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}_c \tag{2-1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2-2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{2-3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0 \tag{2-4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = 0 \tag{2-5}$$

式中旋度和散度的表达式分别为:

在直角坐标中

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

在圆柱坐标中

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}_r\dfrac{1}{r} & \mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_z\dfrac{1}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_r & rH_\theta & H_z\end{vmatrix}$$

在电磁介质中,场矢量有下列关系:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=\mu_r\mu_0\mathbf{H} \tag{2-6}$$

$$\boldsymbol{\delta}_c=\sigma\mathbf{E} \tag{2-7}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E} \tag{2-8}$$

式中 μ——导磁率 (亨/米, H/m)

μ_r——相对导磁率

μ_0——真空导磁率 ($4\pi\cdot 10^{-7}$ 亨/米)

ε——介电常数

ε_r——相对介电常数

ε_0——真空介电常数

σ——导电率 (1/欧米)

§2-2 标量位及矢量位微分方程

电磁场计算中常常采用位函数求解,标量磁位 ϕ 与磁场强度 $\mathbf{H}$ 的关系为:

$$-\mathrm{grad}\,\phi=\mathbf{H} \tag{2-9}$$

由式(2-3)及式(2-6)得

$$\mathrm{div}\,(\mu\mathbf{H})=0$$

在 μ 为常数时得 $\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0$,则式(2-9)成为:

$$-\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,\phi=0$$

即

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2-10}$$

上式称为标量磁位微分方程,即拉普拉斯方程,可用来计算无源区磁位及磁场分布.

有源场应采用矢量磁位,A 及其微分方程,定义

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathbf{B} \tag{2-11}$$

当 μ 为常数时，根据式 (2-1)、(2-6) 及 (2-11) 可得

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu\,\boldsymbol{\delta}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mu\,\boldsymbol{\delta}$$

根据矢量运算公式(见附录一)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu\boldsymbol{\delta} \tag{2-12}$$

在二维场及三维恒定场中可假定 $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$，则式 (2-12) 成为

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\boldsymbol{\delta} \tag{2-13}$$

上式称为矢量位的泊松方程. 式中 $\boldsymbol{\delta}$ 为外加电流密度，如果计算涡流场，则根据式 (2-7)、(2-2) 及 (2-11) 可得

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$$

则

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{2-14}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \sigma\mathbf{E} = -\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

故

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

对于二维场，由于 $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$，则

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{2-15}$$

上式称为矢量磁位 $\mathbf{A}$ 的热传导方程(或扩散方程).

∇^2 称为拉普拉斯算符，其表达式如下：

在直角坐标中

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{i}_x\nabla^2A_x + \mathbf{i}_y\nabla^2A_y + \mathbf{i}_z\nabla^2A_z \tag{2-16}$$

整个矢量磁位方程式可以分解成三个标量方程式，即

$$\left.\begin{aligned}
\nabla^2A_x &= \frac{\partial^2A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2A_x}{\partial z^2} = -\mu\delta_x \\
\nabla^2A_y &= \frac{\partial^2A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2A_y}{\partial z^2} = -\mu\delta_y \\
\nabla^2A_z &= \frac{\partial^2A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2A_z}{\partial z^2} = -\mu\delta_z
\end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

而标量位方程为

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2-18}$$

在圆柱坐标中

矢量位方程为

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left(\nabla^2A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2\partial A_\theta}{r^2\partial\theta}\right)\mathbf{i}_r + \left(\nabla^2A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2\partial A_\theta}{r^2\partial\theta}\right)\mathbf{i}_\theta + \nabla^2A_z\mathbf{i}_z = -\mu\boldsymbol{\delta}$$

可以分成三个方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}-\frac{A_r}{r^2}-\frac{2\partial A_\theta}{r\partial\theta}=-\mu\delta_r\\&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}-\frac{A_\theta}{r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}=-\mu\delta_\theta\\&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=-\mu\delta_z\end{aligned}\right\}\tag{2-19}$$

对于轴对称场，只有 A_θ、δ_θ 分量，且在 θ 方向无变化，则方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=-\mu\delta_\theta\tag{2-20}$$

对于标量位方程为:

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\tag{2-21}$$

§2-3 场矢量 H、B、E、δ 的微分方程

闭合区域中无外加能源及自由电荷，电磁介质均匀、线性而且各向同性，则由麦克斯韦方程及成分方程(式 (2-1) 到 (2-8))，经过推导，可以消去一些矢量，只保留一个矢量，得到场矢量方程。以保留 **H** 为例，则

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{H}=\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\delta}_c$$

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{H})-\nabla^2\mathbf{H}=\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E})+\mathrm{rot}(\sigma\mathbf{E})$$

故

$$-\nabla^2\mathbf{H}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H})\right)$$

即

$$\nabla^2\mathbf{H}-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}=0$$

同样可证

$$\left(\nabla^2-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{D}\\\mathbf{B}\\\mathbf{E}\end{Bmatrix}=0\tag{2-22}$$

在良导体中，可以忽略位移电流，则得

$$\left(\nabla^2-\sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{D}\\\mathbf{B}\\\mathbf{H}\\\mathbf{E}\end{Bmatrix}=0\tag{2-23}$$

由于 $\boldsymbol{\delta}=\sigma\mathbf{E}$，则根据

$$\nabla^2\mathbf{E}-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$$

可证

$$\nabla^2 \boldsymbol{\delta} - \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial t} = 0 \tag{2-23'}$$

在恒定场情况下

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = 0 \tag{2-24}$$

在正弦似稳交变场中，可以采用复数符号法，各量的时间函数规定为 $e^{j\omega t}$ 的实部，则 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可用 $j\omega$ 代替，在字母上加点表示为复数符号，则:

$$(\nabla^2 - j\omega\sigma\mu) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{B}} \\ \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{Bmatrix} = 0 \tag{2-25}$$

§2-4 动 态 位

在三维交变场情况下，同时采用标量电位 ϕ_e 及矢量磁位 $\mathbf{A}$，称为动态位。三维场中电场强度 $\mathbf{E}$ 由两部分产生，一部分由库仑场(或外加电场)所产生，即 $-\operatorname{grad}\phi_e$，另一部分由磁场变化感应产生，即 $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$。

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi_e - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2-26}$$

故

$$-\operatorname{grad}\phi_e = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

由于 $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi_e = 0$

则

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

由式(2-26)

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\nabla^2\phi_e - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} = \left.\begin{matrix} \frac{\rho}{\varepsilon} & \text{有空间电荷} \\ 0 & \text{无空间电荷} \end{matrix}\right\} \tag{2-27}$$

又由

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \boldsymbol{\delta} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\delta}_0$$

电流密度 $\boldsymbol{\delta}$ 由电场产生，包括导体中感应电流、位移电流及外加电流的密度三项，$\boldsymbol{\delta}_0$ 为外加电流密度。

$$\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A}=\frac{1}{\mu}(\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{A}-\nabla^2\mathbf{A})=\left(\sigma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(-\mathrm{grad}\,\phi_e-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)+\boldsymbol{\delta}_0 \tag{2-28}$$

即
$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\mathbf{A}+\sigma\mu\,\phi_e+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\phi_e\right)=\nabla^2\mathbf{A}-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\mu\boldsymbol{\delta}_0 \tag{2-29}$$

当
$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}+\sigma\mu\,\phi_e+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi_e}{\partial t}=0 \tag{2-30}$$

则有
$$\nabla^2\mathbf{A}-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{\delta}_0 \tag{2-31}$$

及由式(2-27)可得
$$\nabla^2\phi_e-\sigma\mu\frac{\partial\phi_e}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi_e}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\ (\text{或 }0) \tag{2-32}$$

不考虑位移电荷时，则忽略 $\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 项，不考虑自由电荷时，则忽略 $\frac{\rho}{\varepsilon}$ 项，方程式成为：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{A}-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{\delta}_0\\&\nabla^2\phi_e-\sigma\mu\frac{\partial\phi_e}{\partial t}=0\\&\mathrm{div}\,\mathbf{A}+\sigma\mu\,\phi_e=0\end{aligned}\right\} \tag{2-33}$$

计算三维涡流场时，一般采用式(2-33)．二维场或三维场不考虑导体表面电荷及外加电场时，可令 ϕ_e 为常数(设其值为零)，则式(2-33)可化成：

$$\nabla^2\mathbf{A}-\sigma\mu\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\boldsymbol{\delta}_0 \tag{2-33'}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0$$

上式与§2-2所列的矢量磁位方程一致．

动态位不是唯一的，也可以采用矢量电位及标量磁位．例如参考文献[119]选择矢量电位 $\mathbf{T}$、令其满足

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{T}=\boldsymbol{\delta} \tag{2-34}$$

又选标量磁位 ϕ，使得

$$\mathbf{H}=\mathbf{T}-\mathrm{grad}\,\phi \tag{2-35}$$

磁场强度 $\mathbf{H}$ 由两部分组成，一部分由无源恒定磁场所产生($-\mathrm{grad}\,\phi$)，另一部分由导体电流密度 $\boldsymbol{\delta}$ 所产生．与矢量磁位、标量电位的动态位相对应，其对应关系见表2-2．

表 2-2

$\mathbf{T}$	$\mathbf{A}$
$\boldsymbol{\delta}$	$\mathbf{B}$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{T}=\boldsymbol{\delta}$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathbf{B}$
$\boldsymbol{\delta}=\sigma\mathbf{E}$	$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$
σ	μ
ϕ	ϕ_e
$\mathbf{H}=\mathbf{T}-\mathrm{grad}\,\phi$	$\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{B}-\mathrm{grad}\,\phi_e$

由于

$$\text{rot}\,\mathbf{E}=\text{rot}\,\frac{\boldsymbol{\delta}}{\sigma}=\text{rot}\,\frac{1}{\sigma}\,\text{rot}\,\mathbf{T}=-j\omega\,\mathbf{B}=-j\omega\mu\,\mathbf{H}=-j\omega\mu(\mathbf{T}-\text{grad}\,\phi)$$

故

$$\text{rot}\,\frac{1}{\sigma}\,\text{rot}\,\mathbf{T}+j\omega\mu\,\mathbf{T}=j\omega\mu\,\text{grad}\,\phi \tag{2-36}$$

又因

$$\text{div}\,\mathbf{B}=0.$$

即

$$\text{div}\,(\mu\mathbf{H})=\text{div}\,(\mu\,\mathbf{T}-\mu\,\text{grad}\,\phi)=0$$

则

$$\text{div}\,(\mu\nabla\phi)=\text{div}\,(\mu\,\mathbf{T}) \tag{2-37}$$

当 μ 为常数时

$$\nabla^2\phi=\text{div}\,\mathbf{T} \tag{2-38}$$

式 (2-36) 与式 (2-28) 忽略 $\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial t}$ 项后的式子相对应，而式 (2-37) 则与式 (2-30) 忽略 $\varepsilon\mu\dfrac{\partial\phi_e}{\partial t}$ 项的式子相对应.

与 **A** 相似，**T** 有三个分量，加上标量 ϕ，共有四个变量. 选择 $\mathbf{T}-\phi$ 系统的动态位，其优点是：选择好一定的导体与非导体的交界面条件，可以使 **T** 在导体外选为零. 由于电机电磁场问题中，导电体往往占整个求解区中很小一部分(这部分有四个变量)，而其他区域可以只选 ϕ 一个变量，这样可使整个求解区域变量数减少，这在数值计算中是很有利的.

§2-5 各向异性介质中电磁场方程

对于各向异性介质，例如叠片铁心或导磁率与轧制方向有关的钢片等等，其磁通密度与磁场强度的关系可以写为：

$$\left.\begin{aligned}B_1&=\mu_{11}H_1+\mu_{12}H_2+\mu_{13}H_3\\B_2&=\mu_{21}H_1+\mu_{22}H_2+\mu_{23}H_3\\B_3&=\mu_{31}H_1+\mu_{32}H_2+\mu_{33}H_3\end{aligned}\right\} \tag{2-39}$$

即

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu_{11}&\mu_{12}&\mu_{13}\\\mu_{21}&\mu_{22}&\mu_{23}\\\mu_{31}&\mu_{32}&\mu_{33}\end{bmatrix} \tag{2-40}$$

式中下标号 1、2 及 3 表示相应轴线，B_1、B_2 及 B_3 为 **B** 在轴线方向的分量，H_1、H_2 及 H_3 为 **H** 在轴线方向的分量. 而 μ_{ik} 分别为 B_i 与 H_k 之间的导磁系数. (i、$k=1$、2、3)

在这类介质中、虽然 $\text{div}\,\mathbf{B}=0$ 条件仍然满足，但 $\text{div}\,\mathbf{H}\neq 0$，场矢量方程为

$$\nabla^2\mathbf{H}-\text{grad}\,(\text{div}\,\mathbf{H})=\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2-41}$$

在直角坐标系中，一般选取材料各向异性的轴线与坐标轴一致，而且材料特性满足 $\mu_{ik}=\mu_{ki}$，$\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$. 则