职工高等工业专科学校
高等职业技术教育
试用教材

高等数学 第2版

白富志 主编

机械工业出版社

136

职工高等工业专科学校
高等职业技术教育
试用教材

高 等 数 学

第 2 版

主　编　白富志
副主编　孟昭凤　严基宏　田明欣
主　审　张贵恩　孙旷舞

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据原国家教委1992年18号文件精神编写的，体现了高等职业技术教育特色和不同专业部门需要的特色。内容主要有函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分及其应用、矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线曲面积分、级数、微分方程等。在每一章节后都配有习题，并配有《高等数学学习指导与题解》一书，可供学生参考使用。本书内容深入浅出、通俗易懂，便于自学。本书可作为高等院校、高等职业院校、成人高校机电类及其它专业使用教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/白富志主编．—2版．—北京：机械工业出版社，1998.6
职工高等工业专科学校高等职业技术教育试用教材
ISBN 7-111-06317-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．白…　Ⅲ．高等数学-高等学校：专业学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第08841号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：王世刚　等　版式设计：冉晓华　责任校对：张　媛
封面设计：姚　毅　　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1999年10月第2版第4次印刷
787mm×1092mm1/16·21.75印张·529千字
9 301—12 300
定价：28.50元

第一章　函　　数

函数是数学中的一个重要的基本概念，本书中所要讨论的微分学，积分学、微分方程等内容，都将以函数作为主要研究对象。一元函数的有关内容在中学已经学过，本章仅对一元函数的内容加以整理，并予适当地补充，使读者便于理解和学习。

第一节　函数的概念

一切客观事物本来是相互联系和有内部规律的，函数关系所表达的变量之间的相互依赖关系，正是从量的侧面来反映客观事物在运动变化过程中，变量之间所存在的相互联系、相互制约的关系。虽然不同的函数关系所包含的具体意义和形式不同，但它们共同的实质，却可以用函数概念来加以概括性的描述。

下面将给出实数集上实值函数的概念，并用 R 表示全体实数的集合，D 表示 R 的子集。

定义 1-1　如果有一个确定的对应规律 f，使得对于 D 中的每一个实数 x，都有一个唯一确定的实数 y 与之相对应，并记 $y=f(x)$，则称 f 是 D 到 R 的函数，也称 f 是定义于 D 上的（实值）函数。用

$$f: D\to R(\text{或 } D\xrightarrow{f}R)$$

或

$$f: x\to f(x)=y(x\in D, y\in R)$$

来表示，称集合 D 为函数 f 的定义域，称 x 为自变量，称 y 为因变量。当 x 取遍 D 中的一切数时，与之对应的数 y 的全体组成的集合 F 常记为 $f(D)$，即

$$F=f(D)=\{y=f(x)\,|\,x\in D\}$$

且称 F 为函数 f 的值域。

由于每一个 $y\in F$ 都至少有一个元素 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，所以 f 又称为 D 到 F 上的函数。如果 $F=R$，则称 f 为 D 到 R 上的函数；如果 F 为真子集，则称 f 为 D 到 R 内的函数；如果对于每一个 $y\in F$，只有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，即当 $x_1\neq x_2$，$x_1\in D$，$x_2\in D$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称函数 f 是 D 到 F 上的一对一函数（或一一对应）。

定义 1-1 所描述的变量 x 与 y 之间的对应关系，通常称为函数关系。

由于 y 是通过函数关系依赖于 x，习惯上常常简单地表述为“y 是 x 的函数”，并用 $y=f(x)$ 来表示。为了方便，我们仍遵循这一习惯，但我们应该根据上述的定义完整地理解它。它的含义是有对应规律 f 存在，使得对于定义域 D 上的每一个 x 都有确定的 y 与之对应，即当用字母 f 表示函数时，如果 $x\in D$ 对应着 $y\in F$，就写为 $y=f(x)$。今后也用到“已给函数 $y=f(x)$”等词句，其含义也均应如此理解。

此外，要说明的一点是，在定义中要求对于每一个 $x\in D$，按对应规律 f，有一个唯一确定的实数 y 与之对应。按这一规定来定义的函数，通常称为单值函数。如果去掉唯一性的限制，而对于 $x\in D$，按对应规律 f，有多个实数值 y 与之对应时，则称函数 f 为多值函数。由于我们

主要讨论单值函数，今后如不作特别的声明，所遇到的函数均指单值函数。

由定义知，一个函数由对应规律 f 和定义域 D 所完全决定（值域 F 是随着 f 和 D 的给定而确定的），因此，它们是决定函数的两个要素。下面对于函数的表示法，函数的定义域，函数记号和函数值等再作一些说明。

1. 关于函数的表示法

表示函数的方法，亦即表示对应规律 f 的方法，常用的有三种：列表法、分析法（即公式表示法）与图解法，这些都是早已熟悉的内容，这里不再重复了。

由于用分析法表示函数便于进行理论研究和数值计算，高等数学中所讨论的函数以分析法表示为主。

应提起注意的是，函数用分析法表示时，对于自变量的一切值，两个变量间的对应法则不一定用一个解析式子给出，可能会遇到下面这种情形，对于自变量的某一部分值，对应法则用某一分析式，而对于另外的部分，却由另外的分析式子给出，即在自变量的不同的变化范围内可以用不同的式子来分段表示，这样的函数叫分段函数，像下面的例子就是这样的分段函数。

例 1-1 脉冲发生器产生一个单三角脉冲，其波形如图 1-1 所示。
这时电压 U 与时间 t 的函数关系，就用下面的分段形式来表达：

$$U=U(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t & 0<t<\dfrac{\tau}{2}\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau) & \dfrac{\tau}{2}\leqslant t<\tau\\ 0 & \tau\leqslant t\end{cases}$$

对分段函数求函数值时，不同点的函数值应根据相应范围内的表示式去求。

例 1-2 设

$$y=f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2} & x<-1\\ \sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$，$f(1)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$。

解

$$f(-2)=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$$

$$f(1)=\sqrt{1-(1)^2}=0$$

$$f(0)=\sqrt{1-(0)^2}=1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

有时也借助函数的图形来加强直观性。所谓（一元）函数的图形 f，用集合的观点来说，就是 xoy 坐标平面上如下点的集合：

$$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

例如例 1-2 的图形如图 1-2 所示。

另外，用分析法表示函数时，有下面两种情况。

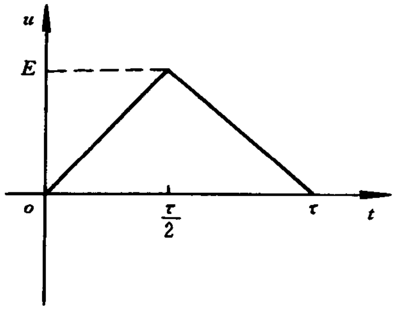

图 1-1

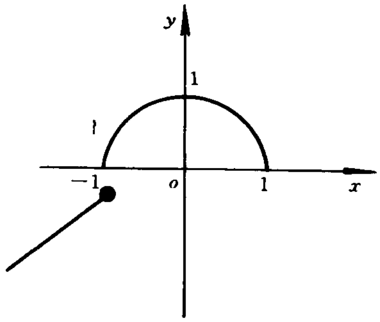

图 1-2

(1) 如果因变量 y 是用含自变量 x 的分析式来直接表达的，这种函数叫做显函数，记作 $y=f(x)$。例如

$$y=f(x)=x$$
$$y=f(x)=\sqrt{1+\sin x}$$ 等等，都是显函数。
$$y=f(x)=x^{\sin x}$$

(2) 如果变量 x 与 y 之间的对应关系是由某一方程来确定的，例如，方程

$$x^2-y^2=1$$

就确定变量 x 与 y 之间的某种函数关系，因为它们确定了其中一个变量是另一个变量的函数，譬如说，由它可确定 y 是 x 的函数。事实上，解上面这个方程就得到：

$$y=\pm\sqrt{x^2-1}$$

这表明，方程 $x^2-y^2=1$，在 $y\geqslant 0$ 或 $y<0$ 时，可确定 y 为 x 的函数。

一般地说，如果函数 y 是由方程

$$F(x、y)=0$$

确定的，则称 y 是 x 的隐函数。

任何显函数 $y=f(x)$，都能表示成隐函数形式

$$y-f(x)=0$$

但隐函数却不一定能化为显函数的形式。像上面例子所表示的隐函数是可以化为显函数形式的，面由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 表示的隐函数 y 就不能化为显函数，这是因为不能用初等数学方法由这个方程将 y 解出。

2. 函数的定义域

研究函数关系时，要注意函数的定义域，因为自变量 x 只有在定义域 D 内取值，因变量才有确定的值与之对应，函数才有意义。对反映客观实际现象的函数关系，定义域由实际意义来确定。譬如，考虑自由落体运动时，其开始降落的时刻为 $t=0$，着地时刻为 $t=T$，则函数 $s=1/2gt^2$ 的定义域为

$$D=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant T\}$$

显然，在这个定义域之外讨论自由落体就毫无实际意义了。

在数学中所讨论的函数，常常是撇开了实际意义的，研究这种抽象的函数关系时，如果没

有注明其定义域，那么函数的定义域由给出的函数表达式来确定，即函数的定义域应理解为使公式有意义的自变量所能取值的全体。现举例子进行说明。

例 1-3 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(3) $y=\sqrt{\lg(x-2)}$

解 (1) 对于函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$，x 取任何实数值时，因变量 y 都有确定的值与之对应，因此函数的定义域为

$$D=\{x\mid x\in R\}$$

(2) 对于函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，由于所讨论的函数，因变量 y 只能取实数值：当 $1-x^2\leqslant 0$，即 $|x|\geqslant 1$ 时，y 没有确定的实数值与之对应，而仅当 $|x|<1$，即 $-1<x<1$ 时，y 有确定的实数值与之对应，所以函数的定义域为

$$D=\{x\mid -1<x<1\}$$

(3) 对于 $y=\sqrt{\lg(x-2)}$，因为对数的真数不能小于或等于零，所以必须使 $(x-2)>0$，又因根号下的数值不能为负，因此只有当 $(x-2)\geqslant 1$；即 $x\geqslant 3$ 时，y 有确定的值与之对应。所以函数的定义域为：

$$D=\{x\mid x\geqslant 3\}$$

在微积分学中遇到的函数，多数取下面这样一些集合作为定义域，并且它们各用特有的记号表示，今一并写作下面：

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，　　$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$　　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$　　$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$　　$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\{x\mid x\text{ 是实数}\}=R$

这些集合统称为区间，特别是 $[a,b]$ 称为闭区间，(a,b) 称为开区间。(这里 a、b 为二实数)

下面介绍今后要用到的且与区间有关的邻域概念：

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，开区间

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记为 $N(a,\delta)$，它在数轴上表示如图 1-3 所示。

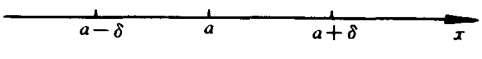

图 1-3

今后用到邻域 $N(a,\delta)$ 时，有时要把点 a 去掉，为了方便起见把它记为 $N(\hat{a},\delta)$，显然

$$N(\hat{a},\delta)=N(a,\delta)-\{a\}$$

或

$$N(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

3. 函数记号和函数值

在上面已经说到，定义于 D 上的函数，按习惯记为 $y=f(x)$，并且说"y 是 x 的函数"或者说"函数 $y=f(x)$"。应注意这里 f 表示对应规律，至于 f 究竟表示什么样的一种对应规律，它完全由具体函数本身来确定。

如自由落体运动的路程 s 和时间 t 的函数关系可以具体地表示为 $s=f(t)$，这里 $f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，f 表示时间与路程的对应规律，具体地说，f 是通过自变量 t 的平方再乘以 $\frac{1}{2}g$ 来实现的。

有时，为了方便起见，y 是 x 的函数，记为 $y=y(x)$。例如 $y=\sin x$，记作 $y=y(x)=\sin x$。

在同一问题中，如果要同时讨论几个不同的函数关系，为了避免混淆就要用不同的函数符号来表示。例如：圆的面积、周长都是半径 r 的函数，则可分别记为 $s=f(r)=\pi r^2$ 和 $c=\varphi(r)=2\pi r$。

当自变量 x 在定义域内取定值 x_0 时（即 $x_0\in D$），函数 $y=f(x)$ 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的函数值或特定值。记为

$$f(x_0)\quad 或 \quad y|_{x=x_0}。$$

如果函数是用分析法表示的，求在 $x=x_0$ 的函数值 $f(x_0)$ 时，只要在表达式中将 x 换成 x_0 就行了。

例 1-4 $f(x)=x^2-3$，求 $f(0)$，$f(3)$，$f(x_0)$，$f\left(\frac{1}{n}\right)$。

解 $f(0)=-3$ $\qquad f(3)=3^2-3=6$

$f(x_0)=x_0^2-3$ $\qquad f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2-3$

例 1-5 设 $f(x)=x^2+1$，求证：$f(a)=f(-a)$。

证 $f(a)=a^2+1$，$f(-a)=(-a^2)+1=a^2+1$ 所以 $f(a)=f(-a)$

例 1-6 设 $f(x)=\sin x$，求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f(\omega t)$。

解 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ $\qquad f(\omega t)=\sin\omega t$

为了今后叙述的方便，如果函数 $y=f(x)$ 在 x 取某个定值 x_0 时，有确定的对应值 $f(x_0)$，则称函数在 $x=x_0$ 点是有定义的，如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上的每一点都是有定义的，则称函数在该区间上是有定义的或者说定义于该区间上。

习　题　1-1

1. 下列各题中两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\frac{x}{x}$ 和 $y=1$；　　(2) $y=\lg x^3$ 和 $y=3\lg x$

2. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\ln\arcsin x$；　　(2) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$；　　(3) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}+\ln(2x-3)$；

(4) $y=\arccos\frac{x-1}{2}+\ln(4-x^2)$；　　(5) $y=\frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x-1)}$；　　(6) $f(x)=\log_3\log_6\log_7 x$

3. 写出下列函数关系

(1) 把球的体积 V 表示为它的表面积 A 的函数；

(2) 半径为 R 的球内，有一内接圆柱体，试将圆柱体的体积表示为高的函数。

4. 求下列函数值

(1) $F(x)=2^{x-3}$，求 $F(0)$，$F(1)$，$F(-3)$；　　(2) $y=3\sin\theta+1$，求 $y|_{\theta=0}$，$y|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$，$y|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}$

5. $f(x)=x^3-5x$，证明：

(1) $f(-2)=-f(2)$；　　(2) $f(-x)=-f(x)$

6. $f(t)=t^2+t-2$，求 $f(t)=0$ 的 t 值。

7. 设 $A=\{1,3,5,7\}$，$f(x)=x^3$，求 f 的值域。

第二节　函数的几种特性

下面介绍描述函数性态的几种简单特性。

一、奇偶性

定义 1-2　对于包含在函数 $y=f(x)$ 的定义域中任意点 x，如果

$$f(-x)=-f(x) \tag{1}$$

则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数；如果

$$f(-x)=f(x) \tag{2}$$

则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数

奇函数的图形，对称于坐标原点（图 1-4），偶函数的图形对称于 y 轴（图 1-5）。

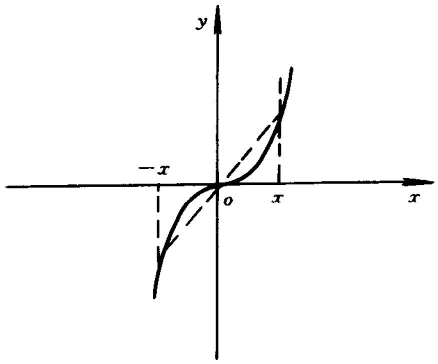

图　1-4

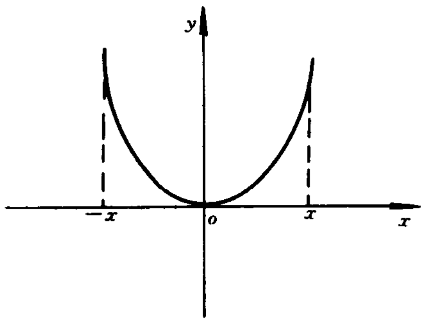

图　1-5

例如，$y=x^n$（n 为奇数），$y=\sin x$ 都是奇函数，$y=x^n$（n 为偶数），$y=\cos x$ 都是偶函数。

$y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数。

二、单调增减性

定义 1-3　对于函数 $y=f(x)$ 有定义的区间 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2) \tag{3}$$

则称函数在 (a,b) 内是（严格）单调增加的函数。其图形在 (a,b) 内沿 x 轴的正向上升（图 1-6）；如果 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2) \tag{4}$$

则称函数在 (a,b) 内是（严格）单调减少的函数。其图形在 (a,b) 内沿 x 轴的正向下降（图 1-7）。

在整个区间上单调增加的函数或单调减少的函数，统称为单调函数。

例如，$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty,0]$ 上则是单调减少的。

函数 $y=x^3$ 是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数。

三、有界性

定义 1-4　设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于 (a,b) 内的一切 x，有

$$|f(x)| \leqslant M \tag{5}$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是有界的，否则就称为无界的。

当函数 $y=f(x)$ 在其定义域内为有界时，则称它为有界函数。例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$，在其定义域内是有界函数，而函数 $f(x)=1/x$ 在其定义域内无界。

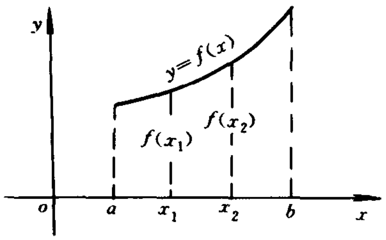

图 1-6

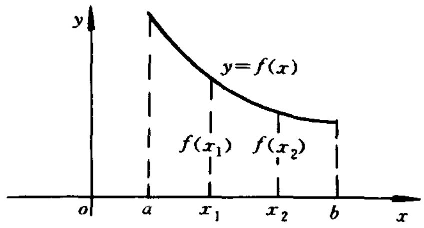

图 1-7

四、周期性

定义 1-5 如果有常数 a 存在，使得对于函数 $y=f(x)$ 的定义域内任意点 x，有

$$f(x+a)=f(x) \tag{6}$$

则函数 $y=f(x)$ 为周期函数。使等式(6)成立的最小正数 a 称为函数 $y=f(x)$ 的周期。

例如，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的函数。

习　题　1-2

1. 指出下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x)^2$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=x-x^2$；　　(4) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$；

(5) $y=2^x$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

2. 设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并决定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数？哪个是偶函数？

3. 设下面所考虑的函数都是定义在 $(-l,l)$ 内的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数。

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

4. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\sin \pi x$；

(3) $y=x\cos x$；　　(4) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

5. 验证下列函数在所示区间内是单调增加的。

(1) $y=x^4\quad(0,+\infty)$；　　(2) $y=2^{x-1}\quad(0,+\infty)$；

(3) $y=\lg x+x\quad(0,+\infty)$；　　(4) $y=2x+\sin x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

6. 验证下列各函数在所示区间内是单调减少的。

(1) $y=x^4\quad(-\infty,0)$；　　(2) $y=\cos x\quad[0,\pi]$

第三节 复合函数 反函数 初等函数

一、复合函数

定义 1-6 设函数 $y=f(u)$是定义于数集 G 上的函数，其值域为 F，而 $u=\varphi(x)$是数集 D 上的函数，其值域为 G_1，并且 $G_1\subset G$，则对应 $x\to f[\varphi(x)]$定义一个 D 上的函数，这个函数记为 $f\circ\varphi$，即

$$f\circ\varphi:\ x\to(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]=y$$

并称这个函数为 D 上的复合函数，u 称为中间变量。

例 1-7 自由落体的动能 E_k 与速度 v 有关系

$$E_k=f(v)=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 与时间 t 有关系

$$v=\varphi(t)=gt$$

这样动能就通过 v 成为时间 t 的函数，即 E_k 是 t 的复合函数

$$E_k=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}m(gt)^2$$

例 1-8 设 $y=1+u^2$，而 $u=\sin x$，则 $y=1+\sin^2x$ 是 x 的复合函数。

通常也说复合函数 $y=f[\varphi(x)]$是由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的，它是将 $u=\varphi(x)$代入 $y=f(u)$中的变量 u 而得到的函数，$y=f[\varphi(x)]=F(x)$，所以 u 是中间变量，这个过程称为复合步骤。

显然，复合函数可以由两个函数复合而成，也可以由多个函数多次复合而成。

例如，$y=f(u)$、$u=g(v)$、$v=h(x)$，则

$$y=f[g(u)]=f\{g[h(x)]\}$$

是由两个中间变量，经过两次复合步骤，而构成的复合函数。

例 1-9 设 $y=\log_a u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$，把 y 表示成 x 的复合函数。

解 $y=\log_a\sqrt{1+x^2}$

在将两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合成复合函数时，应注意函数的定义域。例如，对于已给函数 $y=\arcsin u$，$u=2+x^6$ 就不能构成复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 定义在$[-1,1]$上，而函数 $u=2+x^6$ 的值在 x 取任何值时，都不属于区间$[-1,1]$，故 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^6$ 不能构成复合函数。

另外，由下例可以看出，复合函数的复合次序不能调换。

例 1-10 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$。

解 $f[\varphi(x)]=\dfrac{1}{[\varphi(x)]^2+1}=\dfrac{1}{x^2+2}$

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{x^2+1}$$

由此例可见，$\varphi\circ f\neq f\circ\varphi$，也就是说复合函数的复合次序是不能任意调换的。

在研究一些函数时，常利用复合函数概念将复杂的复合函数拆成为几个简单函数，对函数

的研究和计算，都是十分方便的，因此复合函数是高等数学中一个十分重要的概念，应深刻理解其意义。

例 1-11 函数 $y=(\sin x)^2$ 可以看成由两个函数 $y=u^2, u=\sin x$ 复合而成的。

例 1-12 函数 $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 可以看成由四个函数 $y=\ln u, u=1+v, v=\sqrt{w}, w=1+x^2$ 复合而成的。

二、反函数

我们知道函数关系只是表示某一变化（或运动）过程中，变量之间的对应规律，它说明在该变化过程中变量间有一定的对应关系，虽然在函数的定义中把两个变量分为主从，当一个变量的值给定后，另一个变量有确定的值与之对应，我们把前者叫做自变量，后者叫做因变量。

但在变化过程中变量之间的变化是相互影响，相互依赖，相互制约的，因此，在研究两个变量间的函数关系时，哪个变量作为自变量，哪个变量作为因变量并不是绝对的，而是在一定的条件下可以互相转化的，我们可以根据问题的需要，选定其中之一为自变量，另一个则是因变量。例如，在自由落体运动中，当从已给定的时间求路程时，或要从时间来分析路程的变化状态时就选定时间 t 作为自变量，于是 s 与 t 的对应关系就是

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (0\leqslant t\leqslant T)$$

这个函数记为 $s=f(t)$。

但是我们要从物体下落的路程 s 来确定所需时间 t 时，就选取 s 作为自变量，这样 t 就是因变量，从上面的关系式可解得

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \quad (0\leqslant s\leqslant s，其中\ s=\frac{1}{2}gT^2)$$

这个函数记为 $t=\varphi(s)$。

我们通常称函数 $t=\varphi(s)$ 是函数 $s=f(t)$ 的反函数。

下面我们将从纯数量的角度来定义反函数概念。

定义 1-7 设函数 $y=f(x)$ 是一个由 D 到 F 上的一对一函数，则在 F 到 D 上可以定义这样一个对应规律 φ，对每一个 $y=f(x)\in F$，使 $x\in D$ 与之对应，这样规定的对应规律 φ 一般用记号 f^{-1} 表示，它是 F 到 D 上的函数，称为函数 f 的反函数。

显然，反函数 f^{-1} 的定义域为 F，值域为 D，并可记为

$$f^{-1}: F\rightarrow D$$

或

$$y\rightarrow x=f^{-1}(y) \quad (y=f(x)\in F, x\in D)$$

由定义可知函数 f 与 f^{-1} 实际上互为反函数。

函数 f 有反函数 f^{-1} 时，通常称函数 f 的反函数存在，由定义 1-7 知（严格的）单调函数必存在反函数。

如果函数 $f(x)$ 是用公式给出的，在简单情况下，只要通过解方程就可由 $f(x)$ 找出 $f^{-1}(y)$。

例 1-13 $y=f(x)=x^3 \quad x\in R$ 则

$$x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}, y\in R$$

例 1-14 $y=f(x)=5x-3, x\in R$，则

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y+3}{5}$$

由上面二例可见，f^{-1}与 f 不仅运算方法相反，运算次序也相反。

因为习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是，把 $x=f^{-1}(y)$改写为 $y=f^{-1}(x)$，仍称 $y=f^{-1}(x)$是函数 $y=f(x)$的反函数。

易于证明，反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与函数 $y=f(x)$有如下的关系：

反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与函数 $y=f(x)$的图形对称于直线 $y=x$。(图 1-8)(请读者自己证明)。

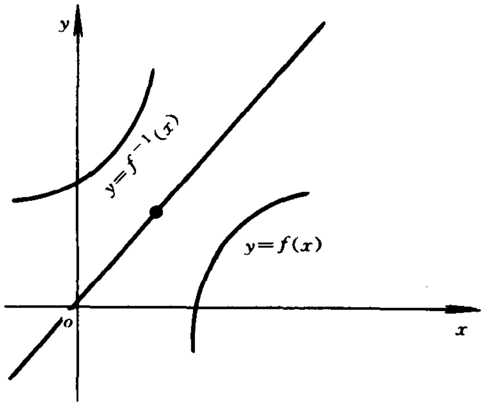

图 1-8

例 1-15 设函数 $y=2x-1$，则反函数为 $x=\frac{y+1}{2}$，或改写为 $y=\frac{x+1}{2}$(图 1-9)。

例 1-16 设函数 $y=e^x$，则反函数为 $x=\ln y$ 或改写为 $y=\ln x$(图 1-10)

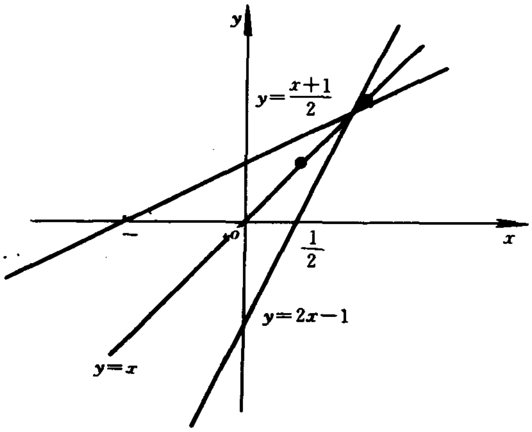

图 1-9

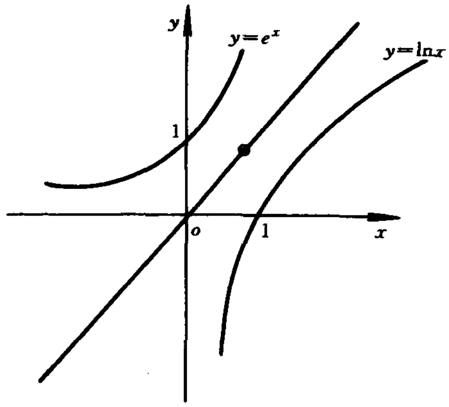

图 1-10

三、基本初等函数

在实际问题中遇到的函数是多种多样的，人们在长期的生产实践和科学实验中，经过分析，综合和总结，发现大多数的函数是由几种最基本的函数通过加、减、乘、除的运算和复合步骤构成的，下面六种函数就是最基本的，统称为基本初等函数。

(1) 常量　$y=C$

(2) 幂函数　$y=x^\mu$　(μ 为任何实数)

(3) 指数函数　$y=a^x$　($a>0, a\neq 1$)

(4) 对数函数　$y=\log_a x$　($a>0, a\neq 1$)

(5) 三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\mathrm{tg} x, y=\mathrm{ctg} x, y=\sec x, y=\csc x$

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg} x$，$y=\mathrm{arcctg} x$，$y=\mathrm{arcsec} x$，$y=$

arccsc$x$

基本初等函数在高等数学中占有很主要的地位，读者必须熟悉地掌握这些函数的性质，特点和图形的概况。在中学的数学中已详细讨论过这些函数，不再在这里讲述，读者自己复习。

四、初等函数

初等函数是在实际问题中经常遇到的一种函数，也是高等数学研究的主要对象之一。

所谓初等函数是指：由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成的（由一个公式表达的）函数。

例如：$y=\sin x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\log_a(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$，$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

在实际应用中也常用到非初等函数。如分段函数（例 1-1 和例 1-2）就是一种常见的非初等函数，今后还会遇到其它的非初等函数。

习　题　1-3

1. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求复合函数 $f\circ\varphi$，$\varphi\circ f$，$f\circ f$ 的表示式。
2. 设 $\varphi(x)=x^3+1$，求 $\varphi(x^2)$，$[\varphi(x)]^2$ 及 $\varphi[\varphi(x)]$。
3. 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$。
4. 下列函数由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{(1+x)^2+1}$；　　(2) $y=3^{(x+2)^2}$；

(3) $y=\cos^2(2x+1)$；　　(4) $y=\sqrt[3]{\ln\cos^2 x}$；

(5) $y=(x^2+6x+10)\ln(x^2+6x+10)$

5. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f(e^{-x})$。
6. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$，求 $f(a\lg x)$。
7. 设 $s(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$，求 $s\left[\dfrac{1}{s(t)}\right]$。
8. 求下列函数的反函数，并作图：

(1) $y=1-3x$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\cos x$

第二章　函数的极限与连续

极限概念是高等数学中的一个基本概念，极限概念与极限运算虽然在中学已学过，由于微积分中的基本概念都要用极限概念来表达，而且分析运算（微分法、积分法）也要以极限运算为基础来引出，因此，在本章中将对极限概念、极限性质以及函数的连续性给以较系统和较深入的阐述。

第一节　极 限 概 念

一、数列极限

按照某种规律以自然数 1，2，3，…编号依次排列的一系列数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 称为数列（亦称序列或整标变量），通常记为 $\{x_n\}$，其中的每一个数称为数列的项，x_n 称为通项（或一般项）。

根据函数的定义知道数列 $\{x_n\}$ 实质上是定义于自然数集合 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ 上的一类特殊函数——整标函数。

例如：

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{2}$$

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots \tag{3}$$

都是数列。

随着 n 的无限变大，数列也无限地变化下去，在有些情形当 n 无限变大时，x_n 可能“无限接近于”一个常数 a。像上面几个例子中(2)、(3)两个数列，当 n 无限变大时，x_n 就“无限接近于”0，也就是说，当 n 充分大时，x_n 与 a 的差的绝对值 $|x_n-a|$ 可以任意地小，并且要多小就可以多小，数列的这种变化趋势常用下面的定义给予精确的数量描述。

定义 2-1　对于任意给定的正数 ε，总有自然数 N 存在，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

总成立，则称数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

或 $x_n\to a(n\to+\infty)$

如果数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限便说数列 $\{x_n\}$ 是收敛的，且收敛于 a，否则，就说它是发散的。

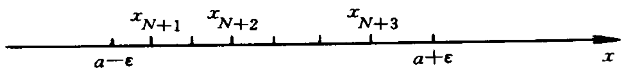

图 2-1

定义中“当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 总成立”这句话，用几何上的话说就是：第 N 项以后的一切项将全部落入点 a 的 ε 邻域 $N(a,\varepsilon)$ 内（图 2-1）。

例 2-1　证明数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

的极限是 1。

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,为了使

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$,因此,只要取自然数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}-1$,则当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

总成立,所以这个数列的极限为 1。

例 2-2 证明数列

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$$

的极限是零。

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,为了使

$$|x_n-0|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,因此,只要取自然数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon$$

总成立,所以这个数列的极限是零。

例 2-3 证明数列 $1,-1,1,-1\cdots$不收敛。

证 因为 $1,-1$,在数列中交错出现,如果这个数列收敛,则它有极限,设极限是 a,则对于任意给定的正数 $\varepsilon<1$,1 与 -1 二数应在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之内,即 1 与 -1 之间的距离应小于 2ε,从而得出

$$|1-(-1)|<2\varepsilon$$

即

$$1<\varepsilon$$

这与假设矛盾,所以这个数列不收敛。

不收敛的数列中,有一种数列是这样变化的:当 n 无限变大时,x_n 的绝对值也无限变大,这种数列精确描述如下。

定义 2-2 对于任意给定的正数 M,总有自然数 N 存在,使当 $n>N$ 时不等式

$$|x_n|>M \quad (x_n>M \text{ 或 } x_n<-M)$$

总成立,则称数列$\{x_n\}$趋向无穷大或发散为无穷大,记为 $\lim x_n=\infty$($\lim x_n=+\infty$或 $\lim x_n=-\infty$)或

$$x_n\to\infty \quad (x_n\to+\infty \text{ 或 } x_n\to-\infty)$$

为方便起见,也说数列的极限为∞($+\infty$或$-\infty$)

例如,数列

$1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$;

$-1,-4,-9,-16,\cdots,-n^2\cdots$;

$1,-4,9,-16,\cdots,(-1)^{n-1}n^2,\cdots$

的极限依次为$+\infty$，$-\infty$，$+\infty$。

数列的极限性质与运算法则在中学已学过，同时，由于数列是一类特殊的函数，下面对函数极限的性质和运算法则（其中相应的部分内容对数列是适用的）还要作较详细的讨论，这里就不重复了。

下面介绍单调数列和有界数列的概念。

如果

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \cdots$$

就称数列$\{x_n\}$是（广义）单调增加的数列，如果

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \cdots$$

则称数列$\{x_n\}$是（广义）单调减少的数列。

单调增加的或单调减少的数列，统称为单调数列。

如果存在一个正数M，使得对于一切自然数n不等式$|x_n| \leqslant M$都成立，则称数列$\{x_n\}$为有界数列。

关于单调有界数列，有下面的重要性质。

定理 2-1 〔极限存在的一个判别准则〕单调有界数列必有极限。

对这个定理这里不作证明，只给出如下的几何解释。

从数轴上看，对应于单调数列的点x_n必向一个方向移动。如果数列$\{x_n\}$是单调增加的，点x_n就向右方移动；如果数列$\{x_n\}$是单调减少的，就向左方移动，所以只有两种可能情形：或者点x_n沿数轴移向无穷远（$x_n \to +\infty$或$x_n \to -\infty$）或者点x_n无限趋近于某一个定点A（图 2-2），也就是数列趋向一个极限。现既假定数列是有界的而有界数列的x_n必然落在数轴上某一个区间$[-M, M]$内，那么，上述第一种情形就不可能发生，于是这个数列必定趋向一个极限，并且这个极限不超过M。

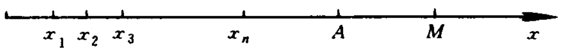

图 2-2

二、函数的极限

下面，分三种情形对函数的极限进行讨论。

1. 当$x \to x_0$时函数的极限

当自变量x"无限接近"于点x_0时，因变量$y=f(x)$"无限接近"于一个常数a，也就是当$|x-x_0|$充分小（且$|x-x_0|>0$）时，$|f(x)-a|$可以任意地小，并且要多小就可以有多小。函数的这种变化趋势，常用下面的定义来精确地描述。

定义 2-3 设点x_0的任何去心邻域，都有函数$f(x)$的定义域D内的点，如果对于任意给定的正数ε，总有一个正数δ存在，使得当$0<|x-x_0|<\delta$且x属于D时，不等式

$$|f(x)-a| < \varepsilon$$

总成立，则称常数a是函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，或者说，当$x \to x_0$时函数$f(x)$趋于常数a，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

或

$$f(x) \to a (x \to x_0)$$