高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷　第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余　家　荣　译

人 民 教 育 出 版 社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著《微积分学教程》（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第三卷1949年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷　第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

统一书号13012·0113　开本 850×1168　1/32　印张 8

字数 236,000　印数80,601—138,600 定价(5)￥0.75

1955年6月第1版　1980年1月北京第13次印刷

第三分册目录

第十九章 傅立叶級数

§1. 导言

§2. 函数的傅立叶級数展开式

§3. 补充

§4. 傅立叶級数的收斂特性

§5. 与函数可微分性相关的余部估値

§6. 傅立叶积分

第二十章　傅立叶級数(續)

第十九章　傅立叶*級数

§1. 导言

651. 周期量与調和分析　在科学与工程中时常要遇到周期現象，也就是經历一定的时間T后要恢复原状的現象，时間T称为周期。蒸汽机所作的稳定运动是这种現象的实例，它經历了一定的轉数后又重新經过原来的位置。我們也可取交流电等現象作为实例。与所考慮的周期現象有关的各种量，在經历周期T后，重新取得它們的原值；因此这些量是时間t的周期函数，可用下列等式来表明：

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

例如交流电的强度与电压就是这样的量。在蒸汽机的例子中，十字头的行程，它的速度与加速度，蒸汽压力，以及在曲柄梢处的切綫力等也都是这样的量。

最簡单的周期函数(如果我們不計常数)是**正弦型量**：$A\sin(\omega t+$ $+\alpha)$，其中ω是"頻率"，它与周期的关系是：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

用这类簡单的周期函数可以組成比較复杂的周期函数。显然用以組成复杂函数的各正弦型量必須有不同的頻率，因为頻率相等的正弦型量的和仍是有同一頻率的正弦型量。反过来考察形状为

$$\left.\begin{array}{c}y_0=A_0,\quad y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1),\quad y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2),\\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3),\cdots\end{array}\right\} \tag{2}$$

* 这个人名或譯为傅里叶、福里哀、富理埃等等——譯者。

的量；如果不計常数，这些量的頻率

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \cdots$$

是最小頻率 ω 的倍数；它們的周期是

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \cdots$$

如果将其中某些量相加，則得到一个周期函数(周期是 T)，但在实质上与(2)型的量已不同。

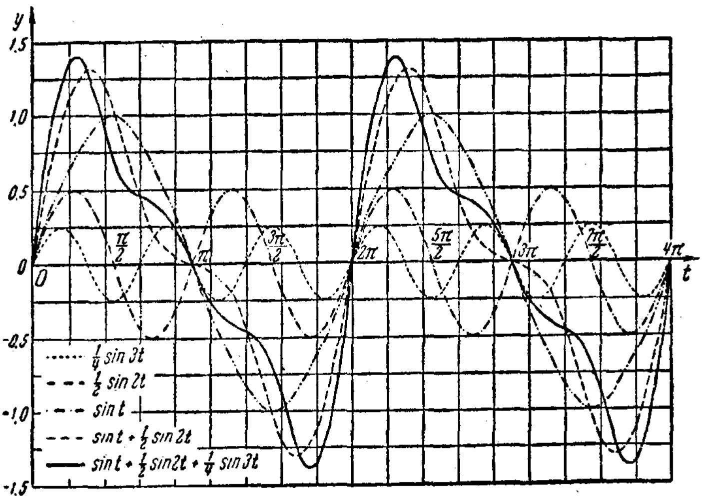

圖 121

作为一例，作三个正弦型量的和(图 121)：

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 3t;$$

这函数的图解就其特征来說已与正弦型函数的图解大不相同。用(2)型各量所作成的无穷級数的和的图解則更要不同了。

現在我們很自然地提出相反的問題：将一个周期是 T 的已給函数 $\varphi(t)$ 表作有限个，或者即使是无穷个形如(2)的正弦型量的和，是不是可能呢？在下面，我們可以看到，对于相当广泛的一类函数，可以給这

問題以肯定的答复；不过我們要引用全部数量(2)所成的无穷序列。对于这类函数，“三角級数”展开式

$$\varphi(t)=A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+$$

$$+A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)+\cdots=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n)\qquad(3)$$

成立，其中 $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \cdots$ 是常数，对于每个这样的函数，各取特殊的值，而頻率 ω 由公式(1)給出。

在几何上，这就表明：**周期函数的图解可以由叠加一系列正弦型量的图解得来。**如果将每个正弦型量解說为力学上的調和振动，則亦可說这里由函数 $\varphi(t)$ **表示的复杂振动可以分解成各别的調和振动。**因此組成展开式(3)的各正弦型量称为函数 $\varphi(t)$ 的**調和成分**或簡称**調和素**(第一，第二調和素等)。将周期函数分解成調和素的手續称为**調和分析。**

如果选取
$$x=\omega t=\frac{2\pi t}{T}$$
作为自变数，則得 x 的函数

$$f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

这也是周期函数，但具有标准周期 2π。展开式(3)将有下面的形状：

$$f(x)=A_0+A_1\sin(x+\alpha_1)+A_2\sin(2x+\alpha_2)+$$

$$+A_3\sin(3x+\alpha_3)+\cdots=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n).\qquad(4)$$

用二角和的正弦公式展开級数的各項，并令

$$A_0=a_0,\quad A_n\sin\alpha_n=a_n,\quad A_n\cos\alpha_n=b_n\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

則得三角展开式的最終形状：

$$f(x)=a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+$$

$$+(a_3\cos 3x+b_3\sin 3x)+\cdots=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad(5)$$

今后我們总是研究这种形状的展开式*。在这里角 x 的以 2π 为周期的函数就表为 x 的倍角的余弦及正弦的展开式。

在上面,从周期振动現象及与它們有关的量出发,我們得到了函数的三角級数展开式。然而重要的是現在就应注意:当研究只是在有限区間上給出、而完全不是由任何振动現象所产生的函数时,这样的展开式也时常是有用的。

652. 欧勒-傅立叶确定系数法 要研究已給的以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开为三角級数(5)的可能性,必須从系数 a_0, a_1, b_1, $\cdots$, a_n, b_n, $\cdots$的一确定組合出发。我們将說明在十八世紀的下半叶欧勒所用的系数确定法,而在十九世紀之初,傅立叶也曾經独立地应用过。

假定函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上絕对可积分。設展开式(5)成立,并将它逐項从 $-\pi$ 积分到 π,則得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right].$$

但容易看出

与

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx &= \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx &= -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

因此在和数符号后的各項都是零,最后求得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.\tag{7}$$

为要确定系数 a_m 的大小,用 $\cos mx$ 乘等式(5)(我們总假定这等

* 如果需要的話,当然不难从这个展开式反过来变成形如(4)的展开式。

式成立)的两端，再在同一区間上逐項积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right].$$

由(6)，上式右端第一項等于零。此外，不論 n, m 如何，恒有[参考**297**,4)]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0, \quad (8)$$

而 $n \neq m$ 时，則

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0; \quad (9)$$

最后还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx = \pi. \quad (10)$$

因此在和数符号后的一切积分，除了以系数 a_m 为乘数的积分外，都等于零。从而这系数就被确定为:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (11)$$

$$(m=1,2,3,\cdots).$$

同样，用 $\sin mx$ 乘展开式 (5) 后再逐項积分，即定出正弦的系数:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (12)$$

$$(m=1,2,3,\cdots).$$

在这里除了要用(6)与(8)外，我們还应用了容易驗证的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \qquad (n \neq m), \tag{13}$$

与

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi. \tag{14}$$

公式(7), (11)与(12)称为**欧勒-傅立叶公式**,用这些公式算出的系数称为已給函数的**傅立叶系数**,用这些系数作成的三角級数(5)称为已給函数的**傅立叶級数**。在本章中我們专門研究傅立叶級数。

現在来看以上的討論在邏輯上有什么价值。我們的出发点是假設三角展开式(5)成立,但是这个假設究竟眞实与否这一問題自然沒有解决。即令假定展开式(5)为眞,我們依欧勒与傅立叶的方法算出了展开式(5)的系数,然而像这样做的理由是否令人信服呢?我們一再应用过級数的逐項积分法,但是这种运算幷不是什么时候都能进行的[406]。級数的一致收斂性是可以应用这种运算的充分条件。因此現在只有下列定理能够算作已經严格地证明了:

如果周期是 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开成一致收斂的三角級数(5)*,則这級数一定是 $f(x)$ 的傅立叶級数。

如果不預先假設一致收斂性,以上的討論甚至不能证明函数能展开成傅立叶級数[参考下面 **733, 734**]。那么以上的討論究竟有怎样的意义呢?我們只能将它看成一种导入法,由此足以使得在求已給函数的三角展开式时,至少可以从它的傅立叶級数出发,而必須(完全严格地!)确定在那些条件下級数收斂幷且收斂于已給函数。

在沒有这样做以前,我們只能够在形式上考虑已給函数 $f(x)$ 的傅

* 注意,用有界函数 $\cos mx$, $\sin mx$ 乘級数各項时幷不改变級数的一致收斂性[**402**]。在这里,一致收斂性也可换成級数各部分和的有界性[**488**]。

立叶級数，除了知道它是由函数 $f(x)$“所产生”外，不能再下任何結論。通常用下列符号来表示这級数与函数 f 的关系：

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{5a}$$

而避免采用等号。

653. 正交函数系 上节中所讲的是一种討論的范例，这样的討論在数学分析中研究許多展开式时常常要应用到。

如果在区間 $[a,b]$ 上所定义的两函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的乘积，其积分为零：

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0,$$

則此两函数称为在这区間上**正交**。考虑定义在区間 $[a,b]$ 上的函数系 $\{\varphi_n(x)\}$。設系中各函数与它們的平方在 $[a,b]$ 上皆可积分，則它們的两两乘积在同一区間上也可积分 [**447**, 6]。如果系中各函数两两正交：

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0,\tag{15}$$
$$(n,m=0,1,2,\cdots,n\neq m)$$

則此系称为**正交函数系**。同时我們还永远假定

$$\int_a^b\varphi_n^2(x)dx=\lambda_n>0,\tag{16}$$

因而在正交系中不包含恒等于零的函数，也不包含其他任何平方的积分等于零的函数(在某种意义下与恒等于零的函数相似*)。

当条件 $\lambda_n=1(n=0,1,2,\cdots)$ 成立时，这函数系称为**規格的**。如果

* 参考下面 **703**。

这些条件不成立，则当需要时可换取函数系$\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$，这一函数系显然就是规格的。現举几个例如下:

1）上面考慮过的在区間$[-\pi, \pi]$上的三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \cdots, \cos nx,\ \sin nx, \cdots \tag{17}$$

正是直交函数系的重要例子；其正交性可以由关系式(6), (8), (9)与(13)看出。然而由(10)与(14)，可知它不是規格的。将(17)中各三角函数乘以适当乘数，不难获得規格系:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots \tag{17*}$$

2）注意函数系(17)或(17*)在縮小了的区間$[0, \pi]$上不再是正交的。因为如果n与m一为奇数一为偶数，則

$$\int_0^\pi \sin nx \cos mx\, dx \neq 0.$$

相反地，每一仅由余弦

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x, \cdots,\ \cos nx, \cdots \tag{18}$$

或仅由正弦

$$\sin x,\ \sin 2x, \cdots,\ \sin nx, \cdots \tag{19}$$

所組成的部分系在这区间上分别成为正交系。这点不难驗证。

3）下列两函数系与剛才考虑过的函数系沒有本质上的区别。

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l}, \cdots,\ \cos\frac{n\pi x}{l}, \cdots \tag{18*}$$

与

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l}, \cdots,\ \sin\frac{n\pi x}{l}, \cdots, \tag{19*}$$

其中每一个都是在区間$[0, l]$上的正交系。

4）为了要給出由三角函数构成的更复杂的正交系的例子，考虑超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数})。 \tag{20}$$

可以证明这方程的正根成一无穷集合：

$$\xi_1,\ \xi_2, \cdots,\ \xi_n \cdots;$$

在图解上，各根是正切曲綫 $\eta=\operatorname{tg}\xi$ 与直綫 $\eta=c\xi$ 相交之点的横坐标(图 122)。作函数系

$$\sin\frac{\xi_1}{l}x,\ \ \sin\frac{\xi_2}{l}x,\ \ \cdots,\ \frac{\sin\ \xi_n}{l}x, \cdots$$

$\sin\frac{\xi_n}{l}x$

容易算出(当 $\alpha\neq\beta$ 时)

$$\int_0^l \sin\alpha x\sin\beta x\,dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right\}=$$

$$=\cos\alpha l\cos\beta l\frac{\beta\operatorname{tg}\alpha l-\alpha\operatorname{tg}\beta l}{\alpha^2-\beta^2}.$$

如果在这里令 $\alpha=\frac{\xi_n}{l}$，$\beta=\frac{\xi_m}{l}$(当 $n\neq m$ 时)，則利用方程(20)可得

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_n}{l}x\cdot\sin\frac{\xi_m}{l}x\ dx=0\ \ (n\neq m).$$

由此证实了所述函数系在区間$[0, l]$上的正交性。

如果

$$\xi_1',\ \xi_2',\ \cdots,\ \xi_n',\ \cdots$$

是方程

$$\operatorname{ctg}\xi=c\xi\quad(c=\text{常数})$$

的正根序列，則对于函数系

$$\cos\frac{\xi_1'}{l}x, \cos\frac{\xi_2'}{l}x, \cdots,$$

$$\cos\frac{\xi_n'}{l}x, \cdots,$$

也可作出类似的結論。

但是这些函数系都不是规格的。

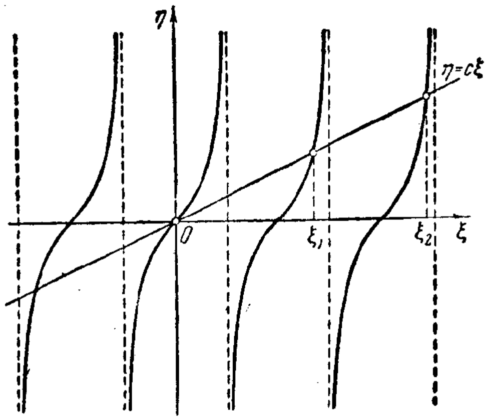

圖 122.

5) 勒戎德多項式

$$X_0(x)=1,\quad X_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$$

是在区間$[-1, 1]$上的正交系的重要例子[参考第 111 及 308 款]。因为

$$\int_{-1}^{1} X_n^2 dx=\frac{2}{2n+1},$$

所以要得到規格系，必須分别用$\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$乘这些多項式。

6) 最后，再考虑一个与貝塞尔函数有关的例子。为了写起来簡单起見，我們只限于考虑函数 $J_0(x)$，但以下所討論的一切对于函数 $J_n(x)(n>0)$也都成立。

在貝塞尔函数的理論中，证明了 $J_0(x)$的正根成一无穷集合：

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots.$$

将函数 $J_0(x)$所滿足的方程改写为

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dz}{dx}\right]=-xz,$$

則容易得到：不論α与β是什么数，

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\alpha x)}{dx}\right]=-\alpha^2 xJ_0(\alpha x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\beta x)}{dx}\right]=-\beta^2 xJ_0(\beta x).$$

用 $J_0(\beta x)$乘第一个等式，用 $J_0(\alpha x)$乘第二个等式，再将两端相减，則得：

$$(\beta^2-\alpha^2)xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)=\frac{d}{dx}[\alpha xJ_0(\beta x)J_0'(\alpha x)-\beta xJ_0(\alpha x)J_0'(\beta x)].$$

因此如果 $\alpha\neq\beta$，則

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx=\frac{\alpha J_0(\beta)J_0'(\alpha)-\beta J_0(\alpha)J_0'(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}. \tag{21}$$

如果在这里令 $\alpha=\xi_n$，$\beta=\xi_m(n\neq m)$，則得关系式：

$$\int_0^1 xJ_0(\xi_n x)J_0(\xi_m x)dx=0,$$

这就证明了函数系$\{\sqrt{x}\,J_0(\xi_n x)\}$在区間$[0,1]$上是正交的*。然而此系并不是規格的。

設在区間$[a,b]$上已給任一正交系$\{\varphi_n(x)\}$。我們試行将定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$展开成"函数φ的級数"

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots. \tag{22}$$

---

* 要推广函数φ与ψ正交性的概念，我們引进加权 $p(x)$**的正交性**的概念，用等式

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)dx=0$$

来說明这种正交性。如果采用这术語，也能說函数系$\{J_0(\xi_n x)\}$是加权x正交的。

为了要确定这展开式中的系数，先設函数可能展开，然后进行与上述特例中相同的手續。这就是說，先用$\varphi_m(x)$乘展开式的两端，再逐項积分：

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

由于正交性[参考(15)与(16)]，右端各积分除去一个以外都是零，因此容易得到：

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \tag{23}$$
$$(m=0,1,2,\cdots).$$

[公式(7)，(11)，(12)是这公式的特殊情形。]

用公式(23)所确定之系数作出級数(22)，它称为已給函数对于函数系$\{\varphi_n(x)\}$的(**广义)傅立叶級数**，而各系数本身則称为(**广义)傅立叶系数**。在規格系的情形下，公式(23)特别簡单；这时

$$c_m=\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \tag{23*}$$
$$(m=0,1,2,\cdots).$$

在这里当然也可重复在上款末尾所作的那些說明。由已給函数所作出的广义傅立叶級数仅仅是在形式上与这函数发生連系。在一般情形下，函数$f(x)$与它的(广义)傅立叶級数之間的关系表示如下：

$$f(x)\sim\sum_0^{\infty}c_n\varphi_n(x). \tag{22*}$$

与三角級数的情形一样，这級数是否收斂于函数$f(x)$，还須加以研究。

654. 三角插值法　从三角插值法出发，也可自然地接触到用三角

級数表示已給函数 $f(x)$ 的問題。所謂三角插值法就是用三角多項式

$$\sigma_n(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{24}$$

作为函数$f(x)$的近似式,使三角多項式与函数在許多点上有相同的值。

总能选取 n 阶三角多項式(24)的 $2n+1$ 个系数: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n$, 使得在区間$(-\pi, \pi)$内預先指定的 $2n+1$ 个点处,例如在

$$\xi_i=i\lambda\quad(i=-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n)$$

各点处$\left(\text{其中 } \lambda=\frac{2\pi}{2n+1}\right)$, 三角多項式的値与函数 $f(x)$ 的值相等。实际上,为了要确定这 $2n+1$ 个系数,我們有个数相同的綫性方程:

$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos k\xi_i+\beta_k\sin k\xi_i)=f(\xi_i) \tag{25}$$
$$(i=-n, -n+1, \cdots, n)。$$

要解这些方程,应当回忆到一个初等三角恒等式:

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ih=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h^*}{2\sin\frac{1}{2}h}. \tag{26}$$

将(25)中各等式两端分别相加。由于正弦是奇函数,所以 β_k 的系数

$$\sum_{i=-n}^{n}\sin k\xi_i=0.$$

α_k 的系数也是这样, 这是因为余弦是偶函数, 所以如果在恒等式(26)

---

* 如果用 $2\sin\frac{1}{2}h$ 乘此式左端, 并且将每一乘积 $2\sin\frac{1}{2}h\cos ih$ 換成差式 $\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)h-\sin\left(i-\frac{1}{2}\right)h$, 就不难求得这恒等式。[参考 **295** (2)。]

中，令 $h=k\lambda=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$时，应有

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i=1+2\sum_{i=1}^{n}\cos ik\lambda=0. \tag{27}$$

由此得

$$\alpha_0=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i). \tag{28}$$

为了要确定 $\alpha_m(1\leqslant m\leqslant n)$，分别用 $\cos m\xi_i$ 乘(25)中各等式，然后将它們的两端分别相加。則由(27)，α_0 的系数是零；因为正弦是奇函数，所以 β_k 的系数显然也等于零。至于 α_k 的系数则可表为：

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i\cos m\xi_i=\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k+m)\xi_i+\frac{1}{2}\sum_{i=-n}^{n}\cos(k-m)\xi_i;$$

当 $k\neq m$ 时，由(27)，上式右端的两个和式都为零；当 $k=m$ 时，第一个和式为零而第二个和式的值显然是$\dfrac{2n+1}{2}$。这样，只有 α_m 的系数不等于零，而等于$\dfrac{2n+1}{2}$。現在已不难求得

$$\alpha_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i)\cos m\xi_i\ \ (1\leqslant m\leqslant n). \tag{29}$$

完全与以上相仿，用 $\sin m\xi_i$ 乘(25)中各等式并且相加，求得

$$\beta_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i)\sin m\xi_i\ \ (1\leqslant m\leqslant n). \tag{30}$$

讀者一定已經注意到这里所用方法与欧勒-傅立叶确定三角級数系数法相似。但是在这里我們的計算是无可非議的，因为不难驗证所求得未知数的值确乎适合方程(25)。并且，由簡单的代数推理，此点可不待驗证而自明。我們看到方程系(25)只可能有(如果一般說来有解)