

高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人民教育出版社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业数学参考。

微 积 分 学 教 程

第三卷 第三分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

余家荣译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0113 开本 350×1168 1/32 印张 8

字数 236,000 印数 80,601—138,600 定价(5) 0.75

1955年6月第1版 1980年1月北京第13次印刷

第三分册目录

第十九章 傅立叶级数

§ 1. 导言

651. 周期量与调和分析(425) 652. 欧勒-傅立叶确定系数法(428) 653. 正交函数系(431) 654. 三角插值法(435)

§ 2. 函数的傅立叶级数展开式

655. 问题的提出·第里希莱积分(439) 656. 第一基本预备定理(441) 657. 局部化定理(444) 658. 狄尼与李潑西茨的傅立叶级数收敛性的判别法(445) 659. 第二基本预备定理(448) 660. 第里希莱-雷当判别法(450) 661. 非周期函数的情形(452) 662. 任意区间的情形(454) 663. 只含余弦或正弦的展开式(455) 664. 例(459) 665. $\log \Gamma(x)$ 的展开式(473)

§ 3. 补充

666. 系数递减的级数(475) 667. 三角级数借助于复变数解析函数的求和法(482) 668. 例(485) 669. 傅立叶级数的复数形式(490) 670. 共轭级数(493) 671. 多重傅立叶级数(496)

§ 4. 傅立叶级数的收敛特性

672. 对于基本预备定理的几点补充(499) 673. 傅立叶级数一致收敛性的判别法(502) 674. 傅立叶级数在不连续点附近的性质;特殊情形(505) 675. 任意函数的情形(510) 676. 傅立叶级数的奇异性质·预先的说明(512) 677. 奇异性质的作法(516)

§ 5. 与函数可微分性相关的余部估值

678. 函数与其导数的傅立叶系数间之关系(518) 679. 在有界函数情形时部分和的估值(519) 680. 函数有 k 级有界导数时余部的估值(521) 681. 函数有有界变差的 k 级导数的情形(523) 682. 函数及其导数的不连续性对于傅立叶系数的无穷小阶的影响(526) 683. 在区间 $[0, \pi]$ 上给出函数时的情形(530) 684. 分离奇异性质法(532)

§ 6. 傅立叶积分

685. 傅立叶积分作为傅立叶级数的极限情形(540) 686. 预先的说明(542) 687. 充分判别法(544) 688. 基本假设的变形(546) 689. 傅立叶公式的各种形式(549) 690. 傅立叶变换(551) 691. 傅立叶变换的若干性质(554) 692. 例题与补充(556) 693. 二元函数的情形(562)

§ 7. 应用

694. 用行星的平近点角所作出的它的偏近点角的表示式(564) 695. θ 函数的函数方程(566) 696. 弦振动的問題(567) 697. 在有限长杆上的热传导問題(571) 698. 无穷长杆的情形(574) 699. 极限条件的变形(576) 700. 在圆盘上的热传导(578) 701. 实用調和分析·十二个纵坐标的方法(580) 702. 例(582) 703. 二十四纵坐标的方法(585) 704. 例(587) 705. 傅立叶系数的近似值与精确值的比較(588)

第二十章 傅立叶級数(續)

§ 1. 傅立叶級数的运算·完全性与閉合性

706. 傅立叶級数的逐項积分法(591) 707. 傅立叶級数的逐項微分法(594) 708. 三角函数系的完全性(595) 709. 函数的一致近似法·维尔斯特拉斯定理(597) 710. 函数的平均近似法·傅立叶級数的部分和的极端性质(600) 711. 三角函数系的閉合性·李雅普諾夫定理(604) 712. 广义閉合性方程(607) 713. 傅立叶級数的乘法(610) 714. 閉合性方程的若干应用(611)

§ 2. 发散級数的求和法

715. 导言(617) 716. 幂級数法(619) 717. 陶伯尔定理(621) 718. 算术平均法(624) 719. 普安松-亚培尔法与齐查罗法的相互关系(626) 720. 哈第-藍涛定理(628) 721. 广义求和法在級数乘法上的应用(630) 722. 一般的綫性承襲求和法类(632)

§ 3. 求和法在傅立叶級数上的应用

723. 基本預备定理(635) 724. 傅立叶級数的普安松-亚培尔求和法(637) 725. 关于圓的第里希萊問題的解(641) 726. 傅立叶級数的齐查罗-費叶尔求和法(643) 727. 傅立叶級数广义求和法的若干应用(645) 728. 傅立叶級数的逐項微分法(647)

§ 4. 函数的三角展开式的唯一性

729. 关于广义导数的輔助命題(649) 730. 三角級数的黎曼求和法(653) 731. 关于收斂級数的系数的預备定理(657) 732. 三角展开式的唯一性(658) 733. 关于傅立叶級数的最后的定理(660) 734. 推广(663)

俄中名詞对照表

第十九章 傅立叶*級数

§1. 导言

651. 周期量与調和分析 在科学与工程中时常要遇到周期现象，也就是经历一定的时间 T 后要恢复原状的现象，时间 T 称为周期。蒸汽机所作的稳定运动是这种现象的实例，它经历了一定的轉数后又重新经过原来的位置。我們也可取交流电等现象作为实例。与所考虑的周期现象有关的各种量，在经历周期 T 后，重新取得它們的原值；因此这些量是时间 t 的周期函数，可用下列等式来表明：

$$\varphi(t+T) = \varphi(t).$$

例如交流电的强度与电压就是这样的量。在蒸汽机的例子中，十字头的行程，它的速度与加速度，蒸汽压力，以及在曲柄梢处的切綫力等也都是这样的量。

最简单的周期函数(如果我們不計常数)是正弦型量： $A \sin(\omega t + \alpha)$ ，其中 ω 是“頻率”，它与周期的关系是：

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1)$$

用这类简单的周期函数可以組成比較复杂的周期函数。显然用以組成复杂函数的各正弦型量必須有不同的頻率，因为頻率相等的正弦型量的和仍是有同一頻率的正弦型量。反过来考察形状为

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= A_0, & y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), & y_2 &= A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2), \\ & & y_3 &= A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 这个人名或譯为傅里叶、福里哀、富理埃等等——譯者。

的量; 如果不計常数, 这些量的頻率

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$$

是最小頻率 ω 的倍数; 它們的周期是

$$T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \dots$$

如果將其中某些量相加, 則得到一个周期函数(周期是 T), 但在实质上与(2)型的量已不同。

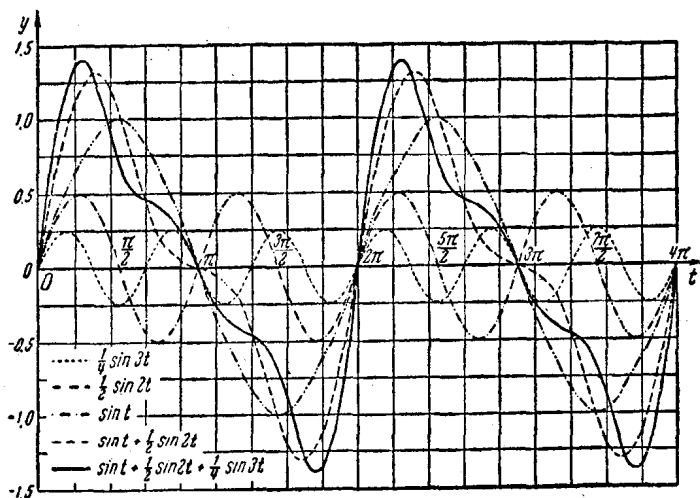


圖 121

作为一例, 作三个正弦型量的和(图 121):

$$\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 3t;$$

这函数的图解就其特征來說已与正弦型函数的图解大不相同。用(2)型各量所作成的无穷級数的和的图解則更要不同了。

現在我們很自然地提出相反的問題: 將一个周期是 T 的已給函数 $\varphi(t)$ 表作有限个, 或者即使是无穷个形如(2)的正弦型量的和, 是不是可能呢? 在下面, 我們可以看到, 对于相当广泛的一类函数, 可以給这

問題以肯定的答复；不过我們要引用全部数量(2)所成的无穷序列。对于这类函数，“三角级数”展开式

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (3)$$

成立，其中 $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \dots$ 是常数，对于每个这样的函数，各取特殊的值，而频率 ω 由公式(1)给出。

在几何上，这就表明：周期函数的图解可以由叠加一系列正弦型量的图解得来。如果将每个正弦型量解为力学上的调和振动，则亦可说这里由函数 $\varphi(t)$ 表示的复杂振动可以分解成各别的调和振动。因此组成展开式(3)的各正弦型量称为函数 $\varphi(t)$ 的调和成分或简称调和素(第一，第二调和素等)。将周期函数分解成调和素的手续称为调和分析。

如果选取
$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$$

作为自变数，则得 x 的函数

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

这也是周期函数，但具有标准周期 2π 。展开式(3)将有下面的形状：

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \\ + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \cdots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \quad (4)$$

用二角和的正弦公式展开级数的各项，并令

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin \alpha_n = a_n, \quad A_n \cos \alpha_n = b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

则得三角展开式的最終形状：

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \\ + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5)$$

今后我們总是研究这种形状的展开式*。在这里角 x 的以 2π 为周期的函数就表为 x 的倍角的余弦及正弦的展开式。

在上面,从周期振动现象及与它們有关的量出发,我們得到了函数的三角級数展开式。然而重要的是現在就应注意:当研究只是在有限区間上給出、而完全不是由任何振动现象所产生的函数时,这样的展开式也时常是有用的。

652. 欧勒-傅立叶确定系数法 要研究已給的以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开为三角級数(5)的可能性,必須从系数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$ 的一确定組合出发。我們將說明在十八世紀的下半叶欧勒所用的系数确定法,而在十九世紀之初,傅立叶也曾經独立地应用过。

假定函数 $f(x)$ 在区間 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积分。設展开式(5)成立,并将它逐項从 $-\pi$ 积分到 π , 則得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right].$$

但容易看出

$$\text{与 } \left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \left. \frac{\sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= - \left. \frac{\cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此在和数符号后的各項都是零,最后求得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (7)$$

为要确定系数 a_m 的大小,用 $\cos mx$ 乘等式(5)(我們总假定这等

* 如果需要的話,当然不难从这个展开式反过来变成形如(4)的展开式。

式成立)的两端,再在同一区间上逐项积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right].$$

由(6),上式右端第一项等于零。此外,不论 n, m 如何,恒有[参考297.4]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0, \quad (8)$$

而 $n \neq m$ 时,则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = 0; \quad (9)$$

最后还有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} \, dx = \pi. \quad (10)$$

因此在和数符号后的一切积分,除了以系数 a_m 为乘数的积分外,都等于零。从而这系数就被确定为:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (11)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$.

同样,用 $\sin mx$ 乘展开式(5)后再逐项积分,即定出正弦的系数:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (12)$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$.

在这里除了要用(6)与(8)外,我们还应用了容易验证的关系式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m), \quad (13)$$

与

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi. \quad (14)$$

公式(7), (11)与(12)称为欧勒-傅立叶公式,用这些公式算出的系数称为已給函数的傅立叶系数,用这些系数作成的三角級数(5)称为已給函数的傅立叶級数。在本章中我們专门研究傅立叶級数。

现在来看以上的討論在邏輯上有什么价值。我們的出发点是假設三角展开式(5)成立,但是这个假設究竟真实与否这一問題自然沒有解决。即令假定展开式(5)为真,我們依欧勒与傅立叶的方法算出了展开式(5)的系数,然而像这样做的理由是否令人信服呢?我們一再应用过級数的逐項积分法,但是这种运算并不是什么时候都能进行的[406]。級数的一致收敛性是可以应用这种运算的充分条件。因此現在只有下列定理能够算作已經严格地证明了:

如果周期是 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开成一致收敛的三角級数(5)*, 則这級数一定是 $f(x)$ 的傅立叶級数。

如果不預先假設一致收敛性,以上的討論甚至不能证明函数能展开成傅立叶級数[参考下面 733, 734]。那么以上的討論究竟有怎样的意义呢?我們只能将它看成一种导入法,由此足以使得在求已給函数的三角展开式时,至少可以从它的傅立叶級数出发,而必須(完全严格地!)确定在那些条件下級数收敛并且收敛于已給函数。

在沒有这样做以前,我們只能够在形式上考虑已給函数 $f(x)$ 的傅

* 注意,用有界函数 $\cos mx$, $\sin mx$ 乘級数各項时并不改变級数的一致收敛性[402]。在这里,一致收敛性也可换成級数各部分和的有界性[488]。

立叶级数，除了知道它是由函数 $f(x)$ “所产生”外，不能再下任何结论。通常用下列符号来表示这级数与函数 f 的关系：

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5a)$$

而避免采用等号。

653. 正交函数系 上节中所讲的是一种讨论的范例，这样的讨论在数学分析中研究许多展开式时常常要应用到。

如果在区间 $[a, b]$ 上所定义的两函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的乘积，其积分为零：

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0,$$

则此两函数称为在这区间上正交。考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 。设系中各函数与它们的平方在 $[a, b]$ 上皆可积分，则它们的两两乘积在同一区间上也可积分 [447, 6]。如果系中各函数两两正交：

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad (15)$$

$(n, m = 0, 1, 2, \dots, n \neq m)$

则此系称为正交函数系。同时我们还永远假定

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0, \quad (16)$$

因而在正交系中不包含恒等于零的函数，也不包含其他任何平方的积分等于零的函数（在某种意义上与恒等于零的函数相似*）。

当条件 $\lambda_n = 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$ 成立时，这函数系称为规格的。如果

* 参考下面 703。

这些条件不成立，则当需要时可换取函数系 $\left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ ，这一函数系显然就是规格的。现举几个例如下：

1) 上面考虑过的在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (17)$$

正是直交函数系的重要例子；其正交性可以由关系式(6)，(8)，(9)与(13)看出。然而由(10)与(14)，可知它不是规格的。将(17)中各三角函数乘以适当乘数，不难获得规格系：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (17^*)$$

2) 注意函数系(17)或(17*)在缩小了的区间 $[0, \pi]$ 上不再是正交的。因为如果 n 与 m 一为奇数一为偶数，则

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \neq 0.$$

相反地，每一仅由余弦

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (18)$$

或仅由正弦

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (19)$$

所组成的部分系在这区间上分别成为正交系。这点不难验证。

3) 下列两函数系与刚才考虑过的函数系没有本质上的区别。

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (18^*)$$

与

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots, \quad (19^*)$$

其中每一个都是在区间 $[0, l]$ 上的正交系。

4) 为了要给出由三角函数构成的更复杂的正交系的例子，考虑超越方程

$$\operatorname{tg} \xi = c\xi \quad (c = \text{常数}). \quad (20)$$

可以证明这方程的正根成一无穷集合:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

在图解上,各根是正切曲线 $\eta = \text{tg } \xi$ 与直线 $\eta = c\xi$ 相交之点的横坐标(图 122)。作函数系

$$\sin \frac{\xi_1}{l} x, \sin \frac{\xi_2}{l} x, \dots, \frac{\sin \xi_n x}{l} \dots \sin \frac{\xi_n}{l} x$$

容易算出(当 $\alpha \neq \beta$ 时)

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)l}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)l}{\alpha + \beta} \right\} = \\ &= \cos \alpha l \cos \beta l \frac{\beta \text{tg } \alpha l - \alpha \text{tg } \beta l}{\alpha^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

如果在这里令 $\alpha = \frac{\xi_n}{l}$, $\beta = \frac{\xi_m}{l}$ (当 $n \neq m$ 时), 则利用方程(20)可得

$$\int_0^l \sin \frac{\xi_n}{l} x \cdot \sin \frac{\xi_m}{l} x dx = 0 \quad (n \neq m).$$

由此证实了所述函数系在区间 $[0, l]$ 上的正交性。

如果

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

是方程

$$\text{ctg } \xi = c\xi \quad (c = \text{常数})$$

的正根序列, 则对于函数系

$$\begin{aligned} \cos \frac{\xi_1}{l} x, \cos \frac{\xi_2}{l} x, \dots, \\ \cos \frac{\xi'_n}{l} x, \dots, \end{aligned}$$

也可作出类似的结论。

但是这些函数系都不是规格的。

5) 勒戎德多项式

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

是在区间 $[-1, 1]$ 上的正交系的重要例子[参考第 111 及 308 款]。因为

$$\int_{-1}^1 X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

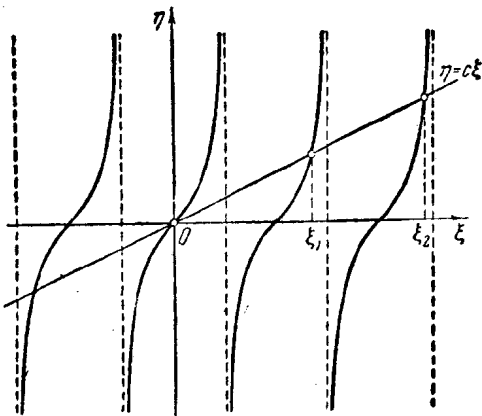


图 122.

所以要得到规格系, 必须分别用 $\sqrt{n + \frac{1}{2}}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 乘这些多项式。

? 6) 最后, 再考虑一个与贝塞尔函数有关的例子。为了写起来简单起见, 我们只限于考虑函数 $J_0(x)$, 但以下所讨论的一切对于函数 $J_n(x)$ ($n > 0$) 也都成立。

在贝塞尔函数的理论中, 证明了 $J_0(x)$ 的正根成一无穷集:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

将函数 $J_0(x)$ 所满足的方程改写为

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dz}{dx} \right] = -xz,$$

则容易得到: 不论 α 与 β 是什么数,

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_0(\alpha x)}{dx} \right] = -\alpha^2 x J_0(\alpha x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_0(\beta x)}{dx} \right] = -\beta^2 x J_0(\beta x).$$

用 $J_0(\beta x)$ 乘第一个等式, 用 $J_0(\alpha x)$ 乘第二个等式, 再将两端相减, 则得:

$$(\beta^2 - \alpha^2) x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) = \frac{d}{dx} [\alpha x J_0(\beta x) J_0'(\alpha x) - \beta x J_0(\alpha x) J_0'(\beta x)].$$

因此如果 $\alpha \neq \beta$, 则

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\alpha J_0(\beta) J_0'(\alpha) - \beta J_0(\alpha) J_0'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

如果在这里令 $\alpha = \xi_n, \beta = \xi_m$ ($n \neq m$), 则得关系式:

$$\int_0^1 x J_0(\xi_n x) J_0(\xi_m x) dx = 0,$$

这就证明了函数系 $\{\sqrt{x} J_0(\xi_n x)\}$ 在区间 $[0, 1]$ 上是正交的*。然而此系并不是规格的。

设在区间 $[a, b]$ 上已给任一正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 。我们试行将定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成“函数 φ 的级数”

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (22)$$

* 要推广函数 φ 与 ψ 正交性的概念, 我们引进加权 $p(x)$ 的正交性的概念, 用等式

$$\int_a^b p(x) \varphi(x) \psi(x) dx = 0$$

来说明这种正交性。如果采用这术语, 也能说函数系 $\{J_0(\xi_n x)\}$ 是加权 x 正交的。

为了要确定这展开式中的系数，先設函数可能展开，然后进行与上述特例中相同的手續。这就是說，先用 $\varphi_m(x)$ 乘展开式的两端，再逐項积分：

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

由于正交性[参考(15)与(16)]，右端各积分除去一个以外都是零，因此容易得到：

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \quad (23)$$

$(m=0, 1, 2, \dots).$

[公式(7), (11), (12)是这公式的特殊情形。]

用公式(23)所确定之系数作出級数(22)，它称为已給函数对于函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的(广义)傅立叶級数，而各系数本身則称为(广义)傅立叶系数。在規格系的情形下，公式(23)特別簡單；这时

$$c_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \quad (23^*)$$

$(m=0, 1, 2, \dots).$

在这里当然也可重复在上款末尾所作的那些說明。由已給函数所作出的广义傅立叶級数仅仅是在形式上与这函数发生連系。在一般情形下，函数 $f(x)$ 与它的(广义)傅立叶級数之間的关系表示如下：

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} c_n \varphi_n(x). \quad (22^*)$$

与三角級数的情形一样，这級数是否收敛于函数 $f(x)$ ，还須加以研究。

654. 三角插值法 从三角插值法出发，也可自然地接触到用三角

級数表示已給函数 $f(x)$ 的問題。所謂三角插值法就是用三角多項式

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (24)$$

作为函数 $f(x)$ 的近似式, 使三角多項式与函数在許多点上有相同的值。

总能选取 n 阶三角多項式(24)的 $2n+1$ 个系数: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$, 使得在区間 $(-\pi, \pi)$ 內預先指定的 $2n+1$ 个点处, 例如在

$$\xi_i = i\lambda \quad (i = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n)$$

各点处(其中 $\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}$), 三角多項式的值与函数 $f(x)$ 的值相等。实

实际上, 为了要确定这 $2n+1$ 个系数, 我們有个数相同的綫性方程:

$$\alpha_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ (i=-n, -n+1, \dots, n)}}^n (\alpha_k \cos k\xi_i + \beta_k \sin k\xi_i) = f(\xi_i) \quad (25)$$

要解这些方程, 应当回忆到一个初等三角恒等式:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos ih = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)h^*}{2 \sin \frac{1}{2}h} \quad (26)$$

将(25)中各等式两端分別相加。由于正弦是奇函数, 所以 β_k 的系数

$$\sum_{i=-n}^n \sin k\xi_i = 0.$$

α_k 的系数也是这样, 这是因为余弦是偶函数, 所以如果在恒等式(26)

* 如果用 $2\sin \frac{1}{2}h$ 乘此式左端, 并且将每一乘积 $2\sin \frac{1}{2}h \cos ih$ 换成差式

$\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)h - \sin\left(i - \frac{1}{2}\right)h$, 就不难求得这恒等式。[参考 295 (2).]

中, 令 $h = k\lambda = \frac{2k\pi}{2n+1}$ 时, 应有

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos ik\lambda = 0. \quad (27)$$

由此得

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i). \quad (28)$$

为了要确定 $\alpha_m (1 \leq m \leq n)$, 分别用 $\cos m\xi_i$ 乘(25)中各等式, 然后将它们的两端分别相加。则由(27), α_0 的系数是零; 因为正弦是奇函数, 所以 β_k 的系数显然也等于零。至于 α_k 的系数则可表为:

$$\sum_{i=-n}^n \cos k\xi_i \cos m\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k+m)\xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^n \cos(k-m)\xi_i;$$

当 $k \neq m$ 时, 由(27), 上式右端的两个和式都为零; 当 $k = m$ 时, 第一个和式为零而第二个和式的值显然是 $\frac{2n+1}{2}$ 。这样, 只有 α_m 的系数不等于零, 而等于 $\frac{2n+1}{2}$ 。现在已不难求得

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \cos m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (29)$$

完全与以上相仿, 用 $\sin m\xi_i$ 乘(25)中各等式并且相加, 求得

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^n f(\xi_i) \sin m\xi_i \quad (1 \leq m \leq n). \quad (30)$$

讀者一定已經注意到这里所用方法与欧勒-傅立叶确定三角级数系数法相似。但是在这里我們的計算是无可非議的, 因为不难验证所求得未知数的值确乎适合方程(25)。并且, 由简单的代数推理, 此点可不待验证而自明。我們看到方程系(25)只可能有(如果一般說来有解)