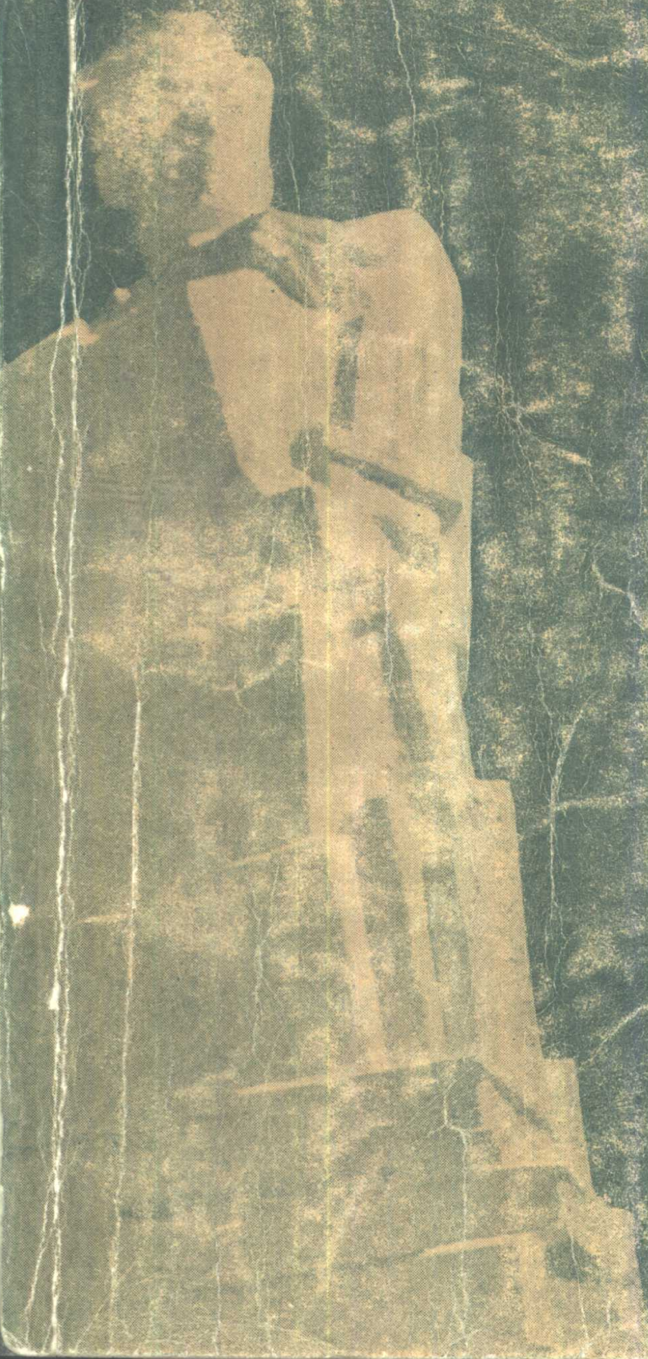

大学基础数学自学丛书

一元函数微分学

赵慈庚

大学基础数学自学丛书

一元函数微分学

赵慈庚

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

一元函数微分学

赵慈庚

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷三厂印刷

开本787×1092 1/32　印张13.375　字数296,000

1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷

印数 1—45,000

书号：13119·832　　定价（科四）　1.25元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期新长征的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学和北京师范大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

自学没有教师指导，显然要比听讲困难得多，所以自读教材必须把教师在课堂上说的有关语言写进去，才可以收到较好的效果．本书第一章写得篇幅较长，就是基于这一原因．

学习数学的一切概念与各种运算，不仅要明白，而且要熟练．为此，本书提供的例题比一般课本要多，说理也不怕反复．

仅理解概念的正面，只能说是片面的理解，而不是全面理解．正反两面都理解了，才算"到家"．因此，本书选择有代表性的一两个定义与定理，作了一些反面的推敲，目的在于启发读者一点思考问题的方法，其实也是读书方法．第一、第二两章在这方面注意得略多．

编者主观上是按上述想法做的，至于做到了几分？自己没有把握．由于编写工作仓猝，没有来得及仔细斟酌．错误之处恐怕不少，请读者不吝指正．

编写中，蒋铎同志给我提出许多有益的意见，薛宗慈同志选择练习题，谭寿芬同学校对底稿，都付出了很大的力量．最后北京大学方企勤同志给我指出很多缺点，借此一并致谢．

赵慈庚识
于北京师范大学数学系
1979 年 4 月

目　　录

第一章　函　　数

第二章　数列的极限

第三章 函数的极限与连续

第四章 导数及微分

第五章 中值定理

第六章 导数的应用

习题答案

引　言

科学是实践的产物，因需要而发展．数学的发生与发展主要也是这样．从我国的《九章算术》来看，《方田》是测量土地的经验；《粟米》是从粮食交易中总结出来的．为了计算运输的劳力和费用，才有《均输》；由于考核工程的土方，而有《商功》．这都是由于需要而产生的算法．古代生产水平低，所需要的数学简单；近代生产发达，科学技术进步，数学和其他科学一样，也日趋复杂．回顾以往的数学，大体上可以说，十七世纪以前，停留在常量的数学．自从法国人笛卡儿提出坐标以后，才逐渐研究变化的现象，可以说是运动的数学．中学里的代数和几何，都属于常量的数学．比如几何里讲全等三角形时，三角形是固定的，不能在同一个问题的讨论中，先后形状不同．代数里解方程时，尽管方程改变，而我们所追求的目标，即方程的根，却是不变的．这就是常量的数学，也就是初等数学的特点．

常量的数学，只能处理静止的问题．社会实践发展到一定阶段，常量的数学就不够用了，于是运动的数学应运而生，微积分就是处理运动现象的重要数学学科．它是十七世纪末期英国人牛顿与德国人莱布尼兹同时独立发现的．微积分是微分法与积分法的简称．在整个数学体系中，微分法与积分法是互相对立的两种计算方法，犹如加法与减法，乘法与除法，是一对矛盾的两个对立面，而微积分便是它们的统一体．这两个对立面又有共同之点，这就是：两者在用数来处理现实世界

的运动现象时，都是将讨论的对象分成极其细微的小部分，这种极微小的部分，叫做无穷小量. 因此微积分又叫做无穷小分析，或数学分析.

牛顿探讨过曲线 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 之下 $(a>0)$，x 轴之上与直线 $x=x_1$ 之间的面积. 现在用这问题的一个特例，说明一下微积分算法的大意. 这里必须再提醒一下：微积分是运动的数学，它在变化之中处理数量之间的关系，在变化之下解决实际问题. 假设位于曲线 $y=x^2$（图 0-1）之下，x 轴之上，$x=x_1$ $(x_1>0)$ 之左的平面区域是 D. 直观上很容易承认 D 有面积，把这面积记作 A. 从运动的观点来看，可以认为 D 是由移动的纵坐标 AP 当它的横坐标 x 由 O 变到 x_1 时生成的. 在这看法之下，有一种矛盾关系：直线没有宽度，不占有面积，但是由于它移动却能生成面积，这面积是由动直线 $x=x'$ 的无穷多位置拼成的. 如果每条直线绝对地没有面积，便无论如何也不能拼成面积. 只要承认运动的直线是面积的元素，就必需赋予它极其微小的宽度. 在现在的问题中，带有微小宽度的纵坐标即是面积的元素，在微分学里称为面积的微分，求微分的算法便是微分法.

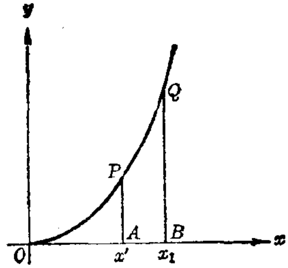

图 0-1

如何求 A 的微分？这需要从 A 说起. 打算求 A 在 $x=x'$ 时的微分，要先求 $x=x'$ 与 $x=x'+h$ 之间的面积或者它的近似值

$$H=\frac{1}{2}[x'^2+(x'+h)^2]h=x'^2h+\left(x'h^2+\frac{1}{2}h^3\right). \quad (0.1)$$

A 的微分是极其微小的面积，所以应该是 h 趋于零时 H 的数值。h 趋于零绝不是 h 等于零，h 逐渐变小时，H 也随着变化，(0.1)式右端最后圆括弧里的数，相对地说尤其小。略去这个括弧里的数，用剩下的 x'^2h（这是个变动着的数）作为 $x=x'$ 时的面积元素，并且说

A 在 $x=x'$ 处的微分是 x'^2h。

这里趋于零的 h 象征着面积元素的宽度，x'^2 是它的高。

如何按积分求 A？通过 x 轴上 O 与 x_1 之间的一串点画纵坐标，从而把 D 分成许多长条，为简单起见，不妨认为这些长条一样宽。把这些长条的面积近似地算出来。然后令小长条的个数无限增多，使每个小条变成前边所说的微分，求它们的和 S。如果 S 趋于一个确定的数值，这数值应该就是 A。

牛顿还证明了曲线 $y=ax^{\frac{m}{n}}$ 的纵坐标的大小，就是对应的面积（在这纵坐标处）增加的速度。用上述的特例来说，即是纵坐标由 O 移动到 $x=x'$ 时面积（这时是 OAP 的面积）增加的速度等于纵坐标 AP 的数值 x'^2。如果把(0.1)式的两端都除以 h，那么

$$\frac{H}{h}=x'^2+\left(x'+\frac{1}{2}h\right)h$$

便是面积在 $x=x'$ 与 $x=x'+h$ 之间增加的平均速度（譬如认为 x 是时间）。现在让 h 无限地变小，这平均速度就几乎等于 x'^2。

再如以自由落体运动来说，假设 t 是降落的时间，s 是降落的距离，g 是重力加速度。从伽利略运动方程

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

求很短很短一点点时间内物体下降的距离，或者求某个时刻

的速度，就是微分法．技术上和前面求面积的微分或增加的速度一样．从每个时刻的速度

$$v=gt$$

求一段时间之内降落的距离，就是积分法．这需要把一点点一点点时间之内降落的距离加起来．这里所谓"一点点时间"并不是十分之一秒或百分之一秒，……，而是比任何能够指得出来的短暂时间都要短的时间．所以两种算法都要把给定的一段时间，分了又分，直至无穷多次才能达到目的．可见纯微积分的计算，从理论上说，都是无穷多道手续合成的．这是微积分与初等数学根本不同的地方．

实现无穷多道手续的运算，要借助于极限理论；一次极限运算便是无穷多次代数运算组成的．这是解决微积分问题的必由之路，所以微积分学充满着极限运算，极限理论是微积分的支柱．

微积分在生产实践中有哪些用途呢？方才说微分法可以确定运动物体的速度．且不必说其他方面，仅仅速度的用处就说不完．火车上坡下坡，出站入站，过桥转弯，都要根据不同情况调剂速度，不然就可能发生事故．煅工气锤冲击力量的大小与气锤触及炽铁时的速度有关，同一气锤速度大时冲力就大．要想减弱冲力就要使锤的速度放慢．要想使人造卫星按计划进入预定的轨道，更需要知道它的速度如何变化，以便时时刻刻控制它的运动．总之，微积分对于近代科学以及工程技术的发展，起着不可估量的作用，说它是划时代的科学，毫不过分．现在几乎是一大半高等数学的基础，是一切工程技术学科不可缺少的工具．有了微积分这把钥匙，就可能进而打开物理、力学、电学、电讯等科学的大门；也可以走向函数论、微分方程、概率论和数理统计等数学分支，从而为科学

研究及生产实践服务.

微积分主要是讨论变化现象的，变化现象无时不与动因对应. 而动因或者只有一种，或者不只一种，前者用一元函数表示，后者用多元函数表示. 于是微积分又分为一元函数与多元函数两大部分. 合起来是一个大的整体. 为了自学的方便，我们在编写中把它分成三册，即«一元函数微分学»，«一元函数积分学»和«多元函数微积分».

第一章

函　数

微积分要处理现实中的运动现象，就需要有方法用数把所要讨论的现象表示出来．表示变化现象的数学工具就是函数．既然要使用数，就需要了解数的性质．这一章从实数说起，然后用它来讲函数的一般概念和经常使用的初等函数．

第一节　实　数

1.1　实数系

事物的变化有突变、有渐变．渐变的情况，多半是连续变化的：一棵植物从发芽到成株，它的高度是连续变化的；阳光下的竿影，由长而短，或由短而长，在一段时间内的伸长或缩短，也是连续变化的．如果我们希望知道这些长度，自然要用尺子去量，但是尺子的刻度较之变化中的长度过于稀疏．假如我们把寒暑表的刻度当作尺子，略微加一点温度使水银柱上升，顷刻之间就有无限多个水银柱的长度产生，但不能由它旁边的刻度(尺)读出来．所以用刻度尺去量连续变化的长度是很不够的．测量长度用尺子；表示大小、多少、轻重…用数．刻度尺不能表达变化中的一切长度，那么数就能表示变化中的量吗？微积分要研究变化中的量，就不能不注意数这个问题——要能够应付一切变化中的量．

我们认为实数系是已经知道的结构．虽然实数是量的通性，是从各种量抽象出来的，然而人类对于实数的认识并不是

一次完成的．而是先认识自然数，然后认识分数，再推广到负数，便完成了有理数系．单用整数表示一切量，显然不够．有理数有一个重要性质，即是任何两个有理数 p 与 q 之间，一定还有有理数，$\frac{1}{2}(p+q)$ 就是其中的一个．照这样说，有理数已经稠密，数学里说这是处处稠密，然而有理数还是不够用．请看下面的事实．

用单位长作边画一个正方形．这个正方形的边是线段，对角线也是线段，也应有它的长度 d．根据勾股定理，$d^2=2$．现在用反证法，证明没有一个有理数能表示 d．假若不然，如果 p 与 q 是没有公因数的正整数，而 p/q 等于 d，便应该

$$\frac{p^2}{q^2}=2 \quad 或 \quad p^2=2q^2.$$

右端有因数 2，那么 2 一定能整除 p．设 $p=2r$，代入上边的等式，得

$$4r^2=2q^2.$$

所以

$$2r^2=q^2.$$

左端有因数 2，2 应该能整除右端，那么 2 又应该是 q 的因数．这就发生矛盾了——原先假设 p 与 q 没有公因数．这矛盾说明没有有理数可以表示单位正方形的对角线之长．这例子说明只用有理数不能表示现实世界中的一切量的大小．

为了适应象单位正方形对角线之长的一类量的需要，在有理数以外添一个数，用 $\sqrt{2}$ 表示它．这就是一个无理数．应该知道，为了适应需要而添置的无理数很多很多．$\sqrt{2}$ 仅是其中的一个．例如 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$，π，$\sin 1$，…都是无理数．略一推想就能知道无理数比有理数多得多，比如每个有理数加 $\sqrt{2}$，每个有理数乘 $\sqrt{2}$ 都是无理数．怎见得呢？