

目 录

绪言.....	(1)
第一章 Fourier 级数和 Fourier 变换	(5)
§ 1.1 广义 Fourier 级数	(5)
§ 1.2 Fourier 级数.....	(12)
§ 1.3 Fourier 积分.....	(24)
§ 1.4 δ 函数及其 Fourier 变换.....	(31)
§ 1.5 函数的频谱	(41)
§ 1.6 常用函数的 Fourier 变换	(58)
§ 1.7 Fourier 变换的性质.....	(67)
§ 1.8 卷积	(83)
§ 1.9 相关函数和 Fourier 变换的应用	(99)
习题	(113)
第二章 Laplace 变换	(123)
§ 2.1 Laplace 变换	(123)
§ 2.2 常用函数的 Laplace 变换	(128)
§ 2.3 Laplace 变换的性质	(131)
§ 2.4 Laplace 逆变换	(140)
§ 2.5 卷积	(143)
§ 2.6 Laplace 变换的应用	(146)
习题	(149)
第三章 Z 变换	(154)
§ 3.1 序列、差分 and 差分方程	(154)
§ 3.2 Z 变换.....	(157)
§ 3.3 常用序列的 Z 变换	(160)

§ 3.4 Z变换的性质	(162)
§ 3.5 卷积	(169)
§ 3.6 Z逆变换	(171)
§ 3.7 Z变换的应用	(175)
习题	(176)
习题答案	(180)
主要参考文献	(192)

绪 言

随着科学技术的发展,要求工程技术人员必须掌握“工程测试与信号处理技术”和“工程控制理论”的基本知识,而“积分变换”是信号分析与处理和经典控制理论的重要数学基础之一。

“积分变换”是应用数学的一个分支.它的理论和方法,不仅在数学的许多分支中,而且还在其它自然科学和各种工程技术领域中得到广泛的应用.它已成功地应用于控制理论、信号分析与处理、海洋学、力学等一些重要学科领域中。

积分变换是数学变换的一种.在数学中,为了把复杂的运算转化为较简单的运算,常常采用数学变换的手段.例如代数中的对数变换,能把数的积或商通过对数变换为对数的和或差,然后再取反对数,即得原来数的积或商.这一方法的目的,就是把较复杂的乘除运算转化为较简单的加减运算.又如解析几何的坐标变换、复变函数的保角变换、分析学中的变量代换、函数变换、数列变换等都能达到简化运算的目的。

数学变换的另一目的,是用来揭示变量之间的关系或函数的某一方面的特性。

例如方程 $x^2 + xy + y^2 = 4$, 变量 x 和 y 之间的关系在方程中很难直接判断,而采用坐标旋转方程,令

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

代入原方程,并化简得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

可以看出,这是一个长轴为4,短轴为4/3的椭圆方程,变量 x 与 y 之间的关系明显易见了.在经典控制理论和信号处理中,广泛使用数学变换中积分变换来揭示变量之间的关系或函数的某一特性.

数学变换是一种数学运算,现举一简单的例子来说明数学变换求解问题的一般规律和步骤.

例 $y = 2 \cdot 15^{3.5}$.

解 若不使用任何计算工具,直接求解显然是很麻烦的,但采用对数变换进行计算,则可将求解大为简化,其步骤为:

- (1)对等式两边取对数变换(正变换),即 $\lg y = 3.5 \lg 2 \cdot 15$;
- (2)求变换后问题的解,即 $\lg y = 1.16354$;
- (3)两边取反对数(逆变换),得原问题的解,即

$$y = \lg^{-1} 1.16354 = 14.57$$

从此例可得出,应用数学变换的方法求问题解的一般步骤为:

- (1)对原问题取数学正变换;
- (2)求变换后问题的解;
- (3)对此解取数学逆变换得原问题的解.

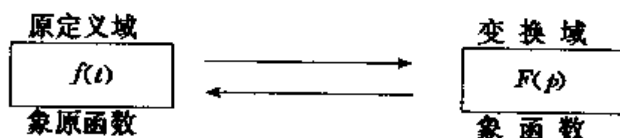
可见,采用数学变换来求解,不仅使问题求解得到简化,而且更有规律性,其求解过程可用简图表示为

原定义域中的问题 $\xrightarrow{\text{直接求解方法}}$ 原定义域中问题的解



变换域中的问题 \rightarrow 变换域中问题的解

若把正变换记为 T , 它对应的逆变换记为 T^{-1} , 则正变换与逆变换之间的关系可用简图表示为



用数学式子表示为

$$\left. \begin{aligned} T[f(t)] &= F(p) && \text{正变换} \\ T^{-1}[F(p)] &= f(t) && \text{逆变换} \end{aligned} \right\} \text{变换对}$$

积分变换就是通过积分运算, 把一个函数变成另一个函数的变换. 对某一函数类 A 中的函数 $f(t)$, 记

$$F(p) = \int_a^b f(t)K(t, p)dt$$

由上式可以唯一确定另一函数类 B 中的函数 $F(p)$, 且

$$f(t) = \int_a^b F(p)H(p, t)dp$$

在一定的条件下, $f(t)$ 与 $F(p)$ 是一一对应的, 那么 $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的积分变换, $f(t)$ 称为 $F(p)$ 的积分逆变换. 这里 $K(t, p)$ 和 $H(p, t)$ 都是一个确定的二元函数, 而 $K(t, p)$ 称为积分变换的核, $H(p, t)$ 称为积分逆变换的核. 当选取不同的积分域和变换

核时,就得到不同类型的积分变换对,如

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases} \quad \text{Fourier 变换对}$$

$$\begin{cases} F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st} ds \end{cases} \quad \text{Laplace 变换对}$$

$$\begin{cases} F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\sin(\lambda t) dt \\ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\lambda)\sin(\lambda t) d\lambda \end{cases} \quad \text{Fourier 正弦变换对}$$

在此不一一举例了。

积分变换既然是数学变换的一种,那么应用积分变换求解问题的一般规律和步骤与应用其它数学变换时相同,如应用积分变换求解微积分方程,其一般步骤为:

(1)对方程两边取某积分正变换,使原函数微分方程变为象函数的代数方程;

(2)求象函数;

(3)对象函数取该变换的逆变换,得微分方程的解。

随着大规模集成电路、计算机的迅速发展,数字技术已渗透到科学技术的各个领域。目前,系统和信号的研究重点普遍注意转向离散的、数字的方面,以适应计算机应用的需要。因此,本书除介绍连续函数和系统常用的 Fourier 变换与 Laplace 变换之外,还介绍了离散函数(采样数据)和离散系统用的 Z 变换,并着重讨论了它们的定义、性质和简单介绍了它们在某些方面的应用。

第一章 Fourier 级数和 Fourier 变换

最常用的函数表示方法是把任意函数作为有限个或无限个典型函数的线性迭加. 本章将用函数与矢量类比方法, 介绍函数空间的概念. 在这种空间中, 表示时间的函数可以看成是矢量, 从而就能利用矢量推理方法来说明函数分析的一般问题. 和矢量一样, 在满足某些条件下, 函数可分解成正交分量, 即用正交函数的组合来逼近任意函数. 在各种正交函数中, 正交的谐波函数集和复指数函数集, 对信号分析和线性系统分析有着极其重要意义. 这与本章将要介绍的 Fourier 级数和 Fourier 变换有着直接的关系. 本章在复习三角级数基础上, 加深对它们的认识和理解, 然后介绍 Fourier 变换. Fourier 级数用于表示周期函数, 而 Fourier 积分用于表示非周期函数, 它们之间有区别, 但也有着密切的联系.

§ 1.1 广义 Fourier 级数

一、矢量的正交分解

1. 矢量的最佳近似表示

已知两矢量 A 和 x_1 , 且 $A \neq x_1$, 现用 $c_1 x_1$ 来近似表示 A , 即

$$A \approx c_1 x_1$$

式中, c_1 是待定系数.

选择不同的系数 c_1 , 其误差 A 就不同, 如图 1.1-1 所示, 其

误差矢量为 A_e ,

$$A_e = A - c_1 x_1$$

最佳系数 c_1 , 应使误差 A_e 最小.

采用矢量模的平方准则, 即选择 c_1 , 使 $|A_e|^2$ 为最小.

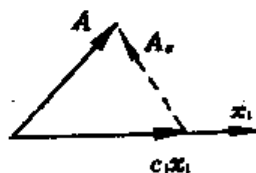


图 1.1-1

$$\begin{aligned} |A_e|^2 &= A_e \cdot A_e \\ &= (A - c_1 x_1) \cdot (A - c_1 x_1) \\ &= A \cdot A - 2c_1 A \cdot x_1 + c_1^2 x_1 \cdot x_1 \end{aligned}$$

令 $\frac{d|A_e|^2}{dc_1} = 0$, 则有

$$-2A \cdot x_1 + 2c_1 x_1 \cdot x_1 = 0$$

$$c_1 = \frac{A \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} \quad (1.1-1)$$

上式所得的 c_1 为最佳系数, 此时 A_e 的长度 $|A_e|$ 最小, 如图 1.1-2 所示. 由图可知, c_1 是矢量 A 的模 $|A|$ 在矢量 x_1 上的投影. 为提高近似表示的程度, 可设

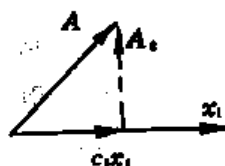


图 1.1-2

$$A \approx c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

其误差为

$$A_e = A - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n$$

同理, 可求得

$$c_j = \frac{A \cdot x_j}{x_j \cdot x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1-2)$$

导出上式条件是 $x_i \cdot x_j = 0 (i \neq j)$. 与 $A \approx c_1 x_1$ 中的最佳系数 c_1 的表达式的形式相同, 这是使用正交基底的优点.

2. 矢量的正交分解

由线性代数理论可知, 若选定 n 个相互正交的矢量 $x_1, x_2,$

\dots, x_n , 即

$$x_m \cdot x_r = \begin{cases} 0 & (m \neq r) \\ 1(\text{或 } K) & (m = r) \end{cases} \quad (1.1-3)$$

于是 n 维空间中任一矢量 A 可用 n 个正交分量精确表示, 即

$$A = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1.1-4)$$

则这 n 个正交矢量是矢量 A 完备的、规范的 ($x_m \cdot x_r = 1, m=r$) 基底。

用 x_j 与上式中各项作点积, 得

$$A \cdot x_j = c_1 x_1 \cdot x_j + c_2 x_2 \cdot x_j + \dots + c_j x_j \cdot x_j + \dots + c_n x_n \cdot x_j$$

于是,

$$c_j = \frac{A \cdot x_j}{x_j \cdot x_j} \quad (1.1-5)$$

c_j 是 A 在 x_j 上的坐标。

从以上分析充分说明, n 维空间中的任一矢量可写成其正交基底的线性组合。于是, 对此矢量的分析, 可转化为对该正交基底及矢量在该空间中坐标的分析。这可使问题简化并且有规律性。

那么, 对于函数是否也能作类似处理呢? 回答是肯定的。

二、实函数的正交分解

现讨论两个函数 $f(t)$ 和 $f_1(t)$, 若在区间 (t_1, t_2) , 以 $f_1(t)$ 近似表示 $f(t)$, 即

$$f(t) \approx c_1 f_1(t)$$

式中, c_1 是待定系数。

其误差函数

$$f_e(t) = f(t) - c_1 f_1(t)$$

最佳系数 c_1 应使误差函数 $f_e(t)$ 最小。

考虑 $f_e(t)$ 可能出现正值和负值, 采用均方误差准则, 即选择 c_1 , 使 $\|f_e(t)\|^2$ 为最小,

$$\|f_e(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt \quad (1.1-6)$$

令 $\frac{d}{dc_1} \|f_e(t)\|^2 = 0$, 则有

$$\frac{d}{dc_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - c_1 f_1(t)]^2 dt = 0$$

调换微分和积分顺序, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [-2f(t)f_1(t) + 2c_1 f_1^2(t)] dt = 0$$

得

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)f_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt} \quad (1.1-7)$$

c_1 为函数 $f(t)$ 与 $f_1(t)$ 的相关系数.

将上式与式(1.1-1)作比较, 不难发现两者十分相似. 若对函数定义如下:

(1) 内积 (f_1, f_2)

两函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的内积类似两矢量的点积, 其定义式为

$$(f_1, f_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t) dt \quad (1.1-8)$$

(2) 正交

用矢量点积定义两矢量正交, 用函数的内积定义两函数正交, 即

$$(f_1, f_2) = 0 \quad (1.1-9)$$

(3)“长度”

矢量 A 的长度 $|A| = \sqrt{A \cdot A}$. 与此类似, 定义函数的“长度”(严格地说, 称为函数的范数) $\|f(t)\|$ 为

$$\|f(t)\| = \sqrt{(f, f)} \quad (1.1-10)$$

则式(1.1-7)可简写成

$$c_1 = \frac{(f, f_1)}{(f_1, f_1)} \quad (1.1-11)$$

为提高近似表示的精度, 可设

$$f(t) \approx c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$$

其误差为

$$f_e(t) = f(t) - c_1 f_1(t) - c_2 f_2(t) - \dots - c_n f_n(t)$$

同理, 可得最佳系数为

$$c_j = \frac{(f, f_j)}{(f_j, f_j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1-12)$$

导出上式的条件是

$$(f_i, f_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

即 $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ 为两两正交的函数, 此时 c_j 的表达式与 $f(t) \approx c_1 f_1(t)$ 中最佳系数 c_1 相同, 这是正交函数作为基底的优点.

当正交函数集的函数个数 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} [f_e(t)]^2 dt = 0 \quad (1.1-13)$$

则此正交函数集称为完备的正交函数集. 于是, $f(t)$ 可用下式精确表示:

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots \quad (1.1-14)$$

式中,系数

$$c_j = \frac{(f, f_j)}{(f_j, f_j)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.1-15)$$

上面讨论了实函数的正交特性,而复变函数也有类似特性.

三、正交完备的复函数集

若 $f(t)$ 和 $f_1(t)$ 是实变量 t 的复变函数,在 (t_1, t_2) 区间同样可有

$$f(t) \approx c_1 f_1(t)$$

使用均方误差准则,可确定最佳系数

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \overline{f_1(t)} dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \overline{f_1(t)} dt} \quad (1.1-16)$$

式中, $\overline{f_1(t)}$ 是 $f_1(t)$ 的共轭复数.

对于复变函数,其内积、正交和“长度”定义如下:

(1) 内积 (f_1, f_2)

两函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的内积 (f_1, f_2) 定义为

$$(f_1, f_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt \quad (1.1-17)$$

式中, $\overline{f_2(t)}$ 为 $f_2(t)$ 的共轭复数.

(2) 正交

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 正交,则

$$(f_1, f_2) = 0 \quad (1.1-18)$$

(3) “长度”

复变函数 $f(t)$ 的“长度” $\|f(t)\|$ 仍然定义为

$$\|f(t)\| = \sqrt{(f, f)} \quad (1.1-19)$$

因此,式(1.1-16)中的 c_1 可简写成

$$c_1 = \frac{(f, f_1)}{(f_1, f_1)} \quad (1.1-20)$$

若在 (t_1, t_2) 区间,复变函数 $f_1(t), f_2(t), \dots$, 满足

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1(\text{或 } K) & (i = j) \end{cases} \quad (1.1-21)$$

则此复变函数集为正交函数集. 这时,

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$$

其误差函数

$$f_e(t) = f(t) - c_1 f_1(t) - c_2 f_2(t) - \dots - c_n f_n(t)$$

若此正交函数集是完备的,即当正交函数集个数 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} [f_e(t)]^2 dt = 0$$

则任一复变函数 $f(t)$ 可写成

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots \quad (1.1-22)$$

式中,系数

$$c_j = \frac{(f, f_j)}{(f_j, f_j)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.1-23)$$

可见,一个函数可表示为完备的正交函数集的各个函数的线性组合. 这种表示函数的方法,称为函数的广义 Fourier 级数展开. 因此,只要找到一个完备的正交函数集,那么,就有一种表示方法. 如三角函数集、复指数函数集,它们是以正弦波的线性组合表示函数的. 此外,还有 Rademacher 函数集、Haar 函数集和 Walsh 函数集,它们是以矩形波或方波线性组合表示函数的;一些多项式,如 Legendre 多项式、Jacobi 多项式等,也构成正交函数集.

§ 1.2 Fourier 级数

实际中,应用最广泛的正交函数集有三角函数集和复指数函数集.

在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 区间内,且 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 那么 $\{1, \cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$ 是周期为 T 的三角函数集 ($\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t$ 的周期为 $\frac{T}{n}$, $\frac{T}{n}$ 的 n 倍为 T , 即 T 也还是其周期).

设 m 和 n 是正整数, 则有

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 m\omega_0 t dt = T/2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 m\omega_0 t dt = T/2$$

三角函数集是完备的正交函数集.

一、Fourier 级数定理

由式(1.1-14)可将周期函数 $f_T(t)$ 展成三角函数集的线性组合,这就是常用的 Fourier 级数的三角形式.

设以 T 为周期的函数 $f_T(t)$,如果在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内满足 Dirichlet 条件,则

(1)连续或只有有限个第一类间断点;

(2)只有有限个极值点,那么,在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内就可以展成 Fourier 级数,在 $f_T(t)$ 的连续点处,

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.2-1)$$

其中,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

式中, a_0, a_n, b_n 称为 Fourier 系数,它们可由式(1.1-15)推出.

注意,在间断点和区间端点时, Fourier 级数不收敛于 $f_T(t)$,而是

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= \begin{cases} \frac{f_T(t+0) + f_T(t-0)}{2} & (t \text{ 为间断点}) \\ \frac{f_T(-T/2+0) + f_T(T/2-0)}{2} & \left(t = -\frac{T}{2} \text{ 或 } t = \frac{T}{2} \right) \end{cases} \quad (1.2-2)$$

若把周期函数 $f_T(t)$ 的第 n 次谐波 $n\omega_0$ 写成

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= A_n \cos \varphi_n \cos n\omega_0 t - A_n \sin \varphi_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

对比等式两边系数,得

$$A_n \cos \varphi_n = a_n, \quad -A_n \sin \varphi_n = b_n$$

从上面方程组中解得

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (1.2-3)$$

因此,式(1.2-1)可以写成

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (1.2-4)$$

由此可知,满足 Dirichlet 条件的周期函数,都可以分解为一个常数和无限多个不同频率的谐波分量,并且这些谐波分量的频率是基频 $2\pi/T$ 的整数倍.各频率的谐波分量的幅值 A_n 与初相位 φ_n 由式(1.2-3)给出,它们是以 n 为变量的函数.

二、常用周期函数的 Fourier 级数

最简单而又用得最多的周期函数除谐波函数外,还有方波、三角波、锯齿波等,这些周期函数都可以展成 Fourier 级数.

1. 方波函数

图 1.2-1 所示的方波在一个周期 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 内的表达式为