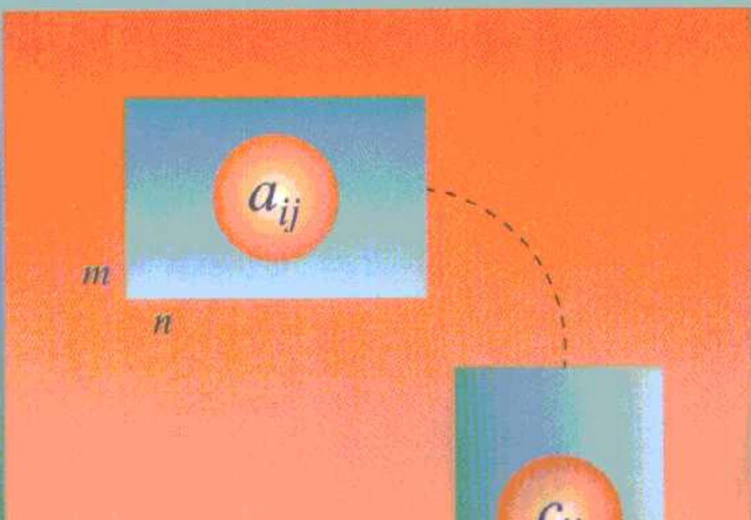
财经与管理等专业
教学与自学参考书

线性代数
学习与考试指导

赵树嫄　胡显佑　陆启良　编



中国人民大学出版社

财经与管理等专业教学与自学参考书

线性代数

学习与考试指导

赵树嫄　胡显佑　陆启良　编

中国人民大学出版社

前　言

《经济应用数学基础》是财经、管理等专业的必修课，但该课程中某些内容，对有些读者，特别是自学的读者，有一定的难度. 例如，对有些概念理解不透，运算技巧掌握不好等. 因此不少读者要求出版社出版学习该课程的参考书，我们就是应读者的这种要求，编写了本书. 它可以给讲授该课程的教师提供“教学参考”，也可以给在校学生及参加自学考试的学员作为“学习与考试指南”，也可以为在职财经工作者自学进修或想投考财经类专业研究生的读者作为“学习辅导”，也适用于社会上助学辅导班作为考前复习的串讲教材.

本书以由中国人民大学出版社出版、赵树嫄主编的《经济应用数学基础(二)线性代数》为主要教科书，同时兼顾其他类似教材的内容，所以不论使用哪本教材，均可采用本书作为参考书.

书中各章均包括三部分内容：重要概念与定理的析疑与总结，例题选讲，练习题及解答.

在编写本书时，我们有以下一些考虑.

在“重要概念与定理的析疑与总结”中，强调“难点析疑”与“规律总结”，针对学生学习中的难点与疑点，进行分析、讲解，引导学生正确辨别、理解，使之对重要概念、方法以及疑难问题，理解得更深更透. 对规律性的内容加以总结，使读者掌握的知识更有条理性，更加巩固.

在“例题选讲”中，我们分门别类通过典型例题分析解答，然后加以“小结”，以使读者能举一反三，触类旁通，对运算技巧掌握得

更熟练，对基本概念理解得更准确.

各章练习题均分(A)，(B)两部分，(A)组包括计算题、应用题和证明题等，(B)组包括填空题和选择题(只有一个选项是正确的). 这些练习题都是精心编制的，读者通过做这些练习题，可以巩固加深对基本概念与原理的理解，及熟练掌握计算方法. 这些练习题具有“考试题”的特点，读者通过做练习题，可以检查自己对所学内容掌握的程度.

打“*”号的内容，时间不富裕的读者可以略去.

本书共分五章，由赵树嫄担任主编，参加编写的有赵树嫄(执笔第一二章)、胡显佑(执笔第三四五章)，陆启良对全书进行了详尽的审阅，褚永增对全书进行了详尽的审阅、整理.

本书是根据编者的教学实践与经验编写的，希望能对学习《线性代数》的读者有所帮助. 不妥之处，恳请读者指正.

编　者

1998 年 12 月

第一章　行 列 式

行列式在线性代数中具有重要意义，它是研究线性方程组的有力工具.

学习本章要求理解 n 阶行列式的定义，了解并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法，掌握利用行列式解有关线性方程组的克莱姆法则.

一、重要概念与定理的析疑与总结

(一) n 阶行列式定义

1. 排列的奇偶性

由不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有数码 i_t 排在比它小的数码 i_s 前面 $(i_s<i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列的逆序总数称为该排列的逆序数. n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

求 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，即求该排列的各个数码前面比它大的数码个数的总和，可按下列方法求得.

观察排在 1 前面的数码个数，设为 k_1，划掉 1. 再观察排在 2 前面的数码个数，设为 k_2，划掉 2. ……如此下去，最后观察排在 n 前面的数码个数，设为 k_n，于是可得

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=k_1+k_2+\cdots+k_n$$

例如　求六级排列 431625 的逆序数.

$k_1=2$,因 1 前面有两个数码 4 与 3. 划去 1,余下 43625.

$k_2=3$,因 2 前面有三个数码 4,3,6. 划去 2,余下 4365.

$k_3=1$,因 3 前面有一个数码 4. 划去 3,余下 465.

$k_4=0$,因 4 前面没有数码. 划去 4,余下 65.

$k_5=1$,因 5 前面有一个数码 6. 划去 5,余下 6.

$k_6=0$,因 6 前面已没有数码.

因此　$N(4\ 3\ 1\ 6\ 2\ 5)=2+3+1+0+1+0=7$

逆序数为偶数或零的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

上面例中六级排列 431625 为奇排列.

2. n 阶行列式的定义

定义　n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项前的符号是:当这一项中元素的行标按自然顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取“正”号,是奇排列则取“负”号.

注意 1

(1)$j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 阶排列. 行列式表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍由 1,2,⋯,n 构成的 n 级排列所形成的全部 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和. 由于由 1,2,⋯,$n$ 构成的全部 n 级排列有 $n!$ 种,故行列式为 $n!$ 项的代数和.

(2)在 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$前面冠以的符号,由 $N(j_1j_2\cdots j_n)$决定,$j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列,该项前面冠以正号;$j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列,该项前面冠

以负号. n 阶行列式前面冠以正号与冠以负号的项,各占$\frac{n!}{2}$项.

例如,三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,它表示 $3!=6$ 个形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$的项的代数和. $j_1j_2\cdots j_3$ 为 1,2,3 的全部三级排列,其中

123,231,312 为偶排列

132,213,321 为奇排列

因此,$a_{11}a_{22}a_{33}$,$a_{12}a_{23}a_{31}$,$a_{13}a_{21}a_{32}$三项前面冠以正号;$a_{11}a_{23}a_{32}$,$a_{12}a_{21}a_{33}$,$a_{13}a_{22}a_{31}$三项前面冠以负号. 于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

请注意,这里所说的"冠以正号"或"冠以负号",是指形式上连接各项之间的符号,它不包括元素本身的符号.

例如,二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的项,$a_{11}a_{22}$前面冠以正号,$a_{12}a_{21}$前面冠以负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

但如果 $a_{11}=-1$,$a_{12}=4$,$a_{21}=-5$,$a_{22}=3$,那么

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \\ =-1\times 3-4\times(-5)=-3+20=17$$

计算的结果,冠以正号的项 $a_{11}a_{22}$为-3,冠以负号的项$-a_{12}a_{21}$为 20.

注意 2

(1)n 阶行列式共有 n^2 个元素,如果其非零元素的个数小于

n,则行列式的值必为零.

因行列式的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素乘积,如非零元素个数小于 n,那么每一项中至少有一个零元素,故行列式的值必为零.

(2)若行列式有某一行(列)的元素全为零,那么行列式的值必为零.

设第 i 行(列)的元素全为零,行列式的每一项中必有一元素取自第 i 行(列),因此各项皆为零,于是行列式的值为零.

3. 特殊行列式

(1)一阶行列式 $|a|=a$.

(2)上、下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注:“ * ”区元素为不全为 0 的数,“0”区元素皆为 0.

(3)对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这些特殊行列式的结果可作为公式使用.

（二）**行列式的性质**

性质 1　行列式转置，行列式的值不变.

性质 2　交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

例 1

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列)的各元素，等于以数 k 乘此行列式.

推论 1　如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面.

推论 2　如果行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式的值为零.

注意：若 $|a_{ij}|$ 为 n 阶行列式，当 $k\neq 1$ 时，

$$|ka_{ij}|\neq k|a_{ij}|,\ |ka_{ij}|=k^n|a_{ij}|$$

例 2　设行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = D$$

则有

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -D$$

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^4 D = D$$

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 2a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 2D$$

$$\begin{vmatrix} 10a_{11} & -5a_{12} & -5a_{13} & -5a_{14} \\ -6a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ -2a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -2a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-5) \times (-2) \times 3D = 30D$$

性质 4 如果行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和.这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.

注意,一般说来

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

因为 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

注意,性质 5 只能将某一行(列)k 倍加于另一行(列)上,不能将某一行(列)k 倍再加上另一行(列).

例 3 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,根据性质 5,判断下列结论哪些是正确的?

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}+2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix}=D$$

解 D_1 是将 D 的第一列乘 2 加到第二列所构成,因此 $D_1=D$.

D_2 是将 D 的第三列乘(-1)加到第二列所构成,因此 $D_2=D$.

D_3 是将 D 的第二列乘(-1),再加上第一列,因此,$D_3=-D$.

D_4 是将 D 的第三列乘 2,再加上第一列,因此 $D_4=2D$.

综上讨论，$D_1=D$ 与 $D_2=D$ 正确，$D_3=D$ 与 $D_4=D$ 不正确.

（三）行列式按行（列）展开

1．行列式按某一行（列）展开

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，余下的元素按原来顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式，在其前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}.

注意，a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 只与元素 a_{ij} 所在的位置有关，而与元素 a_{ij} 本身的大小无关.

定理 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积的和. 即

（1）按 D 的第 i 行展开，有公式

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

（2）按 D 的第 j 列展开，有公式

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

定理 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和等于零. 即

（1）D 中某一行所有元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的和，有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \qquad (i\neq s)$$

（2）D 中某一列所有元素与另一列对应元素的代数余子式乘积的和，有

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \qquad (j\neq t)$$

以上四式，简写如下：

行列式按行展开有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$$

行列式按列展开有

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D & j = t \\ 0 & j \neq t \end{cases}$$

*2. 行列式按某 k 行(列)展开

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任意取定 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按原来的顺序组成的 k 阶行列式称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 设这个 k 阶子式在行列式 D 中所在的行为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，所在的列为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列. 去掉这些行与这些列，余下的元素按原来的顺序，构成一个 $n-k$ 阶行列式，在其前面冠以符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$，称为该 k 阶子式的代数余子式.

定理 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任意选定 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n$)，由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积的和等于行列式 D.

(四)克莱姆法则

含有 n 个方程的 n 元线性方程的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{A}$$

式(A)的系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克莱姆法则 方程组(A)在系数行列式 $D\neq 0$ 时，有且仅有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

D_j 为将 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$对应地换为(A)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

克莱姆法则给出了在 $D\neq0$ 的条件下,方程组(A)解的存在性与唯一性,并且给出了求方程组(A)的一个用行列式表示的公式,这个公式既规范化又简单、明显,且易于记忆.

但应用克莱姆法则求方程组的解,要注意克莱姆法则的前提条件,即克莱姆法则只适用于系数行列式不等于零的 n 个方程的 n 元线性方程组,它不适用于系数行列式等于零或方程个数与未知数个数不等的线性方程组.

如果(A)中 $b_j=0\quad(j=1,2,\cdots,n)$,则有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{B}$$

齐次线性方程组(B),不论系数行列式 D 如何,等于零或不等于零,方程组总有零解. 当系数行列式 $D\neq0$,由克莱姆法则可知(B)仅有零解,其逆否命题说明:若(B)除零解外,还有非零解,则系数行列式 $D=0$.

二、例 题 选 讲

(一)行列式的定义与性质

例 1 求由数码 $1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,2n$ 构成的一个排列 $2n,1,2n-1,2,\cdots,n+1,n$ 的逆序数.

解 1 前面有一个数码 $2n$,所以 $k_1=1$,划去 1.

2 前面有 2 个数码 $2n,2n-1$,所以 $k_2=2$,划去 2.

……

n 前面有 n 个数码 $2n, 2n-1, \cdots, 2n-(n-1)$，所以 $k_n=n$，划去 n.

$n+1$ 前面有 $n-1$ 个数码 $2n, 2n-1, \cdots, 2n-(n-2)$，所以 $k_{n+1}=n-1$，划去 $n+1$.

$n+2$ 前面有 $n-2$ 个数码 $2n, 2n-1, \cdots, 2n-(n-3)$，所以 $k_{n+2}=n-2$，划去 $n+2$.

……

$2n$ 前面有 $n-n=0$ 个数码，所以 $k_{2n}=0$，因此

$$
\begin{aligned}
& N(2n, 1, 2n-1, 2, \cdots, n+1, n) \\
= & 1+2+\cdots+n+n-1+n-2+\cdots+n-n \\
= & 1+2+\cdots+n-n \cdot n-(1+2+\cdots+n) \\
= & n^2
\end{aligned}
$$

例 2 确定下列 16 个元素皆不相同的四阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & -6 & 8 & 0 \\
3 & 5 & -1 & 6 \\
4 & -2 & -3 & -4 \\
-5 & 7 & -7 & 2
\end{vmatrix}
$$

中 $8 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot 6$ 一项前面应冠以什么符号？

解 用 (i,j) 表示行列式中第 i 行第 j 列元素所在的位置.

解法 1 不改变给定项中元素的先后顺序 $8 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot 6$ 取自 $(1,3),(4,1),(3,2),(2,4)$ 其行标排列为 1432，列标排列为 3124，则

$$N(1432)=3, N(3124)=2$$

$$(-1)^{N(1432)+N(3124)}=(-1)^5=-1$$

所以该项前面应冠以负号.

解法 2 改变给定项中元素的先后顺序，使其行标按自然顺序排列.

将 $8 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot 6$ 改变为 $8 \cdot 6 \cdot (-2) \cdot (-5)$，显然

其值不变，$8\cdot 6\cdot(-2)\cdot(-5)$取自(1,3),(2,4),(3,2),(4,1).行标排列为1234,列标排列为3421.

$$N(3421)=5,(-1)^{N(3421)}=(-1)^5=-1$$

所以该项前应冠以负号.

例3 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$$

证 行列式的每一项都是取自不同行不同列的5个元素的乘积，这5个元素中只要有一个为零，该项即为零. 第一列中只有a_{11},a_{21}不为零，若取元素a_{11}时，该项内不能再取第一行和第一列的其他元素，因此第二列只能取a_{22}，不能再取第二行和第二列的其他元素，那么第三列的元素只能取零，于是该项为零. 同理若第一列取a_{21}，第二列只能取a_{12}，第三列也只能取零，故此项亦为零. 其他项更是至少有一个元素为零，因第一列取的是零. 所以有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$$

例4 利用行列式定义，计算4阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 给定的 4 阶行列式表示$4!=24$项的代数和，在这些项中，除了 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$外，其余项中至少含有一个零元素，因而那些项均为零. 而上列四项中，行标已按自然顺序排列，其中 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$及 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$的列标排列的逆序数分别为 $N(1234)=0$ 及 $N(4321)=6$，均为偶排列，因此这两项前面应冠以正号. 而 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$及 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$的列标排列的逆序数分别为 $N(1324)=1$ 及 $N(4231)=5$，均为奇排列，因此这两项前面应冠以负号. 于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$

小结

用行列式定义求行列式的值，应考虑下列几点.

(1)n 阶行列式展开式中共有 $n!$ 项，但如果某项中至少有一个元素为零，则该项为零. 因此首先要将含零元素的项排除，只考虑哪些非零项.

(2)n 阶行列式各项均为 n 个元素连乘积，且这 n 个元素要取自不同行不同列，即一项中的元素不能有取自同行或同列的. 如果某项取了(i,j)处元素，则该项中不能再有取之第 i 行或第 j 列的其他元素.

(3)每项前面冠以的符号，有两种求法：

(i)行标按自然顺序排列，列标为偶排列(即排列的逆序数为偶数或零)，该项前面冠以正号；列标为奇排列(即排列的逆序数为奇数)，该项前面冠以负号. 即，若有 n 阶行列式的某项，行标已经按自然顺序排列，设列标的排列为 $j_1j_2\cdots j_n$，那么该项前的符号为